This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 2348.77.3

HARVARD COLLEGE

SCIENCE CENTER
LIBRARY

Lib
Miscellany

RECUEIL D'EXERCICES

SUR LA

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

RECUEIL D'EXERCICES

SUR LA

MÉCANIQUE RATIONNELLE,

A L'USAGE DES CANDIDATS

A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR

A. DE SAINT-GERMAIN,

PROFESSEUR DE MÉCANIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN,
ANCIEN MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES DE PARIS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1877

(Tous droits réservés.)

~~II, 3599~~
Math 2348.77.3

From
the Estate of
George Eastwood,
4 Feb., 1887.

PRÉFACE.

C'est une vérité généralement admise, qu'on ne peut bien posséder les théories peu nombreuses, mais fécondes, qui constituent la Mécanique rationnelle, si l'on n'en a fait des applications attentives et variées : aussi a-t-on publié en France et à l'étranger plusieurs recueils de problèmes de Mécanique qui ont rendu d'incontestables services et obtenu un légitime succès. Je dois dire un mot sur ceux de ces Ouvrages qui sont le plus connus chez nous, et expliquer dans quel but je viens présenter au public studieux un nouveau Livre sur le même sujet. Les Recueils de M. William Walton et du P. Jullien sont très-soignés et très-riches; mais cette richesse même me semble avoir un double inconvénient : l'étudiant n'a pas le temps de porter son attention sur tous les exercices relatifs à un même sujet et hésite sur le choix qu'il doit faire; puis, pour ne pas avoir un livre trop volumineux, on a dû choisir

ces solutions nettes, mais succinctes, qu'aiment les Anglais, et éviter les discussions complètes auxquelles nous nous livrons dans l'enseignement français pour pousser aussi loin que possible la solution des problèmes; j'ajoute qu'à côté de questions très-élémentaires on en trouve d'autres, trop développées pour être de simples exercices. M. Arwed Fuhrmann a donné des problèmes bien choisis, mais peu variés, et généralement trop simples pour faire l'objet d'une composition écrite. Le Cours complémentaire de Mécanique de M. Vieille est excellent; malheureusement il est trop peu étendu.

Il m'a semblé qu'il pouvait être utile d'écrire un Livre destiné spécialement aux candidats à la Licence et à l'Agrégation, et j'espère leur rendre quelques services en publiant le résumé des conférences que j'ai faites précisément pour eux à l'École des Hautes Études de Paris. Les questions que j'ai traitées se rapportent aux diverses parties du Cours de Mécanique rationnelle et de Cinématique; un grand nombre d'entre elles sont empruntées aux Recueils déjà publiés, aux collections savantes et aux compositions proposées à Paris pour l'Agrégation ou la Licence (celles-ci sont simplement désignées par la mention : Licence 18...). J'ai développé un petit nombre de questions de Cours pour lesquelles j'ai cru devoir recommander un certain mode d'exposition; quant aux

problèmes, j'essaye d'en donner des solutions qui puissent être imitées pour des exercices analogues; dans la plupart des cas, j'explicite et je discute cette solution aussi complétement que je le puis ; par des exemples répétés, je cherche à convaincre l'étudiant de cette importante vérité, qu'une équation différentielle définit souvent avec plus de netteté que son intégrale la nature d'un mouvement ou d'une trajectoire, de même que la construction de certaines courbes est facile quand on connaît l'expression des coordonnées d'un de leurs points en fonction d'un paramètre variable qu'on se gardera d'éliminer. Si j'ai apporté tous mes soins à éclaircir les points délicats, j'ai, pour abréger, omis les indications auxquelles tout le monde suppléera, j'ai laissé au lecteur le soin de faire plusieurs figures faciles; d'ailleurs quelques résultats de calcul simplement énoncés, et des exercices placés à la fin de chaque Chapitre fourniront encore de nombreux sujets de travail. Pour ne pas trop augmenter l'étendue de ce Livre, je n'ai consacré que quelques pages au mouvement d'un solide dans l'espace, et je n'ai pas parlé de l'Hydraulique, à laquelle on emprunte si rarement des sujets de composition dans nos concours. Suivant l'ordre du Cours professé à la Faculté de Paris par M. Darboux, auquel je dois bien des indications précieuses, j'ai relégué dans un dernier Chapitre les théorèmes généraux de la Mécanique, ceux

du travail virtuel et de d'Alembert, qui fournissent des solutions si régulières de tous les problèmes, mais avec lesquels la Mécanique n'est plus qu'une question d'Analyse; je donne plusieurs applications des équations de Lagrange et le théorème célèbre de Jacobi sur l'intégration des équations canoniques. Je m'estimerai heureux si les personnes qui étudient la Mécanique peuvent tirer quelque profit de la lecture de ce Livre, auquel j'ai donné tous mes soins, et je recevrai avec reconnaissance toutes les observations qui me permettraient de l'améliorer.

A. S.-G.

RECUEIL D'EXERCICES

SUR LA

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

STATIQUE.

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL.

Cas où le point est libre.

1. Tout système de forces agissant sur un point matériel peut être remplacé par une résultante, dont la projection sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des forces données. Si le point est entièrement libre, il y aura équilibre quand la résultante sera nulle; et pour cela il faut et il suffit que les projections des forces données, faites sur trois axes parallèlement à trois plans qui se coupent, aient une somme nulle. Si toutes les forces agissent dans un même plan, il suffit d'égaler à zéro la somme de leurs projections sur deux axes pris dans ce plan.

Quand trois forces P, Q, R concourantes se font équilibre, elles peuvent être représentées en grandeur et en direction par les côtés d'un triangle (principe de Stévin) : chacune est égale et opposée à la résultante des deux autres; elles sont alors liées par les relations de la Trigonométrie,

convenablement modifiées,

$$\frac{P}{\sin(Q, R)} = \frac{Q}{\sin(R, P)} = \frac{R}{\sin(P, Q)},$$

$$P^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\cos(Q, R) \ldots.$$

Souvent le point considéré est attaché à un fil dont l'extrémité est sollicitée par une force connue, ou fixée en un point invariable. Dans le premier cas, le fil se dirige suivant la force qui le sollicite, et sa tension est égale à cette force si l'on regarde le fil comme de masse négligeable; dans l'autre cas, la tension est inconnue *a priori;* mais, en exprimant que l'extrémité est fixe, on a une condition qui, jointe aux autres conditions de l'équilibre, permettra de déterminer la tension du fil et la position du point matériel. Quand un fil sans masse, en équilibre ou non, passe sur une poulie ou dans un anneau qui ne donne lieu à aucun frottement, les deux brins du fil ont la même tension, autrement le fil se mouvrait du côté où il est le plus tendu avec une vitesse infinie, ce qu'on ne peut admettre.

2. *Déterminer la position d'équilibre d'un point* M, *attiré vers des points fixes avec des intensités proportionnelles à la distance.*

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de M; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... celles des points fixes; r_1, r_2, ... les distances de ces points à M. L'intensité de la force exercée par le premier de ces points fixes a pour expression $\lambda_1 r_1$; et, comme elle est dirigée suivant la droite dont les cosinus directeurs sont $\frac{x_1 - x}{r_1}, \ldots$, ses projections sur les axes sont $\lambda_1(x_1 - x)$, $\lambda_1(y_1 - y)$, $\lambda_1(z_1 - z)$. On a des résultats analogues pour les autres points, et les équations d'é-

quilibre sont

$$\lambda_1(x_1 - x) + \lambda_2(x_2 - x) + \ldots = 0,$$
$$\lambda_1(y_1 - y) + \lambda_2(y_2 - y) + \ldots = 0,$$
$$\lambda_1(z_1 - z) + \lambda_2(z_2 - z) + \ldots = 0,$$

d'où

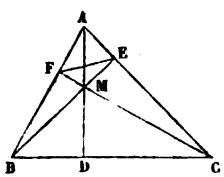
$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots}{\lambda_1 + \lambda z_2 + \ldots}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \ldots}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots}.$$

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont proportionnels aux masses des points attirants, on en conclut que la position d'équilibre est au centre de gravité du système de ces points : en tout autre lieu, le mobile est attiré vers ce centre comme si toutes les masses attirantes y étaient réunies.

3. *Position d'équilibre d'un point* M, *attiré vers les trois sommets d'un triangle par des forces constantes, mais qui sont entre elles dans le même rapport que les côtés opposés aux sommets dont elles émanent respectivement.*

On peut désigner les trois forces (*fig.* 1) par $P = \lambda a$

Fig. 1.



suivant MA, $Q = \lambda b$ suivant MB, $R = \lambda c$ suivant MC. La relation

$$P^2 = Q^2 + R^2 + 2QR\cos(Q, R)$$

donne, en divisant tout par λ^2,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(P, Q).$$

Comparant avec la relation qui lie a, b, c et A, on en conclut

$$(Q, R) = EMF = \pi - A.$$

De même $FMD = \pi - B$, $DME = \pi - C$. Le point M est à l'intersection des segments capables des angles $\pi - B$, $\pi - C$ décrits respectivement sur AC et AB. Soit A le plus grand des angles du triangle; s'il est aigu, les deux segments se coupent à l'intérieur du triangle, car leurs tangentes en A, faisant respectivement avec AC et AB les angles B et C dont la somme est $> A$, les segments empiètent l'un sur l'autre. Il est aisé de voir qu'alors M est le point de concours des hauteurs de ABC; car les quadrilatères inscriptibles AEMF, FMDB donnent

$$AFM + AEM = \pi, \quad AEF = AMF = ABC.$$

La dernière égalité prouve que EF et BC sont antiparallèles; les angles AEM, AFM sont donc égaux; nous venons de voir qu'ils sont supplémentaires : ils sont donc droits, et BE, CF sont des hauteurs.

Lorsque A est obtus, les deux segments capables n'ont d'autre point commun que le sommet A; or le point attiré ne saurait y être en équilibre, même en supposant à la force P telle direction qu'on voudra; car les forces Q et R, dirigées suivant AB et AC, peuvent se représenter respectivement par des droites $AC' = \lambda AC$, $AB' = \lambda AB$: si l'on construit leur parallélogramme, la diagonale partant de A ne sera pas égale à $B'C'$, c'est-à-dire à λBC ou P; les trois forces ne se détruiront pas, et il n'y aura aucune position d'équilibre. Si l'on eût cherché les coordonnées de M, on aurait eu des équations compliquées de radicaux, qui n'auraient pas admis de solution quand A est obtus.

4. *Position d'équilibre d'un poids* C *attiré vers deux*

points égaux A, B, *situés sur une horizontale, par des forces variant en raison inverse de la distance.*

Soient a, b, c les côtés de ABC; P le poids du mobile C; les attractions qu'il reçoit de A et de B peuvent se représenter par $\frac{\lambda P}{b}$, $\frac{\lambda P}{a}$, λ étant la distance pour laquelle l'attraction serait égale au poids. Égalons à zéro la somme des projections horizontales et verticales des forces agissant sur C,

$$\frac{\lambda P}{b}\cos A - \frac{\lambda P}{a}\cos B = 0, \quad \frac{\lambda P}{b}\sin A + \frac{\lambda P}{a}\sin B - P = 0.$$

Remplaçons a et b par $c\frac{\sin A}{\sin C}$, $c\frac{\sin B}{\sin C}$, et réduisons :

$$\sin 2A = \sin 2B, \quad \lambda\left(\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A}\right) = \frac{c}{\sin C}.$$

Il y a deux solutions :

1° $$A = B, \quad \sin C = \frac{c}{2\lambda}.$$

Cette solution n'est acceptable que si $c < 2\lambda$; ABC est isoscèle, C étant susceptible de deux valeurs supplémentaires.

2° $$\begin{cases} A = \frac{\pi}{2} - B, \quad \sin C = 1, \\ c = \lambda(\operatorname{tang} A + \cot A) = \frac{2\lambda}{\sin 2A}, \quad \sin 2A = \frac{2\lambda}{c}. \end{cases}$$

Il faut que c soit $> 2\lambda$; à cette solution correspondent deux triangles rectangles symétriques par rapport à la verticale issue du milieu de AB.

Il y a toujours deux positions d'équilibre, et pas davantage.

Ce problème est un cas particulier du suivant :

Trouver les positions d'équilibre d'un point (x, y) *attiré vers des centres fixes* $(x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots)$, *situés dans un plan, avec des intensités réciproques à la distance.*

Les coordonnées étant rectangulaires, m_i désignant la masse du centre x_i, y_i, les équations d'équilibre sont évidemment

$$\sum \frac{m_i(x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} = 0, \quad \sum \frac{m_i(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} = 0.$$

Ces équations ont une interprétation remarquable : ajoutons-les, après avoir multiplié la seconde par $-\sqrt{-1}$,

$$\sum m_i \frac{x - x_i - \sqrt{-1}(y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} = \sum \frac{m_i}{x - x_i + \sqrt{-1}(y - y_i)} = 0.$$

Posons

$$z = x + y\sqrt{-1}, \quad z_i = x_i + y_i\sqrt{-1},$$

ce qui revient à définir chaque point du plan par une valeur de l'imaginaire z ; l'équation précédente s'obtiendrait en égalant à zéro la dérivée de la fonction

$$F(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \ldots.$$

Pour en déduire notre cas particulier, nous supposerons d'abord C attiré par A et B et par un point H situé sur la perpendiculaire au milieu de AB; on prend cette droite pour axe des y, AB pour axe des x; alors $z_1 = \frac{c}{2}$, $z_2 = -\frac{c}{2}$, $z_3 = h\sqrt{-1}$; faisons $m_1 = m_2 = 1$, et choisissons m_3, de manière que pour l'origine les attractions de A et de H soient dans le rapport de $\frac{2\lambda P}{c}$ à P; $\frac{2\lambda}{c} = \frac{2h}{cm_3}$, $m_3 = \frac{h}{\lambda}$; puis on fera tendre h vers l'infini. En multipliant les masses

par λ, on a

$$F(z) = \left(z^2 - \frac{1}{4}c^2\right)^\lambda (z - h\sqrt{-1})^h.$$

Égalant à zéro $F'(z)$,

$$2\lambda z(z - h\sqrt{-1}) + h\left(z^2 - \frac{1}{4}c^2\right) = 0.$$

Remplaçons z par $x + y\sqrt{-1}$, et séparons les parties réelles et imaginaires :

$$(2\lambda + h)(x^2 - y^2) + 2\lambda hy - \frac{1}{4}hc^2 = 0, \quad (2\lambda + h)xy - \lambda hx = 0.$$

Divisant par h et faisant h infini,

$$x^2 - y^2 + 2\lambda y - \frac{1}{4}c^2 = 0, \quad xy - \lambda x = 0;$$

on en déduit les quatre positions trouvées géométriquement.

5. *Un fil flexible, inextensible et sans masse est fixé à l'une de ses extrémités* B : *il porte en* C *un poids* P *qui y est attaché à une distance connue a de* B; *puis il passe sur une très-petite poulie* A *située à la même hauteur que* B; *enfin il porte un poids* Q *à l'autre extrémité, qui est libre. Quelle est la figure d'équilibre? Cas de* P = Q.

La tension du cordon CA est, comme on l'a remarqué au commencement, égale à celle de AQ, c'est-à-dire à Q : le point C est donc en équilibre sous l'influence d'une force Q dirigée suivant CA, d'une force verticale P et d'une force inconnue T qui n'est autre que la tension du cordon CB. Chacune de ces forces est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres :

$$(1) \qquad \frac{Q}{\cos B} = \frac{P}{\sin C} = \frac{T}{\cos A}.$$

Soit $AB = c$; on a, dans le triangle ABC,

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b} = c\sqrt{\frac{1 - \cos^2 B}{a^2 + c^2 - 2ac\cos B}}.$$

Égalons cette valeur à celle qu'on déduit de (1), et réduisons; il vient

$$(2) \quad 2acP^2\cos^3 B - (a^2P^2 + c^2P^2 + c^2Q^2)\cos^2 B + c^2Q^2 = 0.$$

Les équations (1) exigent que B soit aigu, et aussi A si l'on veut que T soit positif; cette dernière condition exige que c soit $> a\cos B$, ou $\cos B < \frac{c}{a}$. On ne peut donc prendre que les racines de l'équation (2), qui sont positives et moindres que $\frac{c}{a}$ et que l'unité. Le premier membre de l'équation (2) est positif pour $\cos B = 0$, négatif et égal à $-P^2(a-c)^2$ pour $\cos B = 1$; il s'annule toujours pour une valeur de $\cos B$ comprise entre 0 et 1; quand c est $> a$, cette racine est acceptable et donne une figure d'équilibre. Lorsque c est $< a$, il faut que la racine soit $< \frac{c}{a}$ ou que le premier membre de l'équation soit < 0 pour $\cos B = \frac{c}{a}$; le résultat de cette substitution est $c^2\frac{a^2 - c^2}{a^2}(Q^2 - P^2)$; les deux premiers facteurs étant positifs, il faut $Q < P$: il y a alors une figure d'équilibre; mais, si $Q > P$, l'équilibre est impossible; le point C serait tiré jusqu'en A, et AC ne serait pas rectiligne comme on l'a supposé.

Dans le cas de $P = Q$, l'équation pourrait être résolue, car elle admet la racine $\frac{c}{a}$; mais il est plus simple de remarquer que les équations (1) donnent alors

$$\sin C = \cos B, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{\pi}{2} \pm B.$$

Le signe $+$ exige $c > a$; alors

$$\frac{a}{c} = \frac{\cos 2B}{\cos B}, \quad \cos B = \frac{1}{4c}\left(a + \sqrt{a^2 + 8c^2}\right).$$

Si l'on prend $C = \frac{\pi}{2} - B$, ABC sera rectangle en A, $c < a$; alors T est nul, comme l'exige la verticalité du fil AC.

Si le poids P était porté par un anneau dans lequel passerait le fil, on aurait facilement

$$T = Q, \quad \sin A = \sin B = \frac{P}{2Q}.$$

EXERCICES.

Trouver la position d'équilibre d'un point non pesant attiré vers deux centres fixes par des forces variant en raison inverse du carré de la distance.

Les trois sommets d'un triangle attirent un point situé dans le plan du triangle avec des intensités proportionnelles à leurs masses et à l'inverse du carré de la distance, autrement dit suivant la loi newtonienne. Quel doit être le rapport des masses des points attirants pour que le point mobile se tienne en équilibre dans une position donnée? (FUHRMANN.)

Un fil est attaché à ses extrémités A, B, en deux points d'une horizontale : déterminer deux points C, D de ce fil où il faudrait attacher deux poids donnés pour que, dans la figure d'équilibre, la droite CD fût horizontale et à une distance connue de AB. (W. WALTON.)

Cas où le point doit rester sur une surface ou une courbe.

6. Quand un point sollicité par des forces F, F′,..., est assujetti à rester sur une surface ou une courbe rigide et polie, il peut être en équilibre sans que la résultante des forces soit nulle; il suffit qu'elle soit normale à la surface

ou à la courbe; autrement dit, les forces représentées par les projections de F, F′,... soit sur le plan tangent, soit sur la tangente, se font équilibre.

Soient X, Y, Z les sommes des projections de F, F′,... sur trois axes rectangulaires; pour que le mobile soit en équilibre au point x, y, z d'une surface $\varphi(x, y, z) = 0$, on doit avoir

$$(1) \qquad \frac{X}{\varphi'_x} = \frac{Y}{\varphi'_y} = \frac{Z}{\varphi'_z}.$$

Le point doit-il être en équilibre en un point d'une courbe sur laquelle les déplacements dx, dy, dz sont liés par les deux équations de la courbe, on a

$$(2) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

On peut résoudre les mêmes questions en traitant le point comme un point libre, pourvu qu'aux forces extérieures F, F′,... on adjoigne la réaction de la courbe ou de la surface; on n'en connaît pas la grandeur *a priori*, mais on sait qu'elle est normale : elle est d'ailleurs égale et opposée à la résultante des projections de F, F′,... soit sur la normale à la surface, soit sur le plan normal à la courbe. J'appellerai seulement l'attention sur le cas où le point est en équilibre sur une surface dans laquelle il ne peut pénétrer, mais dont il peut s'éloigner extérieurement. La résultante des forces F, F′,..., qui est alors normale, doit être dirigée vers la partie de l'espace où le mobile ne peut pénétrer; et l'on sait (*Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 94) que la portion de normale allant vers les points extérieurs, pour lesquels $\varphi(x, y, z) > 0$, a pour cosinus directeurs

$$\frac{1}{V}\varphi'_x, \quad \frac{1}{V}\varphi'_y, \quad \frac{1}{V}\varphi'_z, \quad V = +\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}.$$

Au lieu de donner la surface ou la courbe sur laquelle le point est obligé de rester, on peut demander quelle doit être leur nature pour que le point y soit partout en équilibre sous l'action de forces données; appelons, pour abréger, ces lieux *surfaces* ou *courbes de niveau*. Les équations (1) et (2) doivent y être satisfaites pour tous leurs points; mais, au lieu de définir les surfaces par les équations simultanées (1), il revient au même de les regarder comme déterminées par l'équation différentielle totale (2); elle peut n'être pas intégrable : alors il n'y a pas de surface de niveau pour les forces données. Quant aux courbes, cette équation (2) ne suffirait pas à les définir : il faut se donner une surface sur laquelle elles doivent se trouver. Lorsqu'il s'agit de courbes planes situées dans le plan xy, on fera $z = 0$ dans les équations qui précèdent.

7. *Un point pesant est placé sur une ellipse dont le petit axe est vertical et exerce sur ce point une action répulsive horizontale proportionnelle à la distance du point à l'axe : position d'équilibre, pression correspondante.*

Les composantes de la force qui sollicite le point sont

$$X = \lambda x, \quad Y = -p.$$

L'équation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donne

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0.$$

La condition $X\,dx + Y\,dy = 0$ devient

$$\frac{px}{a^2} + \frac{\lambda xy}{b^2} = 0.$$

La solution $x = 0$ montre qu'il y a équilibre si le point est aux extrémités du petit axe; la pression sur l'ellipse est

le poids du corps. L'autre solution

$$y = -\frac{pb^2}{\lambda a^2}, \quad x = \pm \frac{1}{\lambda a}\sqrt{\lambda^2 a^4 - p^2 b^2}$$

donne deux positions d'équilibre si $\lambda a^2 > pb$. La pression exercée sur la courbe a pour composantes

$$X = \pm \frac{1}{a}\sqrt{\lambda^2 a^4 - p^2 b^2}, \quad Y = -p;$$

ces composantes sont de même signe que les cosinus directeurs de la normale extérieure $\frac{1}{V}\varphi'_x$, $\frac{1}{V}\varphi'_y$: le point est donc appuyé contre la partie concave de l'ellipse.

8. *Trouver dans un plan vertical une courbe de niveau pour un point pesant, repoussé de l'axe des y, qui est vertical, par une force λx.*

En tous les points de la courbe, on doit avoir

$$\lambda x\,dx - p\,dy = 0;$$

intégrant,

$$\lambda x^2 - 2p(y - y_0) = 0.$$

On a des paraboles égales, ayant pour axe l'axe des y; la pression est dirigée vers l'extérieur et égale à $\sqrt{\lambda^2 x^2 + p^2}$.

9. *Trouver dans un plan une courbe de niveau pour un point repoussé de l'origine avec une force proportionnelle à la distance et sollicité par une force constante dirigée suivant la tangente et dans le sens qui fait un angle aigu avec le rayon vecteur.*

Soient F la force constante, $\frac{Fr}{a}$ la force émanant du pôle; leurs composantes sont $-F\frac{dx}{ds}$, $-F\frac{dy}{ds}$ et $\frac{Fx}{a}$, $\frac{Fy}{a}$; la con-

dition d'équilibre devient, après avoir divisé par F,

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{dx}{ds}\right) dx + \left(\frac{y}{a} - \frac{dy}{ds}\right) dy = 0.$$

On aurait aisément l'intégrale en prenant des coordonnées polaires; mais, si l'on écrit l'équation sous la forme équivalente

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} = a,$$

elle exprime que la distance de l'origine à une normale quelconque de la courbe est égale à a; la ligne cherchée est donc la développante d'un cercle ayant pour centre le pôle et pour rayon a. La pression normale est égale à

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = F\sqrt{\left(\frac{x}{a} - \frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{y}{a} - \frac{dy}{ds}\right)^2} = \frac{F}{a}\sqrt{r^2 - a^2};$$

elle est proportionnelle au rayon de courbure de la développante.

10. *Position d'équilibre d'un point pesant assujetti à rester sur une hélice dont l'axe est vertical; un point de l'axe repousse le mobile avec une intensité réciproque au carré de la distance.*

Prenons le centre de répulsion pour origine, l'axe de l'hélice pour axe des z, et appelons a le rayon du cylindre qui contient l'hélice. Si la force répulsive est P à la distance c, ses composantes seront, pour la distance $\sqrt{a^2 + z^2}$,

$$\frac{Pc^2x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{Pc^2y}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{Pc^2z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour tous les points de l'hélice, on a

$$x\,dx + y\,dy = 0;$$

la condition d'équilibre se réduit à $Z = 0$, ou, divisant par P,

$$c^2 z - (c^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Posons $a^2 + z^2 = u$, nous aurons l'équation

$$f(u) = u^3 - c^4 u + a^2 c^4 = 0.$$

On ne peut admettre que les racines $> a^2$. Or $f(a^2)$ et $f(\infty)$ sont positifs; pour qu'il y ait une position d'équilibre, il faut que la racine positive de l'équation dérivée soit $> a$ et rende $f(u) < 0$; cette double condition est comprise dans l'inégalité $c^2 > \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$. Si elle est vérifiée, il y aura deux positions d'équilibre, et non quatre, parce qu'à chaque valeur de u il faut faire correspondre la valeur de z qui est positive. La pression exercée sur la courbe aura pour composantes

$$\frac{P c^2 x}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{P c^2 y}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad 0.$$

Elle est dirigée suivant la normale principale de l'hélice, et, comme le reste, indépendante du pas.

11. *Trouver sur une sphère une courbe de niveau pour un point pesant, attiré vers l'extrémité d'un diamètre horizontal par une force réciproque au cube de la distance.*

Prenons pour origine le centre de la sphère dont le rayon est a, et faisons passer l'axe des x par le point attirant; les composantes de l'attraction peuvent se représenter par

$$\frac{P c^3 (a - x)}{[(a - x)^2 + y^2 + z^2]^2}, \quad \frac{- P c^3 y}{[(a - x)^2 + y^2 + z^2]^2}, \ldots$$

La condition d'équilibre en un point de la courbe cherchée

sera

$$\frac{Pc^3}{[(a-x)^2+y^2+z^2]^2}[(a-x)dx-ydy-zdz]-Pdz=0.$$

Or

$$(a-x)^2+y^2+z^2=2a(a-x) \quad \text{et} \quad xdx+ydy+zdz=0;$$

donc

$$\frac{c^3dx}{4a(a-x)^2}-dz=0, \quad c^3=4a(a-x)(z-z_0).$$

Les courbes cherchées sont à double courbure et se projettent sur le plan des x, suivant des portions d'hyperboles équilatères dont une asymptote touche la sphère au point attirant. La pression sur la courbe se calcule aisément pour chaque point :

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=P\sqrt{1+\frac{16(z-z_0)^2}{c^3}}.$$

12. *Position d'équilibre d'un point pesant assujetti à rester sur la surface d'un ellipsoïde dont le petit axe est vertical. Le point est attiré vers une extrémité de l'axe moyen par une force proportionnelle à la distance, et qui serait égale au poids du point s'il était au centre de la surface.*

Prenons pour axe des x le grand axe, l'axe moyen pour axe des y, l'autre pour axe des z; l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Les composantes de la force qui sollicite le point x, y, z sont

$$X=-\frac{Px}{b}, \quad Y=-P\frac{y-b}{b}, \quad Z=-P\frac{z+b}{b}.$$

Par suite, les équations d'équilibre sont, en multipliant par $-\frac{b}{P}$,

$$(1) \qquad \frac{x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y-b}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z+b}{\frac{z}{c^2}}.$$

Ce sont précisément les conditions pour que la normale à l'ellipsoïde en x, y, z passe au point S dont les coordonnées sont o, b, $-b$. Le résultat pouvait se prévoir, car les valeurs de X, Y, Z montrent que la force attractive et la pesanteur se composent en une attraction aussi proportionnelle à la distance et émanant de S.

Les équations (1) se réduisent à une seule en faisant $x = 0$; mais on ne trouve alors que deux systèmes de valeurs réelles pour x, y, z; car on ne peut mener que deux normales à la trace de l'ellipsoïde sur le plan yz par notre point S qui est extérieur à la développée de cette trace. Dans l'une des solutions, la valeur de z est négative; dans l'autre, positive; comme la composante Z de la pression sur l'ellipsoïde est toujours négative, il en résulte que dans la première position le point est pressé contre le côté concave de la surface, dans l'autre, contre le côté convexe.

En supposant $x \gtrless 0$, les équations (1) donnent deux nouvelles positions d'équilibre à l'intersection de l'ellipsoïde et de la droite

$$y = -\frac{b^3}{a^2-b^2}, \quad z = \frac{bc^2}{a^2-c^2}.$$

Ces points sont réels si $a^2(a^2-2b^2)(a^2-c^2)^2 > b^2c^2(a^2-b^2)^2$; le point y sera pressé contre le côté convexe de la surface; en sorte que, si le mobile était posé dans l'ellipsoïde, il n'aurait qu'une position d'équilibre.

13. *Trouver les surfaces de niveau pour un point dont*

le poids est P, *et qui est attiré vers un point fixe* O *par une force constante* Q.

Prenons pour origine le point O, et pour axe des z une verticale dans le sens de la pesanteur; les composantes de l'attraction du point O sont

$$\frac{-Qx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{-Qy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{-Qz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

en sorte que l'équation des surfaces de niveau sera

$$P\,dz - Q\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

d'où

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{P}{Q}(z-c).$$

Les surfaces de niveau sont les lieux des points tels que leurs distances à l'origine et au plan $z=c$ soient dans un rapport constant : ce sont des surfaces de révolution autour de l'axe des z, et leur méridienne est une conique ayant pour foyer l'origine, pour directrice la droite $z=c$; ce sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que P sera $<Q$, $=Q$, $>Q$; mais il ne faut prendre que les points pour lesquels $z-c$ est >0, c'est-à-dire ceux qui sont au-dessous du plan $z=c$; les autres correspondent au cas où Q serait négatif, c'est-à-dire au cas où le point serait repoussé de l'origine. Lorsque l'on a un ellipsoïde ou un paraboloïde, il faut que c soit négatif, et toute la surface répond à la question; dans le cas de l'hyperboloïde, c peut être quelconque, et la partie utile est toujours la nappe inférieure de l'hyperboloïde.

La pression exercée sur la surface est dirigée suivant la partie de la normale qui va rencontrer l'axe des z; sa gran-

deur est

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{P^2+Q^2-2PQ\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$
$$=\sqrt{P^2-Q^2-2Q^2\frac{c}{z-c}}.$$

Sur l'ellipsoïde, elle va de $P+Q$, au sommet supérieur, à $Q-P$, au point le plus bas; dans l'hyperboloïde, elle va de $P+Q$ ou de $P-Q$ à $\sqrt{P^2-Q^2}$, selon que c est $\lesseqgtr 0$.

EXERCICES.

Un corps pesant placé sur un plan incliné est tenu en équilibre par deux forces égales à la moitié de son poids, l'une horizontale, l'autre suivant une ligne de plus grande pente, toutes deux tendant à faire monter le mobile : quel est l'angle du plan avec l'horizon? C'est $2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{2}$.

Un fil de longueur donnée passe sur une petite poulie et se termine par deux poids qui reposent sur deux plans inclinés, la poulie étant située à une distance connue au-dessus de leur intersection : figure d'équilibre.

Positions d'équilibre d'un point pesant, assujetti à rester sur une spirale logarithmique et repoussé du centre par une force constante. (Fuhrmann.)

Un point pesant est obligé de rester sur une hyperbole équilatère dont une asymptote est verticale; quelle force horizontale faudrait-il lui appliquer pour qu'il soit partout en équilibre sur l'hyperbole? (Fuhrmann.)

Trouver sur un cylindre $x^2+y^2=a^2$ une courbe de niveau pour un point sollicité par une force dont les composantes sont λx, μy, νz.

Surface de niveau pour un point sollicité par une force dont les composantes parallèles à trois axes rectangulaires sont $\alpha x+\alpha$,

$by + \beta$, $cz + \gamma$; en déduire le cas où le mobile est attiré vers des centres fixes, proportionnellement à la distance.

Position d'équilibre d'un poids P assujetti à rester sur un ellipsoïde à axe vertical, et attiré vers le centre par une force constante Q. On trouve, a, b, c étant les demi-axes,

$$\frac{Qx}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Qy}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Qz + P\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\frac{z}{c^2}}.$$

Il faut annuler ou x ou y, et les points cherchés sont à l'intersection de l'ellipsoïde et de certaines droites partant du centre; mais, le radical devant être pris avec le signe $+$, on reconnaîtra que, sur chaque droite, il n'y a qu'un point d'intersection admissible, le second répondant au cas où Q serait répulsif.

Cas où il y a des frottements.

14. Lorsqu'un corps M est posé sur une surface naturelle qui n'est jamais parfaitement polie, une force tangentielle quelconque ne suffit pas pour le faire glisser; elle doit dépasser une certaine limite qui est celle de la résistance de la surface au glissement; cette résistance est la force de frottement. On dit que l'expérience montre que la force de frottement est fN, proportionnelle à la pression normale N; mais il faut bien entendre qu'il s'agit de la valeur maximum qu'elle puisse atteindre, alors que le glissement est près d'avoir lieu; si le corps n'est pas près de glisser, la force de frottement n'est qu'une fraction, inconnue *a priori*, de fN, mais égale et opposée à la résultante tangentielle des forces extérieures. Le frottement au départ, fN, est dirigé en sens contraire de la direction où le mouvement tend à se produire. Lorsqu'il y a mouvement, l'adhérence des surfaces glissantes produit encore un frottement proportionnel à la pression normale, mais le rapport est exprimé par un coefficient moindre que celui du

frottement au départ. L'angle qui a pour tangente les coefficients précédents est dit *angle de frottement :* c'est l'angle de la normale à la surface et de sa réaction. Observons dès à présent que, si deux surfaces, toutes deux mobiles, glissent l'une sur l'autre, elles sont soumises à des forces de frottement égales et opposées, dont la direction est celle du glissement relatif, c'est-à-dire qu'elle est parallèle au plan tangent commun.

15. *Trouver sur une parabole dépolie dont l'axe est vertical le point le plus bas où puisse rester en équilibre un corps pesant, attiré vers le foyer par une force réciproque au carré de la distance, et qui est égale au poids quand le corps attiré est au sommet : le coefficient de frottement est* $\frac{3}{5}$.

Soient p le demi-paramètre, r la distance du foyer au point cherché, α l'angle que la normale en ce point fait avec le rayon vecteur et avec la verticale; en prenant le poids du corps pour unité de force, l'attraction du foyer sera $\frac{p^2}{4r^2}$; projetons les forces sur la normale et sur la tangente, on aura, si le point considéré est la limite des positions d'équilibre,

$$N = \cos\alpha\left(1 + \frac{p^2}{4r^2}\right), \quad \frac{3}{5}N = \sin\alpha\left(1 - \frac{p^2}{4r^2}\right).$$

On trouve aisément que $r = \frac{p}{2\cos^2\alpha}$; remplaçons-le par cette valeur, et éliminons N :

$$\sin\alpha(1 - \cos^4\alpha) - \frac{3}{5}\cos\alpha(1 + \cos^4\alpha) = 0$$

ou

$$5\tang^5\alpha - 3\tang^4\alpha + 10\tang^3\alpha - 6\tang^2\alpha - 6 = 0.$$

Il y a la solution $\tang\alpha = 1$; si on la supprime, il reste l'équation

$$5\tang^4\alpha + 2\tang^3\alpha + 12\tang^2\alpha + 6\tang\alpha + 6 = 0,$$

qui n'a plus de racines positives. Le point cherché est à l'intersection de la parabole et de l'horizontale menée par le foyer, où la tangente fait un angle de 45 degrés avec l'axe.

16. *Étant donné un point pesant sur un plan dépoli, incliné d'un angle i à l'horizon, déterminer l'intensité de la force ayant une direction quelconque donnée, qu'il faut appliquer au corps pour qu'il soit sur le point de glisser.*

Prenons pour axe des x la ligne de plus grande pente du plan dans le sens descendant, pour axe des y l'horizontale du point (O), pour axe des z la portion de la normale au plan située au-dessus; définissons la direction donnée par ses cosinus directeurs α, β, γ. Soient F la force correspondante, P le poids du corps; les composantes des forces extérieures auxquelles il est soumis sont

$$X = P\sin i + F\alpha, \quad Y = F\beta, \quad Z = F\gamma - P\cos i.$$

Le corps étant posé sur le plan exerce sur lui une réaction $-Z$ dirigée en-dessous; la composante, située dans le plan, qui tire le point, est $\sqrt{X^2 + Y^2}$; on a donc, si l'équilibre est près d'être rompu,

$$\sqrt{(F\alpha + P\sin i)^2 + F^2\beta^2} = f(P\cos i - F\gamma).$$

Pour étudier la manière dont varie F quand sa direction change, portons sur chaque direction une longueur proportionnelle à la valeur correspondante de F, P étant représenté à la même échelle par une longueur a; le lieu

des extrémités de ces droites représentatives a pour équation

$$(1) \qquad \sqrt{(x + a \sin i)^2 + y^2} = \operatorname{tang} \varphi (a \cos i - z).$$

C'est la nappe inférieure d'un cône droit : le sommet a pour coordonnées $-a \sin i$, O, $a \cos i$; l'axe est perpendiculaire au plan, et fait avec les génératrices l'angle φ. (La nappe supérieure répondrait au cas où le mobile serait en dessous du plan.) Lorsque $\varphi > i$, le point O est à l'intérieur du cône; pour les directions au-dessus du plan, F aura une seule grandeur, et il en sera de même si F est dirigée au-dessous du plan, mais fait avec l'axe du cône un angle $> \varphi$; si l'angle est $< \varphi$, la demi-droite correspondante ne coupe plus le cône, et, pour ces directions, le problème est impossible. Soit maintenant $\varphi < i$; l'origine est en dehors du cône, en sorte que certaines droites ne le rencontreront pas, et pour celles-là le problème est impossible; d'autres le coupent en deux points, et la force correspondante a deux valeurs. Il faut remarquer que, dans chaque cas, le glissement se fait dans la direction indiquée par les composantes X, Y; cette direction n'est pas liée d'une manière évidente *a priori* à α, β, γ; mais elle est parallèle à la trace du plan méridien qui contient l'extrémité de la droite représentative de la force.

Du point O on peut mener deux normales au cône, et l'une a une longueur minima; elle fait avec le plan l'angle φ, et est au-dessus si $\varphi > i$, au-dessous si $\varphi < i$; c'est la force minimum qui mettra le corps sur le point de glisser. La seconde normale n'est minima que parmi les droites comprises dans le plan méridien de l'origine; elle fait l'angle φ au-dessus du plan, et c'est la direction la plus avantageuse pour faire remonter le corps suivant la ligne de plus grande pente.

Si, dans une direction donnée, on applique une force re-

présentée par une droite qui se termine à l'intérieur du cône, il n'y a pas mouvement; car, pour l'extrémité de cette droite, le premier membre de l'équation (1) est moindre que le second; la composante tangentielle est $< Nf$. Si l'extrémité de la droite qui représente la force est extérieure au cône, il y aura mouvement dans le sens de la droite dont les projections sont X et Y.

Lorsqu'on donne la grandeur de F et qu'on cherche sa direction, on voit que cette force doit se trouver sur un cône ayant O pour sommet et pour directrice l'intersection du cône étudié précédemment avec une sphère dont le centre est O, et le rayon égal à la droite qui représente F.

17. *On donne un paraboloïde $xy = az$ rapporté à trois axes rectangulaires, l'axe des z étant vertical; un poids* P *est placé sur sa surface dépolie, et repoussé de l'axe des z par une force horizontale, proportionnelle à la distance du point à l'axe, et qui serait égale à* P *pour la distance a; lieu des points où* P *est près de glisser.*

La force qui sollicite le point a pour composantes $\frac{Px}{a}$, $\frac{Py}{a}$, $-P$; il suffit d'écrire qu'elle fait avec la normale en x, y, z l'angle de frottement

$$\cos\varphi = \frac{2P\frac{xy}{a} + aP}{\sqrt{\left(\frac{P^2x^2}{a^2} + \frac{P^2y^2}{b^2} + P^2\right)(y^2 + x^2 + a^2)}}$$

$$= \frac{2xy + a^2}{x^2 + y^2 + a^2} = \frac{2az + a^2}{x^2 + y^2 + a^2}.$$

La courbe cherchée est donc à l'intersection du paraboloïde équilatère avec un paraboloïde de révolution ayant même axe : c'est une courbe gauche à branches infinies.

EXERCICES.

Un poids placé sur un plan incliné dépoli est près de remonter suivant une ligne de pente sous l'action d'une force horizontale donnée : calculer l'angle du plan avec l'horizon.

Déterminer sur un ellipsoïde à axe vertical la zone sur laquelle on puisse poser un point pesant sans qu'il glisse (cette zone est quarrable).

Un poids est posé sur un plan dépoli et tiré par un fil situé dans le même plan vertical que la ligne de pente du point donné; le fil passe sur une très-petite poulie et soutient à sa seconde extrémité un second poids qui pend librement : figure d'équilibre.

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

18. Quand on a un système de forces parallèles, mais qui n'agissent pas toutes dans le même sens, on pourra les traiter de la même manière dans les calculs, à condition de donner le signe + à celles qui ont une direction, le signe — à celles de direction opposée. Il y a généralement une résultante parallèle aux forces données, égale à leur somme, et dont le moment par rapport à un plan quelconque est égal à la somme des moments des composantes; désignons celles-ci par P, P′,... et les coordonnées de leur point d'application par x, y, z; x', y', z';..., nous aurons, pour déterminer la grandeur de la résultante et les coordonnées de son point d'application,

$$(1) \quad R = \Sigma P, \quad x_1 = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P};$$

le point x_1, y_1, z_1, centre des forces parallèles, est indépendant de leur direction.

Lorsque $\Sigma P = 0$, il ne s'ensuit pas qu'il y ait équilibre; il faut encore que les centres des forces parallèles qui agissent dans un sens et dans l'autre soient sur une droite parallèle à leur direction commune. Soit

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

une droite à laquelle ces forces sont parallèles; les condi-

tions d'équilibre seront

$$(2) \qquad \Sigma P = 0, \quad \frac{\Sigma Px}{\alpha} = \frac{\Sigma Py}{\beta} = \frac{\Sigma Pz}{\gamma}.$$

Si la première condition est seule satisfaite, on a un couple.

Pour que l'équilibre ait lieu quelle que soit la direction (α, β, γ), il faut que ΣPx, ΣPy, ΣPz soient nuls; quand ces conditions sont remplies, si l'on change non pas la direction des forces, mais l'orientation du corps où elles sont appliquées, il y aura encore équilibre, et le système est dit *astatique*.

Il peut arriver que les forces parallèles soient contenues dans un même plan

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

les deux dernières équations (2) se réduisent à une seule, et il est bien remarquable, dit M. Duhamel (*Sciences de raisonnement*), qu'elle ne dépende pas de D. Pour le voir, il suffit de former la fraction suivante, égale aux trois fractions (2) :

$$\frac{A\Sigma Px + B\Sigma Py + C\Sigma Pz}{A\alpha + B\beta + C\gamma};$$

le dénominateur est nul à cause du parallélisme des forces et du plan; il en est de même du numérateur, parce qu'on peut l'écrire

$$\Sigma P(Ax + By + Cz) = -D\Sigma P = 0.$$

Les trois équations (2) se réduisent à deux conditions et une identité.

19. Les propositions établies pour la composition des forces parallèles peuvent conduire à des théorèmes pure-

ment géométriques, et c'est un des cas nombreux et intéressants où deux parties différentes de la science se rapprochent et se prêtent un mutuel appui.

Appliquons aux sommets A, B, C d'un triangle trois forces P, Q, R égales et parallèles; on peut trouver le centre O des forces parallèles en remplaçant Q et R par une force 2P appliquée au milieu de BC, puis composant celle-ci avec P; O sera donc sur la médiane issue de A, et aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur à partir de A; mais il serait aussi bien sur une autre médiane; donc les trois médianes se coupent comme l'on sait.

De même appliquons aux quatre sommets d'un tétraèdre quatre forces égales et parallèles, et cherchons leur résultante en composant d'abord trois d'entre elles en une seule, puis celle-ci avec la quatrième; ou bien, en composant les deux premières, puis la troisième et la quatrième, et enfin ces deux résultantes partielles, on arrive aux théorèmes connus de Géométrie. Dans un tétraèdre, les droites menées de chaque sommet au centre de gravité de la face opposée se coupent en un point qui les divise dans le rapport de 3 à 1 : ce point est au milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées.

Soient encore appliquées aux sommets A, B, C d'un triangle des forces parallèles $P = \tang A$, $Q = \tang B$, $R = \tang C$; deux d'entre elles ont une résultante appliquée au pied de la hauteur tombant sur le côté dont elles tirent les extrémités; donc la résultante des trois forces est appliquée au point de rencontre H des hauteurs, et égale à

$$F = \tang A + \tang B + \tang C = \tang A \tang B \tang C,$$

d'après un calcul de Trigonométrie bien connu. Considérons maintenant trois autres forces appliquées aux mêmes

de ces forces parallèles; si l'on considère les forces $OA_1 \times P_1$, $OA_2 \times P_2$, ... *dirigées suivant* OA_1, OA_2, ..., *leur résultante sera dirigée suivant* OG *et égale à* $OG(P_1 + P_2 + \ldots)$.

En effet, considérons trois plans coordonnés rectangulaires passant en O, et écrivons que la somme des moments des forces parallèles par rapport à chacun de ces plans est égale au moment de leur résultante; on a trois équations de la forme

$$(\alpha) \quad \Sigma P \times OA \cos AOX = (P_1 + P_2 + \ldots) OG \cos GOX \ldots.$$

Ces équations expriment précisément que les forces concourantes $P \times OA$ ont pour résultante $OG \Sigma P$. En particulier, si le point O était en G, les forces $P.OA$ se feraient équilibre.

Remarque. — Si l'on ajoute les trois équations (α), après les avoir élevées au carré, on trouve la relation numérique

$$(\beta) \quad \overline{OG}^2 (\Sigma P)^2 = \Sigma P^2 \overline{OA}^2 + 2 \Sigma P_1 P_2 OA_1 \times OA_2 \cos A_1 OA_2.$$

Si au second membre on ajoute et l'on retranche

$$\Sigma \left(\overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2\right) P_1 P_2,$$

on a une relation utile dans l'étude du mouvement des systèmes :

$$\overline{OG}^2 (\Sigma P)^2 = \Sigma P \Sigma P \overline{OA}^2 - 2 \Sigma P_1 P_2 \times \overline{A_1 A_2}^2.$$

22. *Aux quatre sommets d'un tétraèdre* OABC *on applique des forces parallèles proportionnelles chacune à l'aire de la face opposée; déterminer le point d'application* G *de leur résultante.*

Soient α, β, γ, ω les aires des quatre faces; x_0, x_1, x_2,

x_3, x les distances de O, A, B, C, G à un plan (P); on aura

$$x = \frac{\omega x_0 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3}{\omega + \alpha + \beta + \gamma}.$$

Faisons coïncider le plan (P) avec ABC, x_1, x_2, x_3 seront nuls, ωx_0 deviendra six fois le volume du tétraèdre, et $x = 6V : (\omega + \alpha + \beta + \gamma)$ sera le rayon de la sphère inscrite; le centre des forces parallèles n'est autre que le centre de cette sphère, et la valeur générale de x permet de déterminer les coordonnées de ce point géométrique.

La formule (β) du paragraphe précédent donne, pour la distance du centre de la sphère inscrite à un sommet quelconque O,

$$4\overline{OG}^2 = \frac{\overline{OA}^2\ \overline{OB}^2\ \overline{OC}^2}{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}(\Sigma \sin^2 BOC + 2\Sigma \sin AOB \sin AOC \cos BOC).$$

On trouve par la même méthode le centre de trois forces parallèles appliquées aux sommets d'un triangle et proportionnelles aux côtés opposés.

23. *Un vase hémisphérique très-mince, de poids* R, *repose par sa partie convexe sur un plan horizontal et porte deux poids* P, Q *aux extrémités* A, B *de deux rayons perpendiculaires : position d'équilibre.*

Les poids P, Q se composent en un poids P + Q appliqué en un point G facile à déterminer sur AB; le poids du vase est appliqué à son centre de gravité, au milieu M du rayon perpendiculaire à la base; la résultante des trois forces devant être détruite par la réaction du plan fixe sera dirigée suivant le rayon OH qui passe au point d'appui, le plan MOG sera vertical, en sorte que OG sera la ligne de plus grande pente de OAB. Soit α l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal; les moments de R et de P + Q par rap-

port au plan passant par OH et perpendiculaire à MOG se détruisent; donc

$$OM \times R \sin\alpha - OG(P+Q)\cos\alpha = 0, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{OG}{OM}\,\frac{P+Q}{R}.$$

D'ailleurs, par la formule (β),

$$\overline{OG}^2 (P+Q)^2 = \overline{OA}^2 \times P^2 + \overline{OB}^2 \times Q^2;$$

si l'on fait $OA = OB = a$, $OM = \frac{a}{2}$, il vient

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2}{R}\sqrt{P^2+Q^2}.$$

24. Quand on considère un corps parfaitement rigide s'appuyant sur un plan par plus de trois points, la Statique laisse indéterminées les pressions aux points d'appui; cette anomalie disparaît si l'on tient compte des déformations légères éprouvées par le solide et des actions moléculaires qui en résultent : il y a des cas simples où le problème peut se résoudre aisément; en voici un exemple :

Une table horizontale qui reste parfaitement plane est soutenue par n pieds verticaux AA′, BB′,... *d'égale longueur, reposant sur un plan horizontal rigide; la table est chargée de poids qui, avec son propre poids, ont une résultante verticale* P *appliquée en un point connu : trouver les charges des appuis, en admettant qu'ils se raccourcissent de quantités très-petites proportionnelles à leurs charges respectives.*

Prenons pour plan des xy le plan de la table quand les pieds sont dans leur longueur naturelle, et pour axe des z une verticale quelconque dirigée de haut en bas. Je détermine la position des points d'appui par leurs coordonnées primitives $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. Quand on charge la table et qu'on laisse les pieds se raccourcir, les x et les y des points

d'appui ne changent pas sensiblement, mais leurs ordonnées deviennent $z_1, \ldots, z_n$. Soient $Q_1, Q_2, \ldots$ les pressions qu'ils supportent; on a, par hypothèse,

$$Q_1 = \lambda z_1, \quad Q_2 = \lambda z_2, \ldots;$$

mais, par hypothèse, la table reste plane et coïncide avec un plan $z = ax + by + c$; on aura donc

$$Q_i = \lambda(ax_i + by_i + c).$$

Soit x, y le point où est appliquée la force P; elle est égale à la somme des Q_i, et son moment par rapport à OXZ et OYZ est la somme des moments de ces réactions; donc

$$P = \lambda\Sigma(ax_i + by_i + c) = a\lambda\Sigma x_i + b\lambda\Sigma y_i + n\lambda c,$$

$$Px = a\lambda\Sigma x_i^2 + b\lambda\Sigma x_i y_i + c\lambda\Sigma x_i,$$

$$Py = a\lambda\Sigma x_i y_i + b\lambda\Sigma y_i^2 + c\lambda\Sigma y_i.$$

Nous avons trois équations pour déterminer a, b, c, et par suite les Q_i. On peut choisir l'origine et les axes, de manière à annuler Σx_i, Σy_i, $\Sigma x_i y_i$, l'origine étant le centre des moyennes distances des points A, B,..., et les axes étant ce qu'on appelle les *axes principaux du système*. Il vient alors

$$P = n\lambda c, \quad Px = a\lambda\Sigma x_i^2, \quad Py = b\lambda\Sigma y_i^2.$$

$$Q_i = P\left(\frac{xx_i}{\Sigma x_i^2} + \frac{yy_i}{\Sigma y_i^2} + \frac{1}{n}\right).$$

S'il s'agit d'une table rectangulaire soutenue aux coins et dont les côtés soient $2a$, $2b$, les axes seront les médianes, et l'on aura

$$Q_1 = \frac{P}{4}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1\right), \quad Q_2 = \frac{P}{4}\left(-\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1\right),$$

$$Q_3 = \frac{P}{4}\left(-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1\right), \quad Q_4 = \frac{P}{4}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1\right).$$

CENTRES DE GRAVITÉ.

25. Le centre de gravité d'un corps est le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur sur ses diverses parties, ces actions étant considérées comme parallèles. Quand il s'agit d'un corps continu, on le décompose en éléments infiniment petits, qu'on suppose homogènes; et, si dp est le poids de l'un d'eux, on a, pour les coordonnées du centre de gravité,

$$x_1 = \frac{\int x\,dp}{\int dp}, \quad y_1 = \frac{\int y\,dp}{\int dp}, \quad z_1 = \frac{\int z\,dp}{\int dp};$$

les intégrales s'étendent à tout le corps, qui peut se réduire à une surface ou à une ligne dont les éléments seraient doués d'un poids spécifique. Le poids d'un corps est proportionnel à sa masse; donc, m désignant la masse d'un système, son centre de gravité a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{1}{m}\int x\,dm, \quad y_1 = \frac{1}{m}\int y\,dm, \quad z_1 = \frac{1}{m}\int z\,dm.$$

Étant donné un système quelconque, même soustrait à l'action de la pesanteur, même non solide, ces équations définissent un point bien déterminé, qui n'a plus de rapport avec la pesanteur, mais que l'on continue d'appeler *centre de gravité du système,* et qui a des propriétés importantes.

Il suffit de rappeler les simplifications qu'apporte dans la

recherche du centre de gravité l'existence de lignes ou de surfaces diamétrales.

Centre de gravité des lignes.

26. *Centre de gravité d'un arc homogène de chaînette commençant au sommet.*

La chaînette a pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

y part de la valeur a pour $x = 0$, et croît indéfiniment. La chaînette étant homogène, la masse d'un de ses éléments peut être mesurée par sa longueur ; alors

$$m = \int ds = \int_0^x \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\frac{dy}{dx},$$

$$\int x\,dm = \int x\,ds = \frac{ax}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$- \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + a^2 = sx - a(y - a),$$

$$\int y\,dm = \int y\,ds = \frac{a^2}{8}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) + \frac{ax}{2} = \frac{1}{2}sy + \frac{1}{2}ax;$$

d'où

$$x_1 = x - (y - a)\frac{dx}{dy}, \quad y_1 = \frac{1}{2}\left(y + x\frac{dx}{dy}\right).$$

L'abscisse du point cherché est la même que celle de l'intersection de la tangente au sommet et de la tangente à l'extrémité de l'arc ; l'ordonnée est la moitié de l'ordonnée à l'origine de la normale menée à l'extrémité de l'arc.

27. *Centre de gravité d'un arc de cardioïde*

$$r = a(1 + \cos\theta).$$

On a

$$ds = d\theta\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)} = 2a\cos\frac{1}{2}\theta\, d\theta,$$

$$s = 4a\left(\sin\frac{1}{2}\theta - \sin\frac{1}{2}\theta_0\right),$$

$$\int x\,ds = \int_{\theta_0}^{\theta} r\cos\theta\, ds$$

$$= a^2\int_{\theta_0}^{\theta}\left(2\cos\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{5\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= a^2\left(4\sin\frac{\theta}{2} - 4\sin\frac{\theta_0}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{3\theta_0}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\theta}{2} - \frac{1}{5}\sin\frac{5\theta_0}{2}\right)$$

$$\int y\,ds = \int r\sin\theta\, ds = 8a^2\int\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{16}{5}a^2\left(\cos^5\frac{\theta_0}{2} - \cos^5\frac{\theta}{2}\right).$$

Il est aisé d'en tirer x_1 et y_1; pour la moitié de la courbe, de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$, on a

$$s = 4a, \quad x_1 = y_1 = \frac{4}{5}a.$$

28. *Centre de gravité d'un arc d'hélice ordinaire commençant sur le plan des xy, et où la densité est représentée par e^{-cz}.*

Soient a le rayon du cylindre sur lequel est l'hélice, $2\pi h$ le pas; on a, pour chaque point de la courbe,

$$x = a\cos\frac{z}{h}, \quad y = a\sin\frac{z}{h}.$$

La masse de l'arc considéré est

$$m = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h}\int_0^z e^{-cz}dz = \sqrt{a^2+h^2}\,\frac{1-e^{-cz}}{ch},$$

$$\int x\,dm = \frac{a}{h}\sqrt{a^2+h^2}\int_0^z e^{-cz}\cos\frac{z}{h}\,dz$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+h^2}}{1+c^2h^2}\left[e^{-cz}\left(\sin\frac{z}{h} - ch\cos\frac{z}{h}\right) + ch\right],$$

$$\int y\,dm = a\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{1+c^2h^2}\left[1 - e^{-cz}\left(\cos\frac{z}{h} + ch\sin\frac{z}{h}\right)\right],$$

$$\int z\,dm = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{h}\int_0^z ze^{-cz}dz = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{c^2h}\left[1 - (1+cz)e^{-cz}\right].$$

On aura immédiatement x_1, y_1, z_1. Si l'arc est prolongé indéfiniment, les résultats se simplifient et deviennent

$$m = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{ch}, \quad x_1 = \frac{ac^2h^2}{1+c^2h^2}, \quad y_1 = \frac{ach}{1+c^2h^2}, \quad z_1 = \frac{1}{c}.$$

29. *Déterminer une courbe plane passant par l'origine, et telle que la densité soit une fonction donnée $f(s)$ de l'arc, et que l'ordonnée du centre de gravité d'un arc, compté à partir de l'origine, soit une autre fonction donnée $\varphi(s)$. Cas où $f(s) = as^m$, $\varphi(s) = \alpha s^n$.*

(Agrégation, 1871.)

On voit immédiatement que la courbe satisfait à l'équation

$$\varphi(s)\int_0^s f(s)\,ds = \int_0^s yf(s)\,ds.$$

Différentions;

$$\varphi(s)f(s) + \varphi'(s)\int_0^s f(s)\,ds = yf(s);$$

y est dès lors une fonction connue de s

(1) $$y = \psi(s),$$

donc

(2) $$dx = ds\sqrt{1-\psi'^2(s)}.$$

Si l'on peut intégrer, il n'y aura plus qu'à éliminer s à l'aide de l'équation (1) pour avoir l'équation finie de la courbe. Quelquefois on peut résoudre l'équation (1) par rapport à s,

$$s = \varpi(y),$$

et il suffit d'intégrer

$$(3) \qquad dx = dy\sqrt{\varpi'^2(y) - 1}.$$

Dans le cas particulier proposé, l'équation (1) devient

$$y = \frac{m+\mu+1}{m+1}\alpha s^{\mu} = \frac{c}{\mu}s^{\mu},$$

en prenant, pour abréger, la nouvelle constante c. L'équation (2) donne alors

$$dx = ds\sqrt{1 - c^2 s^{2\mu-2}}.$$

Cette différentielle binôme pourra s'intégrer quand $\frac{1}{2\mu-2}$ ou $\frac{1}{2\mu-2} + \frac{1}{2}$ seront des nombres entiers; ces deux conditions reviennent à dire que μ doit être de la forme $\frac{n+1}{n}$, n étant entier. Le second procédé ne donne pas d'autre cas d'intégrabilité.

Soit $n = 1$; alors $\mu = 2$, $y = \frac{c}{2}s^2$. Nous appliquerons l'équation (3)

$$dx = dy\sqrt{\frac{1-2cy}{2cy}}.$$

C'est une cycloïde ayant son sommet à l'origine et touchant l'axe des x; le rayon du cercle générateur est $\frac{1}{2c}$.

Soit $n = 2$, $\mu = \frac{3}{2}$; nos formules deviennent

$$y = \frac{2}{3}cs^{\frac{3}{2}}, \quad dx = ds\sqrt{1 - c^2 s}.$$

Intégrant,

$$x = \frac{2}{3c^2}\left[1 - (1 - c^2 s)^{\frac{3}{2}}\right], \quad \left(x - \frac{2}{3c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3c^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

C'est l'hypocycloïde à trois rebroussements, enveloppe d'une droite de longueur $\frac{2}{3c^2}$ qui glisse sur l'axe des x et la droite $x = \frac{2}{3c^2}$.

Pour $n = \infty$, $\mu = 1$, on a une droite.

On ne peut donner à n de valeurs négatives, car μ serait < 1, et $\frac{dy}{ds}$ infini pour $s = 0$, ce qui est impossible.

Centre de gravité des surfaces.

30. *Centre de gravité de l'aire comprise entre un arc d'ellipse, le diamètre qui aboutit à une extrémité de l'arc et la corde conjuguée passant par l'autre extrémité.*

En prenant pour axe des x le diamètre donné, pour axe des y la tangente à son extrémité, l'équation de l'ellipse est de la forme

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2 x^2}{a^2}.$$

On décompose l'aire donnée en une infinité de bandes élémentaires parallèles à l'axe des y; la masse de chacune peut être représentée par $y\,dx$, et son centre de gravité a pour coordonnées x et $\frac{1}{2}y$. L'aire considérée est, θ désignant l'angle des axes,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^h \sqrt{2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2}\,dx \sin\theta \\ &= \frac{b\sin\theta}{2a}\left[a^2 \operatorname{arc\,cos}\frac{a-h}{a} - (a-h)\sqrt{2ah - h^2}\right]. \end{aligned}$$

Si x_1, y_1 sont les coordonnées du centre de gravité,

$$Ax_1 = \int_0^h x \sin\theta\, dx \sqrt{2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2}$$

$$= \frac{b\sin\theta}{2a}\left[a^3 \operatorname{arc\,cos}\frac{a-h}{a} - \frac{2}{3}(2ah-h^2)^{\frac{3}{2}} - a(a-h)\sqrt{2ah-h^2}\right],$$

$$Ay_1 = \int_0^h \frac{1}{2}\left(2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)\sin\theta\, dx = \frac{b^2\sin\theta}{2a^2}\left(ah^2 - \frac{h^3}{3}\right).$$

On en déduit pour x_1, y_1 des valeurs assez compliquées, mais qui s'adaptent, en se simplifiant, à plusieurs cas particuliers; ainsi, pour le quart d'ellipse, on fera $h = a$, et l'on aura

$$A = \frac{\pi ab}{4}, \quad x_1 = a - \frac{4a}{3\pi}, \quad y_1 = \frac{4b}{3\pi}.$$

Si l'on veut passer au cas de la parabole, on fera $b^2 = ap$, on développera suivant les puissances négatives de a, qu'on fera ensuite infini; mais il est bon de remplacer $\operatorname{arc\,cos}\frac{a-h}{a}$ par $2\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{h}{2a}}$; on a

$$A = \frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{\frac{p}{a}}\left[2a^2\operatorname{arc\,sin}\sqrt{\frac{h}{2a}} - (a-h)\sqrt{2ah}\left(1-\frac{h}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{ph}{2}}\sin\theta\left[a\left(1+\frac{h}{12a}+\ldots\right) - (a-h)\left(1-\frac{1}{4}\frac{h}{a}+\ldots\right)\right],$$

et ainsi pour les autres; à la limite, en faisant $\sqrt{2ph} = k$,

$$A = \frac{2}{3}hk\sin\theta, \quad x_1 = \frac{3}{5}h, \quad y_1 = \frac{3}{8}k.$$

31. *Centre de gravité de l'aire comprise à l'intérieur*

d'une parabole et d'un cercle représentés par les équations

$$y^2 = 16ax, \quad x^2 + y^2 - 10ay = 0.$$

Le cercle passe au sommet de la parabole et touche son axe; il rencontre la courbe en un point dont l'abscisse est $4a$, et le segment considéré est biconvexe. Pour évaluer les intégrales qui servent à déterminer le centre de gravité de l'aire, le mieux serait de la décomposer en bandes infiniment étroites parallèles à OX; mais, pour donner un exemple des précautions à prendre dans le calcul des intégrales multiples où l'expression analytique des limites change, je décomposerai en éléments $dx\,dy$, et j'intégrerai d'abord par rapport à y. J'ai une expression de la forme

$$A = \int\int dx\,dy = \int (y' - y'')dx;$$

x ne varie pas seulement de zéro à $4a$, mais de zéro à $5a$, parce que le rayon du cercle est $5a$, et l'arc qui limite le contour est $>$ un quadrant. Dans tout l'intervalle, on aura

$$y'' = 5a - \sqrt{25a^2 - x^2};$$

mais y' sera $\sqrt{16ax}$ quand x ira de zéro à $4a$, et $5a + \sqrt{25a^2 - x^2}$ quand x est compris entre $4a$ et $5a$; donc

$$A = \int_0^{4a} (4\sqrt{ax} - 5a + \sqrt{25a^2 - x^2})dx + \int_{4a}^{5a} 2\sqrt{25a^2 - x^2}dx,$$

$$A = \frac{25}{2}a^2 \text{ arc sin } \frac{4}{5} - \frac{14}{3}a^2,$$

en prenant l'arc sinus terminé dans le deuxième quadrant, $126^\circ 52' 12''$, ou, en parties du rayon, 2,2143. L'intégrale $\int x\,dx\,dy$ se calcule de même et donne

$$A x_1 = \frac{928}{15}a^3.$$

Enfin

$$Ay_1 = \int\int y\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int (y'^2 - y''^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4a} (16ax - 50a^2 + x^2 + 10a\sqrt{25a^2 - x^2})\,dx$$

$$+ 10a\int_{4a}^{5a} dx\sqrt{25a^2 - x^2},$$

$$Ay_1 = \frac{125}{2}a^3 \arcsin\frac{4}{5} - \frac{166}{3}a^3.$$

L'arc sinus est le même que dans la première intégrale. On a sans peine x_1 et y_1.

32. *Centre de gravité d'une demi-boucle de la lemniscate de Bernoulli*

$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}.$$

On fait varier θ de zéro à $\frac{\pi}{4}$; alors $r = 0$, et l'aire de la courbe est

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}a^2,$$

$$Ax_1 = \int\int r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\cos\theta(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta.$$

On intègre en posant $u = \sqrt{2}\sin\theta$, d'où

$$\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta = du, \quad \cos 2\theta = 1 - u^2,$$

$$Ax_1 = \frac{2}{3}a^2\int_0^1 (1 - u^2)^{\frac{3}{2}}\,du = \frac{3}{16}\pi \times \frac{2}{3}a^3 = \frac{\pi a^3}{8},$$

$$Ay_1 = \int\int r^2\sin\theta\,dr\,d\theta = \frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\sin\theta(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta.$$

Posons $\sqrt{2}\cos\theta = u$, $\sqrt{2}\sin\theta\, d\theta = -du$, $\cos 2\theta = u^2 - 1$;

$$Ay_1 = \frac{2}{3}a^3\int_1^{\sqrt{2}}(u^2-1)^{\frac{3}{2}}du = a^3\left[\frac{1}{4}L(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{3}\sqrt{2}\right].$$

On en conclut

$$x_1 = \frac{\pi}{4}a, \quad y_1 = a\left[\frac{1}{2}L(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right].$$

33. *Déterminer une courbe plane telle que le centre de gravité de l'aire comprise entre les axes, la courbe et l'ordonnée $x = h$ ait pour abscisse $x_1 = \frac{ah}{a+h}$.*

La courbe cherchée satisfait à l'équation

$$(1) \qquad \frac{ax}{a+x}\int_0^x y\,dx = \int_0^x xy\,dx.$$

Différentions et réduisons;

$$\int_0^x y\,dx = \frac{a+x}{a^2}x^2y;$$

Différentions encore;

$$a^2y = (2ax + 3x^2)y + x^2(a+x)\frac{dy}{dx},$$

d'où

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2ax - 3x^2}{x^2(a+x)} = \frac{a-3x}{x^2}.$$

L'intégration donne évidemment

$$y = \frac{c}{x^3}e^{-\frac{a}{x}}.$$

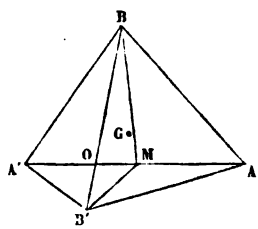
La courbe présente un point d'arrêt à l'origine; du côté des x positifs, elle part de l'origine tangentiellement à OX, s'élève au-dessus de cet axe, et lui devient asymptote pour

x infini. Quand x décroît de zéro à $-\infty$, y croît de $-\infty$ à zéro. De ce côté de l'axe des x, il était impossible *a priori* de satisfaire à l'énoncé du problème; mais il n'y a pas contradiction avec nos calculs, car, si x est < 0, la valeur trouvée pour y rend infinies les intégrales de l'équation (1), et celle-ci devient illusoire.

34. *Établir la relation qui existe entre les aires des quatre triangles ayant pour bases les côtés d'un quadrilatère et pour sommet commun le centre de gravité du quadrilatère.*

Prenons (*fig.* 2) pour axes les diagonales AA′, BB′, et faisons $OA = a$, $OA' = a'$, $OB = b$, $OB' = b'$, $AOB = \theta$. Joignons B, B′ au milieu M de AA′; il est clair que le centre

Fig. 2.



de gravité G se trouve sur une parallèle à BB′ qui coupe MB et MB′ au tiers de leur longueur à partir de M; et, comme $OM = \frac{1}{2}(a - a')$, l'abscisse de G est $\frac{1}{3}(a - a')$; par analogie, son ordonnée sera $\frac{1}{3}(b - b')$. Maintenant l'aire du triangle GAB est

$$\alpha = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3}(a-a') & \frac{1}{3}(b-b') \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\sin\theta(ab + ab' + ba').$$

L'aire de GBA′ se calcule de même, A′ ayant pour coordonnées $-a$, o,

$$\mathrm{GBA}' = \beta = \frac{1}{6}\sin\theta(ab + ba' + a'b');$$

de même

$$\mathrm{GA'B'} = \gamma = \frac{1}{6}\sin\theta(ab' + ba' + a'b'),$$

$$\mathrm{GB'A} = \delta = \frac{1}{6}\sin\theta(ab + ab' + a'b').$$

On tire de ces équations, en posant $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \mathrm{S}$,

$$a'b' = \frac{2}{\sin\theta}(\mathrm{S} - 3\alpha), \quad ab = \frac{2}{\sin\theta}(\mathrm{S} - 3\gamma),$$

$$ab' = \frac{2}{\sin\theta}(\mathrm{S} - 3\beta), \quad a'b = \frac{2}{\sin\theta}(\mathrm{S} - 3\delta),$$

Il suffit d'égaler le produit des deux premières et des deux dernières quantités; on a, en divisant par $12\,\mathrm{cosec}^2\theta$,

$$3\alpha\gamma - \mathrm{S}(\alpha + \gamma) = 3\beta\delta - \mathrm{S}(\beta + \delta)$$

ou

$$\alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma = \beta^2 + \delta^2 - \beta\delta.$$

Les quatre aires ne peuvent donc être prises arbitrairement.

35. *Centre de gravité de la portion de surface du paraboloïde*

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b},$$

qui se projette sur le plan des xy entre les parties positives des axes et l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0. \quad (\text{Fuhrmann.})$$

Le long de la courbe à double courbure qui limite l'aire

proposée, la normale au paraboloïde fait un angle constant avec l'axe des z (licence, 1874); on calcule les intégrales du problème en remplaçant x, y par les variables

$$x = au\sin\varphi, \quad y = bu\cos\varphi;$$

on a tous les points situés à l'intérieur du quart d'ellipse donné en faisant varier u de zéro à 1, φ de zéro à $\frac{\pi}{2}$; on découpe le plan en petits parallélogrammes qui ont pour aire, d'après les formules connues pour le changement de variables dans les intégrales multiples,

$$d\sigma = \left(\frac{dx}{d\varphi}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{d\varphi}\right) du\, d\varphi = abu\, du\, d\varphi.$$

La normale au paraboloïde en x, y fait avec l'axe un angle γ tel que

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1 + u^2}.$$

On peut calculer l'aire courbe et ses moments par rapport aux plans coordonnés :

$$A = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 u\, du\, d\varphi\sqrt{1+u^2} = \frac{\pi ab}{6}(2\sqrt{2} - 1),$$

$$Ax_1 = a^2 b\int\int u^2 du\, d\varphi \sin\varphi\sqrt{1+u^2} = \frac{a^2 b}{8}[3\sqrt{2} - L(1+\sqrt{2})],$$

$$Ay_1 = ab^2\int\int u^2 du\, d\varphi \cos\varphi\sqrt{1+u^2} = \frac{ab^2}{8}[3\sqrt{2} - L(1+\sqrt{2})],$$

$$Az_1 = \frac{1}{2}ab\int\int u^3(a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi)du\, d\varphi\sqrt{1+u^2}$$

$$= \frac{\pi ab}{60}(a+b)(1+\sqrt{2}).$$

36. *La distance du centre de gravité de l'aire d'une figure sphérique à un plan est quatrième proportionnelle à l'aire de la figure, à sa projection sur le plan et au rayon* R *de la sphère.*

En effet, prenons le plan de projection pour OXY, le centre pour origine; on a

$$Az_1 = \int\int z\frac{R}{z}\,dx\,dy = R \text{ proj. de } A.$$

On en déduit que la distance du centre de gravité d'un triangle sphérique ABC au plan du grand cercle BC est

$$\frac{R}{2}\,\frac{a - b\cos C - c\cos B}{A + B + C - \pi};$$

cette formule et les deux autres analogues font connaître le point cherché.

Considérons une demi-boucle de la surface de Viviani

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 - Rx = 0;$$

son aire est $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R^2$, et ses projections sur les trois plans coordonnés sont, comme on le voit sans peine,

$$\frac{1}{3}R^2, \quad \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)R^2, \quad \frac{1}{8}\pi R^2;$$

on en déduit

$$x_1 = \frac{2R}{3(\pi - 2)}, \quad y_1 = \frac{(3\pi - 8)R}{6(\pi - 2)}, \quad z_1 = \frac{\pi R}{4(\pi - 2)}.$$

Centre de gravité des solides.

37. *Centre de gravité du volume homogène engendré par la révolution de la boucle d'une strophoïde autour de l'axe.*

Prenons l'axe pour axe des x, et le point double pour origine; l'équation de la courbe est

$$y^2 = x^2 \frac{a-x}{a+x}.$$

Le volume est

$$V = \int_0^a \pi x^2 \frac{a-x}{a+x} dx$$
$$= \pi \int_0^a \left(-x^2 + 2ax - 2a^2 + \frac{2a^3}{a+x}\right) dx = 2\pi a^3 \left(L2 - \frac{2}{3}\right).$$

Le centre de gravité est sur l'axe des x, et, x_1 étant son abscisse, on a

$$Vx_1 = \int_0^a \pi x^3 \frac{a-x}{a+x} dx = \pi a^4 \left(\frac{17}{12} - 2L2\right),$$

d'où

$$x_1 = a \frac{17 - 24L2}{24L2 - 16} = a \frac{0,365}{0,636} = 0,57a.$$

38. *Centre de gravité du volume engendré par le secteur parabolique compris entre deux rayons vecteurs et tournant autour de l'axe de la parabole.*

Le rayon vecteur correspondant à l'angle θ est

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\theta},$$

et, si α et β sont les angles polaires des rayons qui limitent le secteur, on a

$$V = 2\pi \int_\alpha^\beta \int_0^\rho r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr = \frac{1}{3} p^3 \pi \left[\frac{1}{(1+\cos\beta)^2} - \frac{1}{(1+\cos\alpha)^2}\right],$$
$$Vx_1 = 2\pi \int_\alpha^\beta \int_0^\rho r^3 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, dr$$
$$= \frac{1}{2} \pi p^4 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(1+\cos\theta)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(1+\cos\theta)^3}\right]_\alpha^\beta;$$

d'où

$$x_1 = \frac{1}{4} p \frac{3(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(\cos\alpha+\cos\beta) - 2(\cos\alpha-\cos\beta)^2}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(2+\cos\alpha+\cos\beta)}.$$

39. *Centre de gravité du volume compris entre les trois plans de coordonnées rectangulaires et les surfaces des cylindres elliptiques*

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La surfacc courbe qui limite l'espace compris à l'intérieur des cylindres au-dessus du plan xy est la voûte d'arête, et les lignes d'intersection des deux cylindres sont contenues dans les plans $ay = \pm bx$. Nous ne prenons que le quart du volume compris sous la voûte; des plans horizontaux y déterminent des sections rectangulaires dont les côtés ont pour longueur

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2}, \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}.$$

On aura de suite le volume V et l'ordonnée z du centre de gravité

$$V = \int_0^c \frac{ab}{c^2}(c^2 - z^2)dz = \frac{2}{3}abc,$$

$$Vz_1 = \int \frac{ab}{c^2}(c^2 - z^2)z\,dz = \frac{1}{4}abc^2, \quad z_1 = \frac{3}{8}c.$$

Pour prendre les moments par rapport au plan des yz, il faut diviser le volume en petits prismes de base $dx\,dy$, parallèles à OZ; mais la hauteur de ces prismes n'a pas la même expression aux divers points du plan xy; pour les points compris entre l'axe des x et les droites $x = a$ et $ay = bx$, le volume des petits prismes est limité au second cylindre parallèle à OY; au contraire, c'est au premier cy-

lindre que se terminent les parallèles menées à OZ par des points compris entre l'axe des y, les droites $y = b$ et $ay = bx$. On partage l'intégrale définie en deux

$$Vx_1 = \int_0^a dx \int_0^{\frac{bx}{a}} dy \frac{cx}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \int_0^b dy \int_0^{\frac{ay}{b}} dx \frac{cx}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Pour la première, on intègre d'abord par rapport à y, et dans la seconde c'est par x qu'on commence, et l'on trouve, en écrivant y_1 par analogie,

$$Vx_1 = \frac{3\pi a^2 bc}{32}, \quad x_1 = \frac{9}{64}\pi a, \quad y_1 = \frac{9}{64}\pi b.$$

40. *Centre de gravité du volume compris entre le plan des xy, le plan des zx, la sphère de rayon a dont le centre est à l'origine, et le cylindre*

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Le volume ainsi défini et la surface sphérique qui le limite ont été étudiés par Viviani. Prenons des coordonnées semi-polaires r, θ et z ; sur la base du cylindre, on a $r = a\cos\theta$, et les formules ordinaires conduisent à des quadratures qui ne présentent pas de difficulté :

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\,dr \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{3\pi - 4}{18} a^3,$$

$$Vx_1 = \int\int r^2 \cos\theta \sqrt{a^2 - r^2}\, d\theta\, dr = \frac{2}{15} a^4,$$

$$Vy_1 = \int\int r^2 \sin\theta \sqrt{a^2 - r^2}\, d\theta\, dr = \frac{15\pi - 32}{240} a^4,$$

$$Vz_1 = \int\int \frac{1}{2}(a^2 - r^2)\, r\, d\theta\, dr = \frac{5\pi}{128} a^4.$$

On en déduit de suite x_1, y_1, z_1.

41. *Des solides terminés par deux faces planes parallèles, et tels que l'aire de la section faite par un plan parallèle à la base s'exprime par une fonction entière et du deuxième degré de la distance du plan sécant à la base.*

La définition précédente comprend un grand nombre de corps remarquables par la simplicité avec laquelle on peut déterminer leur volume et la distance de leur centre de gravité aux bases. Soient $2h$ la hauteur d'un de ces corps, z la distance de la base inférieure à un plan parallèle horizontal, pour fixer les idées, et

$$A = mz^2 + pz + q$$

l'aire de la section déterminée par ce plan. Le volume est

$$V = \int_0^{2h} (mz^2 + pz + q)\,dz = \frac{h}{3}(8mh^2 + 6ph + 6q).$$

On peut l'écrire

$$V = \frac{2h}{6}[(4mh^2 + 2ph + q) + 4(mh^2 + ph + q) + q].$$

Les trois parties du crochet représentent l'aire de la base supérieure, de la section moyenne et de la base inférieure; désignons-les par B_1, B_2, B_0, et nous aurons

$$V = \frac{1}{6}2h(B_0 + B_1 + 4B_2).$$

La distance du centre de gravité à la base inférieure est

$$z_1 = \frac{1}{V}\int_0^{2h} (mz^2 + pz + q)z\,dz$$
$$= \frac{2h^2}{3V}(6mh^2 + 4ph + 3) = \frac{2h^2}{3V}(B_1 + 2B_2).$$

On aura de même la distance à la base supérieure et leur

rapport

$$\frac{z_1}{z'_1} = \frac{B_1 + 2B_2}{B_0 + 2B_2}.$$

Dans la classe des solides que nous considérons rentrent les segments de surfaces du second ordre, et les polyèdres limités par des bases parallèles, et latéralement par des triangles ou des trapèzes dont les sommets coïncident avec ceux des bases. Pour le montrer dans ce dernier cas, prenons le plan de la base inférieure pour plan des xy; les arêtes latérales sont représentées par les équations

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta;$$

le polygone déterminé par un plan sécant parallèle à xy a des sommets dont les coordonnées sont fonctions linéaires du z du plan; ce polygone se projette en vraie grandeur sur xy, et l'on sait que l'aire d'un polygone est une fonction entière du second degré des coordonnées des sommets, et par suite de z. Puisque le nombre des faces latérales est quelconque, on peut les supposer infiniment étroites, et avoir le solide limité par deux faces parallèles et une surface réglée quelconque.

Ce résultat est très-souvent utile, surtout si l'on connaît à l'avance une ligne sur laquelle doive être le centre de gravité. Indiquons seulement quelques applications. Le centre de gravité d'un demi-ellipsoïde divise le demi-axe dans le rapport de 3 à 5. (Volume et centre de gravité d'un tas de pierres). Quand deux surfaces du second degré se coupent suivant deux coniques situées dans des plans parallèles, le volume compris entre ces deux surfaces (tel serait le volume engendré par la rotation d'un segment de conique autour de l'axe) a son centre de gravité au milieu de la droite qui joint les centres des coniques communes. Que deux ellipsoïdes homothétiques soient coupés

suivant des courbes réelles par deux plans parallèles, le volume compris entre les deux plans et les deux ellipsoïdes a son centre au milieu du diamètre commun; car les aires annulaires déterminées par des plans de section parallèles sont équivalentes.

42. *Volume et centre de gravité d'un prisme ou d'un cylindre tronqué.*

Je prends pour axe des x l'intersection des plans des deux bases, pour axe des y une perpendiculaire abaissée du centre de gravité C de la base inférieure, pour axe des z une parallèle aux génératrices faisant l'angle i avec le plan XOY; enfin soit $z = cy$ l'équation du plan de la base supérieure; on a, en étendant les intégrales à la base inférieure,

$$V = \int\int cy \sin i \, dx \, dy.$$

Le volume est égal à l'aire de la base inférieure multipliée par la hauteur du point d'intersection de la base supérieure avec la parallèle aux génératrices, menée par le centre de gravité de la base inférieure : c'est aussi l'aire de la section droite multipliée par la droite qui joint les centres de gravité des deux bases.

Le centre de gravité G du tronc est dans le plan $z = \frac{1}{2} cy$ qui passe par les milieux des génératrices; on a, pour sa projection sur le plan XY parallèlement à OZ, en appelant A l'aire de la base, η l'y du point C,

$$x_1 = \frac{1}{V} \int\int cxy \, dx \, dy \sin i = \frac{1}{A\eta} \int\int xy \, dx \, dy,$$

$$y_1 = \frac{1}{V} \int\int cy^2 \, dx \, dy \sin i = \frac{1}{A\eta} \int\int y^2 dx \, dy.$$

On verra dans la Dynamique que le point ainsi défini est le centre de percussion de la surface de la base par rapport à l'axe OX.

EXERCICES.

Trouver le centre de gravité des systèmes suivants :

Arc de cycloïde, de spirale logarithmique, de parabole, de la courbe qui se projette sur le plan des xy suivant la parabole $y^2 = 4ax$, sur xz suivant une cycloïde ayant O pour sommet, OX pour axe, a pour rayon du cercle générateur. (FUHRMANN.)

Aire comprise entre la chaînette et deux ordonnées, la cissoïde et son asymptote, la spirale d'Archimède et deux rayons vecteurs, entre la cardioïde et son cercle directeur, de la courbe

$$xy^2 = b^2(a - x).$$

Aire comprise entre un arc d'ellipse et deux rayons vecteurs. Segment et secteur circulaires.

Aire d'une zone de paraboloïde de révolution, aire engendrée par la révolution d'une boucle de lemniscate autour de l'axe, aire d'un tronc de cône ou de cylindre de révolution limitée à deux génératrices.

Volume engendré par la rotation d'une parabole autour de la tangente au sommet, segment de paraboloïde de révolution limité par un plan méridien et un parallèle. Volume entre un paraboloïde hyperbolique, le plan tangent au sommet et les plans projetants de quatre génératrices qui forment un quadrilatère gauche. Demi-octaèdre régulier où la densité en chaque point est proportionnelle au carré de la distance au centre.

Faisons tourner une chaînette autour de son axe, et considérons le volume compris entre la surface de révolution, un cylindre quelconque parallèle à l'axe de la chaînette, et le plan engendré par la rotation de la base de la courbe : ce volume a son centre de gravité sur la même ordonnée que la portion de la surface de révolution intérieure au cylindre, et la hauteur est moitié moindre.

ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES.

Composition d'un système quelconque de forces.

43. Des forces quelconques F_i, agissant sur un solide invariable, peuvent toujours être transportées en un point arbitraire O du solide, et donner une résultante constante R, pourvu qu'à cette résultante on adjoigne un couple dont le moment G dépend du choix de O. Prenons ce point pour origine de trois axes qui feront entre eux les angles λ, μ, ν; soient X_i, Y_i, Z_i les composantes de F_i parallèles aux axes, x_i, y_i, z_i les coordonnées de son point d'application; on aura, pour les composantes de R,

$$X = \Sigma X_i, \quad Y = \Sigma Y_i, \quad Z = \Sigma Z_i,$$

et, pour les moments des couples situés dans les plans coordonnés, et dont la résultante est le couple G,

$$L \sin\lambda = \sin\lambda\, \Sigma\, (y_i Z_i - z_i Y_i), \ldots .$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que R et G soient tous deux nuls, ou que la somme des projections des forces sur trois droites non parallèles à un même plan soit nulle, ainsi que la somme de leurs moments par rapport à trois droites formant les arêtes d'un trièdre, ou enfin que X, Y, Z, L, M, N soient nuls.

Pour que le système donné puisse se réduire à une force unique, on voit géométriquement que R doit se trouver dans le plan du couple G; pour l'établir analytiquement, on

cherche un point x, y, z, tel qu'en y appliquant deux forces, l'une R′, égale et parallèle à R, l'autre R″, égale et de sens contraire, le couple (R, R″) détruise G; il ne restera que la force R′. On aura

$$(1)\qquad \begin{cases} L - yZ + zY = 0, \\ M - zX + xZ = 0, \\ N - xY + yX = 0; \end{cases}$$

il suffit d'ajouter ces équations multipliées par X, Y, Z pour éliminer x, y, z :

$$(2)\qquad LX + MY + NZ = 0.$$

Quand cette équation est vérifiée, les équations (1) se réduisent à deux, qui représentent une droite confondue avec la résultante unique R′. On peut avoir les équations de la droite sous la forme ordinaire, en ajoutant les deux dernières équations (1) multipliées respectivement par Z et — Y; il vient

$$x(Y^2 + Z^2) - NY + MZ = X(Yy + Zz).$$

On en conclut aisément qu'en posant $X^2 + Y^2 + Z^2 = S^2$ ($S^2 = R^2$ si les axes sont rectangulaires), la quantité $\frac{1}{S^2}(Xx + Yy + Zz)$ a trois valeurs égales

$$(3)\qquad \frac{x - \frac{1}{S^2}(NY - MZ)}{X} = \frac{y - \frac{1}{S^2}(LZ - NX)}{Y} = \frac{z - \frac{1}{S^2}(MX - NY)}{Z}.$$

Ce sont les équations de la résultante.

La condition (2) exprime que R est dans le plan du couple G, $Lx + My + Nz = 0$; il y a intérêt à vérifier ce fait par le calcul, dit Duhamel (*Sciences de raisonnement*); voici sa démonstration, un peu simplifiée. Prenons sur OX une longueur OA = 1; on peut réaliser le couple

$M \sin\mu$ par une force F_1 égale à M agissant suivant OZ, et une force F_2 égale et de sens contraire agissant en A; de même $N \sin\nu$ serait donné par une force $F_3 = N$ agissant suivant le prolongement de OY, et une force F_4 agissant en A, égale et de sens opposé à F_3; enfin on obtiendrait le couple $L \sin\lambda$ à l'aide d'une force F_5, égale à M, agissant suivant le prolongement de OZ et une force égale et de sens contraire F_6 agissant sur l'axe des y à une distance $OB = \frac{L}{M}$. F_1 et F_5 se détruisent; F_2 et F_4 donnent une résultante en A, parallèle au plan des yz, et dont les composantes suivant OY et OZ sont N et $-M$; F_3 et F_6 donnent en B une force égale et de sens contraire à la précédente; le plan des résultantes partielles est le plan du couple : il est parallèle à ces forces et à la droite AB, dont les équations sont respectivement

$$x = 0, \quad \frac{y}{N} = -\frac{z}{M}; \quad z = 0, \quad x + \frac{M}{L}y = 1.$$

Le plan parallèle mené par l'origine est $Lx + My + Nz = 0$.

Pour avoir l'axe central, supposons que l'axe G du couple fasse l'angle θ avec R, et décomposons ce couple en deux autres, l'axe de l'un étant dirigé suivant R et égal à $G \cos\theta = K$, l'autre ayant son axe $G \sin\theta = H$ perpendiculaire à R. Transportons R en un point C de la perpendiculaire au plan (G, R), tel que $R \times OC = H$, et que l'observateur ayant ses pieds en O, sa tête en C, voie R à sa gauche, G à sa droite; le couple provenant de cette translation détruit H.

Supposons nos axes de coordonnées rectangulaires : les formules de la Géométrie analytique nous montrent que les cosinus directeurs de OC sont

$$\frac{NY - MZ}{RG \sin\theta}, \quad \frac{LZ - NX}{RG \sin\theta}, \quad \frac{MX - NY}{RG \sin\theta}.$$

On a immédiatement les coordonnées de C, et l'on trouve que les équations de l'axe central ont précisément la forme (3), où il sera bon de remplacer S par R. Quant à K, il est $G\cos\theta = \frac{1}{R}(LX + MY + NZ)$.

Si du système R et K on veut revenir à une force R appliquée en un point O quelconque à la distance h de CC′, l'axe du couple résultant de la translation des forces en O aura pour longueur $G = \sqrt{K^2 + h^2R^2}$, et fera avec CC′ un angle dont la tangente est $\frac{hR}{K}$. On sait d'ailleurs que cet axe est, parmi toutes les droites qui passent en O, celle par rapport à laquelle les moments des diverses forces du système ont une somme maximum G; la somme des moments par rapport à une droite inclinée sur OG de l'angle φ serait $G\cos\varphi$.

44. *On peut remplacer la force* R *et le couple* K, *c'est-à-dire toutes les forces du système, par deux forces* P, Q, *dont l'une agit sur une droite qu'on peut choisir arbitrairement, sauf les droites parallèles à l'axe central.*

Je dis d'abord que la perpendiculaire AB commune à P et Q doit rencontrer CC′ à angle droit; en effet R étant égale à la résultante de P et de Q est dans un plan parallèle à ces deux droites; elle est donc perpendiculaire sur AB en direction; elle doit d'ailleurs la rencontrer, car la somme des moments de P et de Q par rapport à toute droite est égale à celle des moments de R et des deux forces qui constituent le couple K; on peut choisir le plan du couple perpendiculaire à CC′, de manière que les forces qui représentent ce couple rencontrent AB, aussi bien que P et Q; il ne reste plus que R, dont le moment par rapport à AB doit être nul et qui doit rencontrer cet axe.

Cela posé, prenons sur une perpendiculaire en C à CC′

deux longueurs $CA = a$, $CB = b$ en sens contraire, si a et b sont positifs; je remplace R par deux forces parallèles R′, R″ appliquées en A et B,

$$R' = \frac{Rb}{a+b}, \quad R'' = \frac{Ra}{a+b};$$

je réalise le couple K par deux forces égales et de sens contraire, appliquées en A et B, perpendiculaires au plan ABCC′, et toutes deux égales à $F = \frac{K}{a+b}$. R′ et F ont une résultante P en A, faisant l'angle α avec R; R″ et $-F$ ont en B une résultante aussi perpendiculaire à AB, et faisant avec CC′ un angle β dans un sens opposé à α;

$$\tang\alpha = \frac{K}{Rb}, \quad \tang\beta = \frac{K}{Ra}.$$

Les droites d'action de P et de Q sont conjuguées.

Le tétraèdre construit sur P et Q a un volume constant. On sait que le volume du tétraèdre est égal au produit de deux arêtes opposées par le sinus de leur angle et le sixième de leur plus courte distance. Ici

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} PQ(a+b)\sin(\alpha+\beta) \\ &= \frac{a+b}{6}(P\sin\alpha Q\cos\beta + P\cos\alpha Q\sin\beta). \end{aligned}$$

Or

$$P\cos\alpha = R', \quad P\sin\alpha = F = Q\sin\beta, \quad Q\cos\beta = R''.$$

$$V = \frac{a+h}{6}(R'F + R''F) = \frac{RF(a+b)}{6} = \frac{1}{6}RK.$$

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème de M. Möbius.

Si l'on a deux systèmes de forces équivalents P, P_1, $P_2, \ldots$, Q, Q_1, $Q_2, \ldots$, *la somme des tétraèdres ayant*

pour arêtes opposées les forces d'un système prises deux à deux de toutes les manières possibles est égale à la somme analogue dans l'autre système; seulement, en considérant la perpendiculaire commune à deux forces, et supposant l'une d'elles fixe, selon que l'autre tend à faire tourner la perpendiculaire dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens contraire, on regardera le volume comme positif ou négatif.

Pour démontrer le théorème de Möbius, on égale la somme des moments des forces P_1, P_2,..., puis des forces Q, Q_1, Q_2,... par rapport à P; mais le moment d'une force telle que Q par rapport à P est six fois le volume du tétraèdre construit sur PQ divisé par P; en appelant (P, Q) le volume dont je parle, on a

$$(P, P_1) + (P, P_2) + \ldots = (P, Q) + (P, Q_1) + (P, Q_2) + \ldots.$$

On aurait de même

$$(P_1, P) + (P_1, P_2) + \ldots = (P_1, Q) + (P_1, Q_1) + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(Q, P) + (Q, P_1) + \ldots = (Q, Q_1) + (Q, Q_2) + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ajoutant, les termes (P_i, Q_j) se détruisent, et, divisant par 2,

$$(P, P_1) + (P, P_2) + (P_1, P_2) + \ldots = (Q, Q_1) + (Q_1, Q_2) + \ldots.$$

Si une force P' rencontre P en un point M, la force Q' conjuguée de P' est dans le plan μ qui passe par M et la droite Q. En effet menons par M une droite quelconque MM' qui rencontre Q: la somme des moments de P', Q' par rapport à cette droite est la même que celle des moments de P et de Q; celle-ci est nulle, ainsi que le moment de P'; il doit en être de même de celui de Q'; cette droite

rencontre donc toutes les droites MM′ et est contenue dans le plan μ. Ce plan est dit *plan focal* de M; M est le foyer de μ.

Quand un point se déplace sur une droite, son plan focal tourne autour de la droite conjuguée.

45. *Une force* P *peut toujours être remplacée par trois autres agissant suivant trois droites données dans un même plan avec elle ou en général par six forces* $F_1, F_2, \ldots, F_6$, *suivant des droites* $A_1, A_2, \ldots, A_6$ *données dans l'espace.*

La première partie est très-facile à établir; pour la seconde, il suffit d'écrire que les forces F_i et la force $-P$ se font équilibre : on remplace, dans les six équations d'équilibre, X_i par $F_i \cos\alpha_i$, Y_i par $F_i \cos\beta_i, \ldots$, et l'on prend pour x_i, y_i, z_i un point à volonté sur A_i. $\alpha_i, \beta_i, \ldots$ étant donnés, on a six équations linéaires pour déterminer les F. Le problème sera possible tant que le déterminant du système d'équations ne sera pas nul; s'il est nul, les droites $A_1, \ldots, A_6$ sont tellement choisies qu'on peut trouver six forces différentes de zéro agissant suivant ces droites et se faisant équilibre. M. Cayley dit que de telles droites sont en involution. Si $A_1, A_2, \ldots, A_5$ ont une transversale commune qui ne rencontre pas A_6, le système n'est pas en involution, et il le devient si la transversale coupe les six droites; car, en prenant les moments par rapport à cette transversale, une des six équations d'équilibre est vérifiée d'elle-même. De là ce théorème de Géométrie :

Quatre droites ont généralement deux transversales communes, mais cinq droites n'en ont aucune. Soient, par exception, cinq droites a, b, c, d, e qui admettent une transversale t; b, c, d, e en auront une autre a'; de même a, c, d, e auront une seconde transversale b', et ainsi de suite : il s'agit de prouver que les droites a', b', c', d', e' ont une transversale commune. En effet menons une droite t' autre que a

et coupant b', c', d', e', puis une droite l coupant t et t'; a, b, c, d, e, l sont en involution, et l'on peut diriger six forces F suivant ces droites, de manière qu'elles se fassent équilibre; si t' ne rencontre pas a', on peut décomposer chacune des forces F en six autres suivant a', b', c', d', e', l; on aurait six forces en équilibre suivant ces droites; or ce serait impossible si t' rencontrait cinq d'entre elles et non la sixième.

46. *Quand trois forces agissant sur un solide se font équilibre, elles sont dans un plan et chacune est égale et opposée à la résultante des deux autres.*

Cette importante proposition résulte de ce que toute droite qui rencontre deux des forces données P, Q doit rencontrer la troisième R pour que la somme des moments par rapport à cette droite puisse être nulle. Faisons tourner la droite autour d'un point de P, de manière qu'elle rencontre Q; elle décrit un plan dans lequel se trouve R; mais P s'y trouve aussi, parce qu'elle doit être rencontrée par une infinité de droites qui coupent Q et R : le reste est alors évident. Je propose au lecteur de déduire ce résultat des six équations d'équilibre.

On trouve de même que, si quatre forces se font équilibre, elles sont situées sur un hyperboloïde à une nappe.

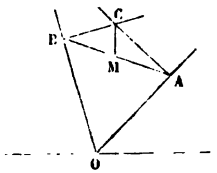
Équilibre d'un seul solide.

47. *Conditions d'équilibre d'une barre pesante et homogène dont les extrémités reposent sur deux plans inclinés parfaitement polis qui font avec l'horizon des angles α, β.*

Je dis d'abord que l'intersection des plans donnés est horizontale, et la barre dans un plan perpendiculaire à cette intersection. La barre n'étant sollicitée que par son poids P et par les réactions normales N, N' des deux plans, ces trois

forces sont dans un même plan; or ce plan est vertical, puisqu'il contient P; contenant des normales à chacun des plans, il est normal à leur intersection, qui est par suite horizontale; enfin, les extrémités de la barre étant dans ce plan, elle y est tout entière. Soient donc (*fig.* 3) OA, OB

Fig. 3.



les droites suivant lesquelles ce plan coupe les deux plans donnés, AB la barre, x son angle avec l'horizon; les réactions normales N, N′ s'exercent suivant AC, BC, et leur point de concours doit être sur la verticale du milieu de AB. On a

$$\frac{CM}{AM} = \frac{\sin CAM}{\sin MCA}, \quad \frac{CM}{BM} = \frac{\sin CBM}{\sin BCM}.$$

Mais

$$AM = BM, \quad ACM = \alpha, \quad CAM = \frac{\pi}{2} - \alpha - x,$$

$$MCB = \beta, \quad CBM = \frac{\pi}{2} - \beta + x;$$

donc

$$\frac{\cos(\alpha + x)}{\sin\alpha} = \frac{\cos(\beta - x)}{\sin\beta},$$

d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \cot\beta).$$

On calculera les pressions N, N′ dont la résultante est

égale et opposée à P :

$$\frac{N}{\sin BCM} = \frac{N'}{\sin ACM} = \frac{P}{\sin ACB},$$

$$N = \frac{P \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad N' = \frac{P \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

On aurait pu aussi égaler à zéro la somme des projections des forces N, N′, P sur une horizontale et une verticale et celle de leurs moments par rapport à un point de la barre; j'emploie cette méthode dans l'exercice suivant.

48. *Une barre pesante et homogène* AB *est articulée en* A *à une charnière qui lui permet de se mouvoir dans un plan vertical; à l'autre extrémité* B *agit une force* Q *faisant avec la direction* AB *un angle donné* α; *quel est le rapport entre* Q *et le poids* P *pour que la barre soit en équilibre et fasse avec l'horizon l'angle* θ : *pression sur la charnière.*

Soient X, Y les composantes horizontale et verticale de l'action exercée par la charnière, $2a$ la longueur de la barre. Projetons sur une horizontale et sur une verticale les forces qui sollicitent AB :

$$X + Q\cos(\theta+\alpha) = 0, \quad Y - P + Q\sin(\theta+\alpha) = 0.$$

Égalons à zéro les sommes des moments par rapport au point A

$$2aQ\sin\alpha - aP\cos\theta = 0.$$

Des trois équations obtenues résulte la solution du problème, et la discussion en est fort simple.

49. *Condition d'équilibre d'une planche elliptique homogène maintenue dans un plan vertical et reposant sur deux chevilles* G, H *situées à la même hauteur.*

Il y a avantage à exprimer que les trois forces qui solli-

citent le solide sont concourantes; les réactions des appuis s'exercent suivant les normales en G et H à l'ellipse, le poids est vertical et agit au centre. Il faut donc que la droite qui va du centre au point de concours des normales en G, H soit perpendiculaire à GH. Prenons pour axes coordonnés les axes de l'ellipse, de longueurs $2a$ et $2b$, et soient x_1, y_1, x_2, y_2 les coordonnées de G et H. Les normales en ces points ont pour équations

$$a^2xy_1 - b^2yx_1 - (a^2 - b^2)x_1y_1 = 0,$$
$$a^2xy_2 - b^2yx_2 - (a^2 - b^2)x_2y_2 = 0.$$

Faisons une combinaison ne renfermant plus de termes constants, nous aurons la droite qui va du centre au point de concours des normales

$$a^2x(x_1 - x_2)y_1y_2 - b^2y(y_1 - y_2)x_1x_2 = 0.$$

La condition pour qu'elle soit perpendiculaire à GH est

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(a^2y_1y_2 + b^2x_1x_2) = 0.$$

Il peut y avoir trois sortes de positions d'équilibre; si l'on fait $x_1 - x_2 = 0$, le petit axe est parallèle à GH; ce sera le grand axe si $y_1 - y_2 = 0$; enfin, en annulant le troisième facteur,

$$\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

on exprime que G et H sont aux extrémités de deux diamètres conjugués. La possibilité de chacune de ces solutions dépend de la longueur $2e$ de GH : la première exige $e < b$, la deuxième $e < a$; pour la troisième, il faut que $2e$ soit compris entre $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$, distances minimum et maximum des extrémités de deux diamètres conjugués. Il peut y avoir quatre positions d'équilibre distinctes.

50. *Déterminer quatre forces* P, Q, R, S *agissant à chacun des sommets d'un tétraèdre perpendiculairement à la face opposée, de façon qu'elles se fassent équilibre.*

Soient a, b, c, d les aires des faces du tétraèdre ABCD; chacune est égale à la somme des projections des autres sur elle-même :

$$(1)\quad \begin{cases} a - b\cos CD - c\cos DB - d\cos BC = 0, \\ b - c\cos DA - d\cos AC - a\cos CD = 0, \\ c - d\cos AB - a\cos BD - b\cos DA = 0, \\ d - a\cos BC - b\cos CA - c\cos AB = 0. \end{cases}$$

Projetons les forces P, Q, R, S sur chacune d'elles successivement, et observons que l'angle de deux d'entre elles est supplémentaire du dièdre formé par les plans auxquels elles sont perpendiculaires; nous aurons quatre équations ne différant des précédentes que par le changement de a en P, b en Q,...; on en conclut

$$\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} = \frac{S}{d}.$$

Chaque force est proportionnelle à l'aire de la face à laquelle elle est normale.

Pour que l'équilibre soit assuré, il faut encore prouver que la somme des moments des forces par rapport à trois droites formant trièdre est nulle. Considérons l'une des arêtes du trièdre A, AB par exemple. Les moments de P et de Q sont nuls; pour évaluer le moment de R que je représente par λc, j'abaisse CH perpendiculaire sur le plan ABD, et dans ce plan HI perpendiculaire à AB; le moment de R est $\lambda c \times HI$; mais, V étant le volume du tétraèdre, $c = \frac{3V}{CH}$; le moment devient $\frac{3V\lambda}{CH} HI = 3\lambda \cot AB$. On verra que le moment de S est le même en valeur absolue, mais de signe

contraire. La somme des moments des forces par rapport à AB, AC, AD sera nulle de la même manière.

Remarques. — Puisque quatre forces dirigées suivant les hauteurs d'un tétraèdre peuvent se faire équilibre, ces hauteurs sont sur un hyperboloïde.

Le déterminant des équations (1) égalé à zéro donne la relation entre les six dièdres d'un tétraèdre.

Équilibre de plusieurs corps.

51. *Une enveloppe sphérique homogène, de centre* C *et de poids* P, *est placée sur un plan incliné qu'elle touche en* A, *et renferme à son intérieur un petit corps* M *de poids* Q, *qui est attiré vers un point* O *du plan incliné avec une intensité proportionnelle à la distance ; position d'équilibre du système.*

Je dis d'abord que C et M sont dans le plan vertical qui contient la ligne de plus grande pente du point O; car supposons M lié invariablement à la surface sphérique : l'équilibre n'est pas troublé. Or le système est en équilibre sous l'action de trois forces, l'attraction de O qui s'exerce suivant OM, la résultante verticale de P et de Q, enfin la réaction normale du plan en A : ces trois forces sont donc dans un plan qui est vertical et contient les droites OM, AC normale au plan donné; OA est donc une ligne de pente de ce dernier plan.

Soient maintenant $OA = x$, $ACM = \theta$, N la réaction du point M sur la sphère; les coordonnées du point M par rapport à OA et à une perpendiculaire en O sont

$$x - R\sin\theta \quad \text{et} \quad R(1 - \cos\theta);$$

les composantes de l'attraction de O sont de la forme $\lambda(x - R\sin\theta)$, $\lambda R(1 - \cos\theta)$; on a pour l'équilibre de M,

en désignant par α l'angle du plan donné avec l'horizon,

$$-\lambda(x - R\sin\theta) + Q\sin\alpha + N\sin\theta = 0,$$
$$-\lambda R(1 - \cos\theta) - Q\cos\alpha + N\cos\theta = 0.$$

La sphère est sollicitée par trois forces, N, P et la réaction en A, qui se coupent en C; projetons sur OA

$$P\sin\alpha - N\sin\theta = 0.$$

Éliminons N entre cette équation et chacune des deux premières :

$$(P + Q)\sin\alpha - \lambda(x - R)\sin\theta = 0,$$
$$P\sin\alpha\cos\theta - Q\sin\theta\cos\alpha - \lambda R(1 - \cos\theta)\sin\theta = 0.$$

La première donne x quand on connaît θ, et cet angle est déterminé par la dernière; prenant pour inconnue $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = u$, elle devient

$$P\sin\alpha\, u^4 + 2(\lambda R + Q\cos\alpha)u^3 + 2Q\cos\alpha\, u - P\sin\alpha = 0.$$

Cette équation et sa transformée en $-u$ ont chacune une variation; il y a précisément une racine positive et une négative, et la substitution de 1 et de -1 montre que la première racine est entre zéro et 1, la seconde entre -1 et $-\infty$; il y a deux positions d'équilibre : pour l'une θ est $< 90°$, pour l'autre, il est entre 180 et 270 degrés. Si P est beaucoup plus grand que Q, u se rapproche de 1 et de -1, θ de 90 ou de 270 degrés.

52. *Une tige* AB, *de poids* P, *est mobile autour de son extrémité* A, *et soutenue à l'autre par un fil de masse négligeable et de longueur* l; *ce fil passe sur deux très-petites poulies* C *et* D, *la première située verticalement au-dessus du point* A, *et se termine en* H *où il soutient l'extrémité d'une chaîne pesante, de longueur* λ, *parfai-*

tement flexible, et dont l'autre extrémité est attachée en un point fixe E *sur la verticale de la poulie* D. *On donne la distance* AG $= h$ *du point* A *au centre de gravité de la barre* AB *et le poids* q *de l'unité de longueur de la chaîne* EH, *et l'on demande la position d'équilibre du système* (Agrég., 1871.)

Soit I l'extrémité inférieure de la chaîne; la longueur HI que le fil a à porter s'obtient en évaluant de deux manières la longueur DI :

$$DI = DH + HI = DE + \lambda - HI, \quad HI = \frac{1}{2}(DE + \lambda - DH),$$

et la tension du fil sera $T = \frac{1}{2}q(DE + \lambda - DH)$. Le fil devant tenir la barre AB en équilibre, le moment de sa tension par rapport à A est égal au moment du poids de AB;

$$T \times AC \sin ACB = Ph \sin CAB.$$

Mais, dans le triangle ABC,

$$\frac{\sin CAB}{\sin ACB} = \frac{CB}{AB}; \quad \text{donc} \quad T = \frac{PhCB}{AB \times AC}.$$

D'ailleurs $BC = l - DC - DH$; donc on a, en reprenant la première valeur de T,

$$\frac{1}{2}q(DE + \lambda - DH) = \frac{Ph}{AB.AC}(l - DC - DH),$$

d'où

$$DH = \frac{2Ph(l - CD) - q\,AB.AC(DE + \lambda)}{2Ph - q\,AB.AC}.$$

La valeur de DH donnera la forme du système. Pour que le problème soit possible, il faut que DH soit positif et inférieur à $DE + \lambda$, et aussi à $l - CD - (AC - AB)$, en prenant pour cette parenthèse sa valeur absolue. Un cas re-

marquable est celui où l'on a

$$2Ph = q\,AB.AC, \quad l - CD = DE + \lambda;$$

DH est de la forme $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire que le système sera en équilibre pour toutes les inclinaisons de la droite AB. On trouve là le principe d'un système de ponts-levis, dits *à contre-poids variable*, dû au général Poncelet.

53. *Trois sphères égales, de poids* P, *de rayon* a, *sont attachées à un point fixe* O *par des fils de longueur* l; *sur ces trois sphères, on en pose une autre de poids* Q *et de rayon* b; *déterminer les conditions d'équilibre du système en supposant les centres des trois sphères soutenues dans un plan horizontal.*

Soient A, A′, A″ les centres des sphères de rayon a, B le centre de la quatrième; il peut arriver que les sphères A, A′, A″ se touchent, et que chacune soit en équilibre sous l'action de son poids, du fil qui la soutient, de la pression N exercée par les deux sphères de même espèce et la pression N_1 de la sphère B; ou bien les sphères ne se touchent pas et les forces N n'existent plus.

Soient, dans le premier cas, α et β les angles de OA et de BA avec la verticale; les points A, A′, A″ forment un triangle équilatéral dont le rayon est $\frac{2a}{\sqrt{3}}$; on a

$$\sin\alpha = \frac{2a}{l\sqrt{3}}, \quad \sin\beta = \frac{2a}{(a+b)\sqrt{3}}.$$

Les pressions exercées par A′ et A″ sur A se composent en une force $N\sqrt{3}$, horizontale, passant au centre A et située dans le plan AOB; pour l'équilibre de A, il faut annuler la

somme des projections des forces qui le sollicitent sur la perpendiculaire à OA dans le plan AOB :

$$P \sin\alpha - N_1 \sin(\beta - \alpha) - N\sqrt{3}\cos\alpha = 0.$$

L'équilibre de B s'obtient en projetant les forces qui le sollicitent sur une verticale : $Q - 3N_1 \cos\beta = 0$. Substituons N_1 dans la précédente :

$$P \sin\alpha - \frac{Q}{3}\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos\beta} - N\sqrt{3}\cos\alpha = 0.$$

Pour que l'équilibre soit possible dans les conditions supposées, il faut que N soit positif, ce qui donne

$$3P \sin\alpha \cos\beta - Q(\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) > 0,$$

$$(3P + Q)\frac{2a}{l\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{4a^2}{3(a+b)^2}} > Q\frac{2a}{(a+b)\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{4a^2}{3l^2}},$$

ou

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} [l^2 - (a+b)^2]Q^2 - 2[3(a+b)^2 - 4a^2]PQ \\ \quad - 3[3(a+b)^2 - 4a^2]P^2 < 0. \end{array} \right.$$

Il faut que l'on ait $l > a + b$; on aura en outre

$$(a+b)\sqrt{3} > 2a;$$

sinon la sphère B passerait entre les sphères A, A′, A″, et ne pourrait être soutenue. La seule condition pour que l'inégalité (1) soit satisfaite est que Q soit inférieur à la valeur positive qui annule le premier membre.

Supposons que les sphères A ne se touchent pas, et soit $2x$ la distance de leurs surfaces, en sorte que les côtés du triangle AA′A″ soient $2(a + x)$; les formules trouvées pour le premier cas se modifient d'une façon très-simple ;

on trouvera

$$\sin\alpha = \frac{2(a+x)}{l\sqrt{3}}, \quad \sin\beta = \frac{2(a+x)}{(a+b)\sqrt{3}},$$

$$P\sin\alpha - \frac{Q}{3}\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta} = 0, \quad N = 0, \quad N_1 = \frac{Q}{3\cos\beta},$$

$$(3P+Q)\frac{2(a+x)}{l\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{4(a+x)^2}{3(a+b)^2}}$$
$$= Q\frac{2(a+x)}{(a+b)\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{4(a+x)^2}{3l^2}}.$$

On en tire

$$(a+x)^2 = \frac{3}{4}(a+b)^2 - \frac{l^2-(a+b)^2}{4}\frac{Q^2}{P^2+2PQ}.$$

On reconnaît que, P étant constant, $a+x$ diminue quand Q augmente; pour $Q=0$, on a

$$a+x = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b), \quad \text{d'où} \quad \beta = \frac{\pi}{2};$$

B est dans le plan $AA'A''$; Q pourra augmenter jusqu'à ce qu'on trouve $x=0$, et alors il a précisément la plus grande valeur qui satisfaisait à l'inégalité (1); quand Q est inférieur à cette limite, il y a deux positions d'équilibre; au-delà, il n'y en a plus.

54. *Un segment de paraboloïde de révolution dont l'axe est vertical et le sommet en bas repose sur deux plans également inclinés, qui le tiennent en équilibre; si on le suppose partagé en deux moitiés par le plan vertical qui contient l'intersection des deux plans fixes, quelle hauteur peut-on donner au segment sans que les deux parties se séparent?* (WALTON).

Soient O le sommet du paraboloïde, A le point où son axe coupe la base du segment, $OA = h$, C, C′ les points de

contact avec les deux plans, i l'inclinaison de chacun de ces plans; je prends OA pour axe des z, le plan de séparation des demi-segments pour plan des yz, et une perpendiculaire en O pour axe des x. Le centre de gravité du volume OAC est situé dans le plan xz, et l'on obtient son abscisse en décomposant le volume en tranches parallèles à ZOY; on trouve aisément

$$x_1 = \frac{2}{\pi h^2 p} \int_0^{\sqrt{2ph}} \frac{4}{3} \sqrt{2ph - x^2} \left(h - \frac{x^2}{2p}\right) x dx = \frac{16}{15\pi} \sqrt{2ph}.$$

Les coordonnées du point de contact C sont $p \operatorname{tang} i$, zéro, $\frac{1}{2} p \operatorname{tang}^2 i$; la réaction normale du plan rencontre la verticale du centre de gravité en un point H dont le z est

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{2} p \operatorname{tang}^2 i - (x_1 - p \operatorname{tang} i) \cot i \\ &= \frac{1}{2} p (2 + \operatorname{tang}^2 i) - \frac{16}{15\pi} \sqrt{2ph} \cot i. \end{aligned}$$

Les deux parties exercent l'une contre l'autre une pression qui est nécessairement horizontale, et dont le point d'application est entre O et A; la pression exercée sur l'un des solides doit faire équilibre à son poids et à la réaction du plan sur lequel il s'appuie; ces deux dernières forces ont une résultante qui passe en H, et qui, pour une valeur convenable de la réaction du plan, est horizontale; mais, pour qu'elle puisse détruire l'action du second solide, il faut que z' soit > 0 :

$$\sqrt{\frac{2h}{p}} < \frac{15\pi}{32} (2 \operatorname{tang} i + \operatorname{tang}^3 i).$$

On a ainsi la hauteur maximum compatible avec l'équilibre.

55. *Déterminer la forme d'équilibre d'un polygone plan* ABCDEF *dont chaque côté est sollicité par une force qui lui est perpendiculaire, appliquée en son milieu et proportionnelle à sa longueur.*

Cette équation, résolue par Fuss (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, 1817), peut être traitée simplement en partant de ce théorème que, si trois forces se font équilibre, elles sont concourantes et dans le même plan. Le côté AB est en équilibre sous l'action de la force λAB qui lui est normale, et des deux réactions R, R′ exercées par les côtés voisins AF, BC; ces deux forces doivent concourir en un point I sur la perpendiculaire au milieu M de AB; AIB est isoscèle, et $R = R' = \frac{\lambda . AB}{2 \sin IBA}$. Or élevons en B une perpendiculaire à IB qui rencontre IM en O; on voit que $R = \lambda BO$, $BO = \frac{R}{\lambda}$. Pour une raison analogue, la perpendiculaire au milieu de BC coupe BO en O′, tel que $\lambda BO' = R$; donc $BO = BO'$, et les droites menées par les sommets perpendiculairement aux réactions mutuelles des côtés qui y aboutissent concourent en un point O équidistant des sommets. Le polygone ABCD... est inscrit dans un cercle, et les réactions des côtés les uns sur les autres sont égales et tangentes au cercle.

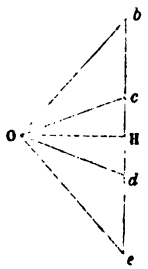
Si l'on imagine un vase dont les faces latérales soient des rectangles articulés suivant leurs droites d'intersection qui sont verticales, et dont le fond soit formé d'une membrane extensible; si l'on verse un liquide dans le vase, chaque face latérale éprouve une pression normale proportionnelle à son aire, et la section droite est un polygone inscriptible dans un cercle.

56. *On donne dans un plan vertical un assemblage* ABCDE *formé de quatre barres égales, pesantes et homo-*

gènes, articulées entre elles en BCD; *les extrémités* A *et* E *sont attachées par des charnières à deux points fixes d'une horizontale; on demande la forme d'équilibre.* (Couplet, *Des charpentes.*)

J'applique la méthode de Varignon pour l'équilibre du polygone funiculaire : je mène par un point O (*fig.* 4) une droite Ob parallèle au côté AB du comble et proportionnelle à la pression qui s'exerce sur chaque section droite de cette barre. Comme le poids P de chaque barre peut être

Fig. 4.



remplacé par deux poids $\frac{1}{2}$P appliqués à ses extrémités, le polygone ABCDE est dans les mêmes conditions que si des forces verticales P étaient appliquées à ses sommets mobiles; si donc par le point b je mène une verticale bc proportionnelle à P, Oc représentera en grandeur et en direction la pression du côté BC; de même, si $cd = de =$ P, Od, Oe seront parallèles à CD et DE. Cela posé, je dis que Oc et Od font des angles égaux avec l'horizontale OH; car, si l'on avait cOH $>$ HOd, on aurait aussi bOH $>$ HOe; la projection de ABC sur une verticale serait plus grande que celle de CDE, et A et E ne seraient pas sur une même horizontale.

Alors bH $= 3c$H; si donc α et β sont les angles de AB

et de BC avec l'horizon, on aura

$$\tang\alpha = 3\tang\beta.$$

Il suffit d'écrire que AE est égale à la projection du polygone sur l'horizon pour avoir une seconde équation entre α et β

$$l = p(\cos\alpha + \cos\beta).$$

Posons $\tang\beta = x$, et éliminons α :

$$\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{l}{p}.$$

Quand x croît de zéro à ∞, le premier membre décroît de 2 à zéro; il y a donc une et une seule solution quand l'écart AE est moindre que deux fois la longueur d'une barre.

57. *Position d'équilibre de deux poids égaux assujettis à rester sur une parabole dont l'axe est vertical, et se repoussant avec une intensité inversement proportionnelle à leur distance.*

Soient A, B les deux points, x, y, x', y' leurs coordonnées, $x^2 = 2py$ l'équation de la parabole. En écrivant pour les deux points la condition $X\,dx + Y\,dy = 0$, on trouve deux équations de la forme

$$\mu^2 \frac{p(x-x') + x(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} - gx = 0,$$

$$\mu^2 \frac{p(x-x') + x'(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} + gx' = 0.$$

Remplaçons y et y' par $\frac{x^2}{2p}$, $\frac{x'^2}{2p}$, et débarrassons les frac-

tions du facteur $x - x'$ qui ne peut être nul; il vient

$$(1)\quad \begin{cases} 2p\mu^2 \dfrac{2p^2 + x(x+x')}{(x-x')[4p^2+(x+x')^2]} - gx = 0, \\ 2p\mu^2 \dfrac{2p^2 + x'(x+x')}{(x-x')[4p^2+(x+x')^2]} + gx' = 0. \end{cases}$$

Retranchons la première de la seconde, et simplifions encore la fraction :

$$\frac{2p\mu^2(x+x')}{4p^2+(x+x')^2} - g(x+x') = 0.$$

On a d'abord la solution $x' = -x$, et, en substituant dans l'une des équations (1), on trouve

$$x = -x' = \mu\sqrt{\frac{p}{2g}}.$$

Si l'on cherche une autre solution, on divise par $x + x'$, et il reste

$$x + x' = \pm\sqrt{\frac{2p\mu^2 - 4p^2g}{g}};$$

dans ce cas, ajoutons les équations (1) après avoir multiplié la première par x', la seconde par x; on en déduit

$$xx' = -2p^2;$$

on connaît la somme et le produit de x et de x'. Cette seconde solution est réelle toutes les fois que $\mu^2 - 2gp > 0$.

Équilibre en tenant compte du frottement.

58. *Une tige pesante* OA, *parfaitement mobile autour de l'extrémité* O, *s'appuie en* A *contre un plan vertical dépoli; déterminer la position de la barre quand elle est sur le point de glisser.*

Soient a la longueur de OA, θ son angle avec la perpendiculaire OP abaissée sur le plan fixe, ψ l'angle du plan

AOP avec l'horizon, N la pression normale, fN la force de frottement dirigée suivant la tangente en A au cercle que A peut décrire sur le plan fixe. Prenons pour axe des z la verticale de O, pour axes des x OP, pour axe des y une perpendiculaire aux deux premières; les coordonnées de A sont $a\cos\theta$, $a\sin\theta\cos\psi$, $a\sin\theta\sin\psi$; les composantes de la force de frottement $X = 0$, $Y = -fN\sin\psi$, $Z = fN\cos\psi$. Nous n'avons qu'à égaler à zéro la somme des moments par rapport à OZ :

$$-afN\sin\psi\cos\theta + aN\sin\theta\cos\psi = 0, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{1}{f}\operatorname{tang}\theta;$$

il y a toujonrs une solution indépendante de l'épaisseur de la barre.

59. *Une tige homogène* AB *peut tourner dans un plan vertical autour de son milieu* C, *et porte à une de ses extrémités* B *un poids* Q; *une autre tige* OE, *mobile autour d'une de ses extrémités* O, *appuie sur l'extrémité* A *de la première tige; le point* O *est situé verticalement au-dessus de* C *à une distance* CO = CA = a; *déterminer la position du système quand le point* A *est près de glisser sur* OE, *en remontant vers* O *ou dans le sens opposé.*

Le poids P de OE peut être considéré comme appliqué en son centre de gravité à une distance h de O. Soient α l'angle COE = CAO, f le coefficient de frottement; quand le point A sera près de glisser vers E, la barre AB éprouvera en A une action N normale à OE, faisant avec AB l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, et une action fN faisant l'angle α en dessus; prenons, par rapport à C, les moments des forces qui sollicitent AB :

$$Q\sin 2\alpha - N\cos\alpha + fN\sin\alpha = 0.$$

Prenons par rapport à O les moments des forces qui agis-

sent sur OE ;

$$2Na\cos\alpha - Ph\sin\alpha = 0.$$

Éliminant N :

$$\sin\alpha\,[4aQ\cos^2\alpha - Ph(\cos\alpha - f\sin\alpha)] = 0.$$

On a la solution évidente $\alpha = 0$ et une autre qui dépend d'une équation du quatrième degré. Quand le glissement doit se faire vers AO, on change f en $-f$.

60. *Une tige pesante et homogène* AB *s'appuie par son extrémité* A *sur une horizontale, et touche en un point variable* M *une courbe située dans le plan vertical qui contient la droite fixe; les coefficients de frottement sur cette droite et sur la courbe sont égaux. Déterminer la courbe de manière que, dans toutes ses positions,* AB *soit sur le point de glisser.*

Prenons pour axe des x un point O de l'horizontale fixe, que nous choisirons plus tard, et désignons par $2a$ la longueur de AB, par P son poids, α son inclinaison sur OX, N et N′ les réactions normales en A et M, φ l'angle de frottement. Projetons les forces sur une horizontale, une verticale, et prenons les moments par rapport à A :

$$fN = N'(\sin\alpha - f\cos\alpha), \quad P = N + N'(\cos\alpha + f\sin\alpha),$$

$$aP\cos\alpha = \frac{N'y}{\sin\alpha},$$

y étant l'ordonnée de M. On tire de ces équations

$$N' = \frac{P\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\alpha}, \quad N = \frac{P\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha},$$

$$y = \frac{2a}{\sin 2\varphi}\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

C'est une équation différentielle de la courbe cherchée;

mais, pour la construire, il est commode d'exprimer x et y en fonction de α, et de faire varier ce paramètre au lieu de l'éliminer. En posant $2a = n \sin 2\varphi$, on trouve

$$y = n \sin^2\alpha \cos\alpha, \quad dy = n(3\cos^2\alpha - 1)\sin\alpha\, d\alpha,$$

$$dx = dy \cot\alpha = n(3\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha\, d\alpha, \quad x = (2 - \sin^2\alpha) n \sin\alpha.$$

Nous plaçons ainsi l'origine à l'extrémité A de AB quand elle est horizontale. La courbe est symétrique par rapport aux deux axes, parce que, si l'on change α en $-\alpha$, y ne change pas, et x se change en $-x$; si l'on remplace α par $\pi - \alpha$, c'est x qui ne change pas. Il suffit donc de faire varier α de zéro à $\frac{\pi}{2}$; quand α varie de zéro à arc cos $\frac{1}{\sqrt{3}}$, x et y augmentent tous deux en partant de zéro, pour atteindre, le premier la valeur $\frac{4}{3} n \sqrt{\frac{2}{3}}$, l'autre $\frac{2}{3} n \sqrt{\frac{1}{3}}$. En ce point, il y a rebroussement, et quand α varie depuis la valeur précédente ($54°44'$) à 90 degrés, x et y diminuent, le premier jusqu'à n, le second jusqu'à zéro.

En se reportant aux valeurs de N et de N′ qui doivent être positives, on voit que la seule partie utile de la courbe est celle qui répond aux valeurs de α supérieures à φ.

Quand φ varie, on obtient des courbes homothétiques : l'équation de l'une d'elles serait, en coordonnées polaires,

$$r^4 - (36\cos^2\theta - 27\cos^4\theta - 8) n^2 r^2 + 16 n^4 \sin^2\theta = 0.$$

61. *Quels doivent être les coefficients de frottement du fer sur le fer et sur le sol pour que quatre boulets sphériques, disposés en pile triangulaire, soient sur le point de glisser?*

Soient P le poids commun des quatre sphères, O le centre d'une des trois sphères inférieures, O′ celui de la sphère supérieure; la droite OO′ fait avec l'horizon un angle α

dont le cosinus est $\frac{1}{\sqrt{3}}$; soient encore A et B les points de contact de la sphère O avec O′ et avec le sol, N, N′ les réactions normales en ces points, ff' les coefficients de frottement aux mêmes points. L'équilibre peut être rompu, soit parce que les sphères O glissent sur le sol aux points B, la sphère O′ roulant en A, soit qu'il se fasse un glissement en A et un roulement en B; il faut considérer le cas où l'un et l'autre de ces mouvements sont prêts à se produire; mais la direction des deux glissements de O′ sur O ou de O sur le sol se trouve par raison de symétrie dans le plan vertical de OO′. Projetons sur l'horizontale de ce plan et sur une verticale les forces agissant sur O, et prenons les moments par rapport au centre :

$$N(\cos\alpha - f\sin\alpha) = f'N', \quad P + N(\sin\alpha + f\cos\alpha) = N',$$
$$fN = f'N';$$

d'ailleurs N′ est évidemment égal à $\frac{4}{3}P$; on en conclut

$$f = 4f' = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0,318.$$

62. M. Kurtis a signalé une formule qui permet de trouver aisément l'équation d'équilibre d'un solide sur lequel agissent une force extérieure et deux réactions; il suffit d'écrire que ces trois forces sont concourantes, car on pourra disposer ensuite des grandeurs des réactions pour compléter les conditions d'équilibre. Or, si, dans un triangle ABC, on mène une droite AD qui coupe BC en D, on trouve sans peine

$$(1)\quad \cot ADB = \frac{DC\cot CAD - DB\cot DAB}{BC} = \frac{DB\cot C - DC\cot B}{BC}.$$

Soit une échelle BC, s'appuyant en B sur une horizon-

tale, en C contre un mur vertical : cherchons son inclinaison α, connaissant les angles de frottement φ, φ' en B et C, et la position D du centre de gravité.

Les réactions concourent en un point A sur la verticale de D, et, en prenant la première expression (1), on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{BD\cot\varphi - DC\operatorname{tang}\varphi'}{BC}.$$

Soit une enveloppe mince en forme de zone à une base de centre O, touchant en H un plan horizontal dépoli; une barre AB dont le centre de gravité est G s'appuie en A sur l'intérieur de la calotte, et pose en C sur son bord; connaissant le centre de gravité P de l'enveloppe et le rapport λ de sa masse à celle de la barre, calculer les inclinaisons θ et ψ de OC et de AB.

Écrivant que le centre de gravité de tout le système est sur la verticale de H, et appliquant à AB la seconde expression (1), on a les équations d'équilibre

$$AG\cos\psi - OA\cos(\theta + 2\psi) = \lambda OP\cos(\theta + POC),$$
$$AG\cos\psi\cos(\theta + \psi + \varphi' - \varphi) = 2OA\cos(\theta + \psi)\cos\varphi'\cos(\theta + 2\psi - \varphi).$$

EXERCICES.

Position d'équilibre d'une plaque triangulaire placée à l'intérieur d'un hémisphère.

Équilibre d'une barre s'appuyant d'un bout sur la surface interne d'un hémisphère, de l'autre contre un plan vertical.

Équilibre d'une tige pesante s'appuyant d'un bout contre un mur vertical, de l'autre soutenue par un fil qui est attaché en un point du même plan. Examiner le cas où ce plan est dépoli, et le mouvement près de naître dans un sens ou dans l'autre.

La ligne des gonds d'une porte fait l'angle α avec la verticale; quelle force normale faut-il appliquer à la porte pour que son plan

fasse l'angle β avec le plan vertical de la ligne des gonds? Le moment du poids par rapport à cette droite est $Pa \sin\alpha \sin\beta$.

Composer trois forces agissant respectivement suivant les côtés AB, BC, CA d'un triangle et ayant pour grandeur, la première $\frac{1}{a}$, la deuxième $\frac{1}{b}$, la troisième $\frac{1}{c}$.

Composer des forces représentées par les côtés consécutifs d'un polygone.

Équilibre de deux sphères égales, polies, tangentes entre elles, et placées entre deux plans inclinés dont chacun touche une des sphères.

Un cylindre creux est posé sur un plan horizontal; une tige s'appuie sur la surface interne et sur le bord du cylindre; quel est le poids minimum de celui-ci qui soit compatible avec l'équilibre?

Une sphère est posée sur un plan horizontal et attachée par un fil à un point de ce plan; en ce même point est articulée une tige pesante contenue dans le même plan vertical que le centre et appuyant sur la sphère, tension du fil.

Une tige horizontale BCD porte un poids à son extrémité D; elle est articulée au point B d'un plan vertical, et en C à une tige oblique CA, dont le bout A est lui-même articulé au point A du plan considéré; charges des articulations et de la barre AC dans cette sorte de potence.

Une planche rectangulaire pesante est posée sur un cylindre droit horizontal dépoli; quel poids doit-on attacher à son bord pour qu'elle glisse?

Déterminer dans un plan vertical une courbe telle, qu'en la supposant polie, une tige pesante et homogène qui s'appuie d'un bout contre elle, et de l'autre sur une horizontale dépolie, soit dans toutes ses positions sur le point de glisser. C'est une ellipse

$$y^2 + (x - y \cot\varphi)^2 = a^2;$$

mais il ne faut prendre que l'arc pour lequel l'angle de la tangente avec l'horizontale est $< \pi - \varphi$.

Positions limites d'équilibre d'un cylindre elliptique homogène reposant sur deux plans dépolis dont l'intersection est horizontale.

Déterminer la position la plus élevée qu'on puisse donner à une tige horizontale dans une sphère dépolie sans qu'elle glisse. Si $2a$ est la longueur, le plan horizontal passant par la tige doit être au-dessous du centre, à une distance $> \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{R^2 - a^2}$.

ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE.

63. Considérons un fil parfaitement flexible et inextensible; chaque élément ds est sollicité par des forces extérieures dont les composantes, suivant trois axes rectangulaires, sont $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$; T désignant la tension en un point du fil, on a les équations d'équilibre

$$(1)\quad d\mathrm{T}\frac{dx}{ds}+X\,ds=0,\quad d\mathrm{T}\frac{dy}{ds}+Y\,ds=0,\quad d\mathrm{T}\frac{dz}{ds}+Z\,ds=0.$$

On pourrait en déduire y, z, T en fonction de x, ce qui résoudrait la question.

Si l'on ajoute les équations (1) après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ ou par $d\frac{dx}{dx}, \ldots$, ou enfin par $dy\,d^2z-dz\,d^2y, \ldots$, on arrive à trois conclusions, qu'on peut aussi obtenir en projetant les forces qui sollicitent l'élément ds sur la tangente, la normale, la binormale :

1° $d\mathrm{T}=-(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$; lorsque le second membre est intégrable, on peut en déduire T en fonction d'une constante et des coordonnées d'un point quelconque du fil.

2° ρ étant le rayon de courbure, $\frac{\mathrm{T}\,ds}{\rho}$ est égal à la composante normale des forces qui sollicitent l'élément ds; cette relation peut servir à trouver le rayon de courbure de la courbe funiculaire.

3° La résultante de $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ est dans le plan osculateur à la courbe.

64. *Forme d'équilibre d'un fil flexible, homogène, non pesant, dont les extrémités sont fixées, et dont les éléments sont repoussés d'une droite fixe* AB *par une force perpendiculaire à cette droite et proportionnelle à la distance du point à* AB. *L'hélice peut satisfaire aux conditions de la courbe funiculaire. Cas où les extrémités du fil sont dans un plan qui contient* AB. *Cas où elles sont en* A, B, *et où la longueur du fil dépasse peu la distance* AB. (La partie principale de ce problème a été proposée pour l'agrégation, 1842.)

Prenons un système d'axes rectangulaires dont A soit l'origine, AB l'axe des x; les équations d'équilibre ont la forme

$$(\mathrm{I})\quad dT\frac{dx}{ds}=0,\quad dT\frac{dy}{ds}+\omega^2 y\,ds=0,\quad dT\frac{dz}{ds}+\omega^2 z\,ds=0.$$

La première donne $T\frac{dx}{ds}=C$. Il est aisé de reconnaître que le système est satisfait si le fil a la forme d'une hélice tracée sur un cylindre dont l'axe est AB et le rayon R. Soit α l'angle des tangentes avec AB; on a

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=-\frac{z\sin\alpha}{R},\quad \frac{dz}{ds}=\frac{y\sin\alpha}{R}.$$

Substituons dans les équations générales, on aura

$$T=\frac{C}{\cos\alpha},\quad -C\frac{y\sin^2\alpha}{R^2\cos\alpha}+\omega^2 y=0,\quad -C\frac{z\sin^2\alpha}{R^2\cos\alpha}+\omega^2 z=0.$$

Ce système est vérifié en faisant $C=\frac{R^2\omega^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$, ce qui donne la tension en chaque point de l'hélice.

J'écarte le cas de $C = 0$, qui donne pour tous les points $T = 0$, avec $y = z = 0$ ou bien $dx = 0$. Quand C n'est pas nul, T et $\frac{dx}{ds}$ ne changent pas de signe; on peut, en choisissant le sens de ds, prendre leur produit positif et écrire

$$T\frac{dx}{ds} = \frac{1}{2}c^2\omega^2;$$

mais $dT = -\omega^2(y\,dy + z\,dz)$. Posons $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, nous aurons

$$T = \frac{1}{2}\omega^2(a^2 - r^2).$$

Ajoutons enfin la deuxième équation (I) multipliée par $-z$ et la troisième par $-y$

$$y\,dT\frac{dz}{ds} - z\,dT\frac{dy}{ds} = 0, \quad T\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = Tr^2\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2}b^2\omega^2.$$

L'élimination de T donne les équations de la courbe funiculaire

$$c^2\frac{ds}{dx} = a^2 - r^2, \quad b^2dx = r^2c^2d\theta.$$

On voit que x et θ vont sans cesse en croissant d'une extrémité à l'autre du fil. Si ces deux bouts sont dans un plan passant par AB, θ sera constant ou croîtra de $2n\pi$. Plaçons-nous dans le premier cas, seul admissible si un bout du fil est sur AB; le fil est dans un plan passant par cette droite; en le prenant pour plan des xy, nous ferons $r = y$, et nous aurons

$$\text{(II)} \qquad c^2\frac{ds}{dx} = a^2 - y^2, \quad dx = \pm\frac{c^2dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)^2 - c^4}}.$$

Si la seconde extrémité du fil est sur AB, il y a un point

où $\frac{ds}{dx} = 1$; donc $a^2 > c^2$. On voit qu'alors y va en croissant de o à $\sqrt{a^2 - c^2}$; le radical est alors > 0, puis il change de signe; y décroît jusqu'à $-\sqrt{a^2 - c^2}$, et croît ensuite, etc. On peut mettre dx sous une forme plus simple, en posant

$$y = \sqrt{a^2 - c^2}\sin\varphi, \quad dx = \frac{c^2 d\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\sin^2\varphi}}.$$

L'expression de ds se forme à l'aide de (II)

$$ds = dx\frac{a^2 - y^2}{c^2} = \left(\frac{a^2 + c^2 - y^2}{c^2} - 1\right)dx$$

$$= d\varphi\sqrt{a^2 + c^2}\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\sin^2\varphi} - dx.$$

On a ainsi des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce. Comme, au point B, $y = 0$, φ doit varier de o à $n\pi$, et la courbe présente n branches égales, tour à tour au-dessus et au-dessous de AB. En général n peut être choisi à volonté. Pour déterminer a et c, on exprime que, pour $\varphi = n\pi$, $s = 2l$ et $x = 2h$, ce qui donne aisément

$$h = \frac{nc^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\sin^2\varphi}},$$

$$l + h = n\sqrt{a^2 + c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\sin^2\varphi};$$

mais ce sont deux équations transcendantes. La courbe est

quarrable. Soit $n = 1$:

$$A = \int_0^\pi y \frac{dx}{d\varphi} d\varphi = c^2 \int_0^\pi \frac{\sqrt{a^2 - c^2} \sin\varphi d\varphi}{\sqrt{2c^2 + (a^2 - c^2)\cos^2\varphi}}$$

$$= c^2 \mathrm{L} \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - c^4}}{c^2}.$$

L'aire engendrée pour la révolution autour de AB est aussi quarrable.

Pour le cas où l surpasse peu h, je pose $a^2 - c^2 = \varepsilon^2$, et j'ai

$$dx = \frac{\pm c^2 dy}{\sqrt{(\varepsilon^2 - y^2)(2c^2 + \varepsilon^2 - y^2)}}.$$

On remplace $2c^2 + \varepsilon^2 - y^2$ par $2c^2$, et il vient

$$dx = \frac{\pm c dy}{\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}}, \quad y = \varepsilon \sin \frac{x\sqrt{2}}{c},$$

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon^2}{c^2} \cos^2 \frac{x\sqrt{2}}{c}} = dx \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{c^2} \cos^2 \frac{x\sqrt{2}}{c} + \cdots\right).$$

Les conditions données par le point B sont

$$\frac{2h\sqrt{2}}{c} = n\pi, \quad 2l = h\left(2 + \frac{\varepsilon^2}{c^2}\right).$$

On en déduit les constantes c et ε, et l'équation de la courbe devient

$$y = \frac{4}{n\pi} \sqrt{h(l - h)} \sin \frac{n\pi x}{2h}.$$

C'est une sinussoïde. La tension est

$$T = \frac{1}{2} c^2 \omega^2 \frac{ds}{dx} = \frac{4h^2}{n^2\pi^2} \left(1 + 4\frac{l - h}{h} \cos^2 \frac{n\pi x}{2h}\right).$$

65. *Déterminer la forme d'équilibre d'un fil pesant*

où la densité varie en fonction donnée de l'arc, ou déduire cette loi de variation connaissant la forme de l'arc. Exercices sur la chaînette.

Ces questions peuvent se traiter à l'aide des équations générales (1); mais il peut y avoir avantage à introduire l'angle α de la tangente au fil avec l'horizon (CASEY, *Cambridge Messenger*, III). De ce que le plan osculateur est toujours vertical, il s'ensuit que le fil est dans un plan vertical. La première équation (1) donne

$$T\cos\alpha = \tau.$$

pds étant le poids d'un élément, la composante normale de ce poids est égale à T multiplié par l'angle de contingence

$$T d\alpha = p ds \cos\alpha.$$

Combinant avec la première, où τ est la tension au point le plus bas,

$$\tau \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = p ds, \quad p = \tau \frac{d \operatorname{tang}\alpha}{ds} = \frac{\tau}{\rho \cos^2\alpha}.$$

Quand la chaîne est un cercle,

$$\rho = R, \quad p = \frac{R\tau}{R^2 \cos^2\alpha};$$

la densité est réciproque au carré de la distance au diamètre horizontal.

Pour la cycloïde, convexe vers le bas,

$$\rho = 4a\cos\alpha, \quad p = \frac{\tau}{2a\cos^3\alpha}.$$

Pour la parabole à axe vertical de demi-paramètre c,

$$\rho = \frac{c}{\cos^3\alpha}, \quad p = \frac{\tau\cos\alpha}{c}.$$

Pour l'hyperbole équilatère $y^2 - x^2 = a^2$,

$$\rho = \frac{a}{(\cos 2\alpha)^{\frac{3}{2}}}, \quad p = \frac{\tau}{a\cos^2\alpha}(\cos 2\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Soit donné p constant :

$$\tau\frac{d\alpha}{\cos\alpha} = p\,ds\cos\alpha = p\,dx, \quad px = \tau\,\mathrm{L}\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$dy = ds\sin\alpha = \frac{\tau}{p}\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad y = \frac{\tau}{p\cos\alpha} = \frac{\tau}{p}\frac{1+\tang^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Si l'on pose $\frac{\tau}{p} = a$, on a

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

puis

$$\cos\alpha = \frac{a}{y}, \quad \tang\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

$$s = a\tang\alpha, \quad \mathrm{T} = \frac{\tau}{\cos\alpha} = py.$$

Ces formules donnent immédiatement la solution de quelques exercices sur la chaînette, que j'emprunte au P. Jullien :

« Un fil homogène est attaché en deux points d'une horizontale dont la distance est $2a$: quelle doit être la longueur du fil pour que la tension aux deux points d'attache soit égale au poids total? Quel est l'angle α de la tangente en ces points avec la verticale?

$$l = \frac{4a}{\sqrt{3}\,\mathrm{L}\,3}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

» Un fil homogène, dont les deux extrémités pendent librement,

est posé sur deux chevilles à la même hauteur, et dont la distance est $2a$; pour une longueur totale donnée du fil, déterminer la longueur qui est courbée en chaînette : les deux bouts libres sont égaux. En appelant $2l$ la longueur du fil, le paramètre c de la chaînette qu'il forme dépend de l'équation $l = ce^{\frac{a}{c}}$, et l'arc courbe a pour longueur $c\left(e^{\frac{a}{c}} - e^{-\frac{a}{c}}\right)$.

» Un fil homogène a une extrémité fixée en un point d'une tringle horizontale, l'autre est portée par un anneau enfilé sur la tringle et dont le poids est n fois celui de la demi-chaîne; le coefficient de frottement sur la tringle est μ, et la longueur du fil l: quel est l'écart maximum de ses extrémités pour qu'il puisse y avoir équilibre? On trouve

$$\mu l(n+1)\,\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{\mu^2(n+1)^2+1}}{\mu(n+1)}. \text{ »}$$

66. *Un fil flexible et inextensible, pesant, est fixé à ses extrémités; outre son poids, chaque élément supporte une charge proportionnelle à sa projection horizontale; déterminer la loi suivant laquelle varie l'épaisseur du fil lorsque la tension en chaque point est proportionnelle à l'épaisseur; forme de la chaîne, sa longueur, son poids. Ce serait le problème d'un pont suspendu, sauf l'allongement du câble. Application numérique pour mettre en évidence la nature des constantes : il s'agit d'un câble en fer, dont le poids spécifique est* 7,7; *les deux points d'appui sont à* 100 *mètres l'un de l'autre sur une horizontale, la flèche de l'arc est de* 10 *mètres, le poids supporté par la chaîne est* 300 *kilogrammes par mètre de projection, enfin la tension doit être de* 11 *kilogrammes par millimètre carré de section.*

Les équations du problème sont de la forme suivante :

$$d\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - p\,ds - q\,dx = 0,$$

p étant le poids d'une longueur égale à l'unité avec l'épaisseur correspondant à l'élément ds, q la charge additionnelle pour une longueur dont la projection est l'unité. On doit avoir $T = ap$. En appelant c la valeur de p au point le plus bas, les équations précédentes donnent

$$p\frac{dx}{ds} = c, \quad acd\frac{dy}{dx} - c\frac{ds^2}{dx} - q\,dx = 0$$

ou

$$\frac{acd\frac{dy}{dx}}{q + c + c\frac{dy^2}{dx^2}} = dx.$$

Intégrant, en prenant pour axes la tangente et la normale au point le plus bas,

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{q+c}{c}}\,\text{tang}\left(\dfrac{x}{a}\sqrt{\dfrac{q+c}{c}}\right), \\ y = -a\,\text{L}\cos\dfrac{x}{a}\sqrt{\dfrac{q+c}{c}}. \end{cases}$$

Il n'y a qu'une branche utile, symétrique par rapport à OY; pour $x = 0$, y est nul; elle croît jusqu'à l'infini pour $x = \frac{\pi}{2}a\sqrt{\frac{c}{q+c}}$; au delà y est d'abord imaginaire. Pour rectifier la courbe, on a

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{q+c}{c}\,\text{tang}^2\frac{x}{a}\sqrt{\frac{q+c}{c}}}.$$

Je pose $\frac{q+c}{c} = n$, $\text{tang}\frac{nx}{a} = \frac{z^2-1}{2nz}$;

$$dx = \frac{2a(z^2+1)\,dz}{(z^2-1)^2 + 4n^2z^2},$$

$$ds = \frac{a(1+z^2)^2\,dz}{[(1-z^2)^2+4n^2z^2]z} = a\frac{dz}{z} - 4a\frac{(n^2-1)z\,dz}{(z^2+2n^2-1)^2-4n^2(n^2-1)}.$$

Pour $x = 0$, on a

$$z = 1,$$

d'où la valeur compliquée de s

$$s = a\,\mathrm{L}z + \frac{\sqrt{n^2-1}}{2n}\,a\,\mathrm{L}\,\frac{(z^2+2n^2+2n\sqrt{n^2-1})(1+2n^2-2n\sqrt{n^2-1})}{(z^2+2n^2-2n\sqrt{n^2-1})(1+2n^2+2n\sqrt{n^2-1})}.$$

Le poids est moins compliqué, car il est égal à

$$\int_0^x p\,\frac{ds}{dx}\,dx = c\int_0^x dx\left[1+\frac{q+c}{c}\,\mathrm{tang}^2\frac{x}{a}\sqrt{\frac{q+c}{c}}\right]$$

$$= a\sqrt{c(q+c)}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{a}\sqrt{\frac{q+c}{c}} - qx.$$

Dans l'application numérique, considérons une portion du câble de 1 millimètre carré de section; le poids de l'unité de longueur serait le poids de 1 centimètre cube de fer, $0^{\mathrm{kg}},0077$; la tension étant de 11 kilogrammes, a est égal à $\frac{11}{0,0077} = \frac{10000}{7}$ mètres. L'équation (I) doit être vérifiée pour $x = 50^{\mathrm{m}}$, $y = 10^{\mathrm{m}}$; c va être déterminé par l'équation

$$\mathrm{L}\cos\frac{350}{10000}\sqrt{\frac{300+c}{c}} = -0,007.$$

Pour résoudre rigoureusement cette équation, il faudrait passer au logarithme décimal, chercher l'arc correspondant en fonction du rayon, et en déduire c; mais, comme l'arc est petit, en le désignant par u, on peut prendre $\mathrm{L}\cos u = -\frac{1}{2}u^2$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{2}\left(\frac{35}{1000}\right)^2\left(1+\frac{300}{c}\right) = 0,007,\quad 7\left(1+\frac{300}{c}\right) = 80,\quad c = 28^{\mathrm{kg}},7.$$

Un mètre de fer ayant l'épaisseur de la chaîne au point

le plus bas pèse $28^{kg},7$; il occupe un volume $\frac{28,7}{7,7} = 3^{lit},7$; la section est donc 37 centimètres carrés.

On peut achever les calculs approchés, mais sans logarithmes. Calculons d'abord

$$\sqrt{\frac{q+c}{c}}\,\text{tang}\,\frac{50}{a}\sqrt{\frac{q+c}{c}}$$
$$= \frac{q+c}{c}\,\frac{50}{a}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{50}{a}\right)^2 \frac{q+c}{c} + \ldots\right]$$
$$= \frac{80}{7} \times \frac{35}{1000}\left(1 + \frac{0,014}{3}\right) = 0,402.$$

Au point le plus haut, $\frac{ds}{dx}$ est égal à $\sqrt{1+(0,402)^2} = 1,078$; la section de la chaîne sera de 40 centimètres carrés. Le poids de la chaîne sera

$$2a\sqrt{c(q+c)}\,\text{tang}\,\frac{50}{a}\sqrt{\frac{q+c}{c}} - 100q$$
$$= \frac{20000}{7} \times 28,7 \times 0,402 - 30000 = 2964^{kg}.$$

Dans aucun cas, $\frac{x}{a}\sqrt{\frac{q+c}{c}}$ ne peut atteindre $\frac{\pi}{2}$; il faut toujours avoir

$$x < \frac{\pi}{2}a\sqrt{\frac{c}{q+c}} < \frac{\pi}{2}a \quad \text{ou} \quad x < 2240^{m}.$$

67. *Forme d'équilibre d'un fil homogène et pesant, posé sur la surface d'un cône droit dont l'axe est vertical et le sommet en bas.* (VIEILLE.)

En supposant le cône parfaitement poli, sa surface exerce sur chaque point du fil qui la touche une réaction normale

dont les composantes sont

$$-N\frac{x\,ds}{V},\quad -N\frac{y\,ds}{V},\quad N\frac{z\tang^2\alpha\,ds}{V},\quad V=\sqrt{x^2+y^2+z^2\tang^4\alpha};$$

α est le demi-angle au sommet du cône. On a les équations d'équilibre

$$d.T\frac{dx}{ds}=\frac{N}{V}x\,ds,$$

$$d.T\frac{dy}{ds}=\frac{N}{V}y\,ds,$$

$$d.T\frac{dz}{ds}=p\,ds-\frac{N}{V}z\tang^2\alpha\,ds.$$

On en déduit

$$dT=p\,dz,\quad T=p(z-a).$$

Multiplions la première par $-y$, la seconde par x, ajoutons et posons $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, nous aurons, en tenant compte de la valeur de T,

$$dT\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=0,\quad (z-a)r^2\frac{d\theta}{ds}=c^2.$$

La Géométrie donne

$$z=r\cot\alpha,\quad ds^2=r^2d\theta^2+\frac{1}{\sin^2\alpha}dr^2;$$

donc

$$\text{(I)}\qquad \sin\alpha\,d\theta=\frac{\pm c^2dr}{r\sqrt{r^2(r\cot\alpha-a)^2-c^4}}.$$

Cette équation n'est pas généralement intégrable; mais, comme z doit être $>a$ pour que T soit positif, $r\cot\alpha>a$; la quantité sous le radical ne s'annule que pour une valeur r_1 supérieure à $a\tang\alpha$; si donc r est d'abord croissant, il croît indéfiniment; s'il décroît d'abord, il atteindra un minimum r_1 pour augmenter ensuite à l'infini. On peut

voir que la projection du fil, définie par l'équation (I), a des asymptotes passant par le centre; car, en supposant $\theta = 0$ pour $r = r_1$, quand r devient infini θ devient égal à

$$\theta_1 = \frac{c^2}{\sin\alpha}\int_{r_1}^{\infty}\frac{dr}{\sqrt{r^2(r\cot\alpha - a)^2 - c^4}};$$

le dénominateur étant de l'ordre de r^2, θ_1 est fini. Quant à la distance du pôle à l'asymptote, c'est la limite de $r\sin(\theta_1 - \theta)$ pour r infini; or

$$\lim r\sin(\theta_1 - \theta) = \lim\frac{\theta_1 - \theta}{\frac{1}{r}} = \lim\frac{-\frac{d\theta}{dr}}{-\frac{1}{r^2}}$$

$$= \lim\frac{c^2 r\sin\alpha}{\sqrt{r^2(r\cot\alpha - a)^2 - c^4}} = 0.$$

On peut intégrer (I) quand $a = 0$; le minimum de r est $r_1 = c\sqrt{\tang\alpha}$; si pour cette valeur θ est nul, on aura

$$\theta\sin\alpha = \frac{1}{2}\arccos\frac{c^2\tang\alpha}{r^2}, \quad r^2 = \frac{c^2\tang\alpha}{\cos 2(\theta\sin\alpha)}.$$

Il est aisé d'en conclure que le fil suit la transformée d'une hyperbole équilatère dont le demi-axe est $\frac{c}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}$, et dont le plan serait enroulé sur le cône, le centre de l'hyperbole étant au sommet du cône. Pour réaliser ce cas, supposons que les extrémités du fil soient attachées à des hauteurs égales, en des points pour lesquels $r = r'$, $\theta = \pm\theta'$; et soit $2l$ la longueur; on doit avoir

$$r'^2 = \frac{c^2\tang\alpha}{\cos 2(\theta'\sin\alpha)}, \quad l = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\int_{c\sqrt{\tang\alpha}}^{r'}\frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4\cot^2\alpha - c^4}};$$

la première détermine c^2 et la seconde l à l'aide d'une intégrale elliptique.

On peut encore intégrer (I) quand le polynôme sous le radical admet un facteur double; alors

$$4c^2 = a^2 \operatorname{tang}\alpha, \quad r_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} a \operatorname{tang}\alpha$$

et

$$\cos\alpha\, d\theta = \frac{a^2 \operatorname{tang}\alpha\, dr}{r(2r - a\operatorname{tang}\alpha)\sqrt{(2r - a\operatorname{tang}\alpha)^2 - 2a^2\operatorname{tang}^2\alpha}}$$

$$= \left(\frac{2a}{2r - a\operatorname{tang}\alpha} - \frac{a}{r}\right)\frac{dr}{\sqrt{(2r - a\operatorname{tang}\alpha)^2 - 2a^2\operatorname{tang}^2\alpha}},$$

d'où

$$\theta\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,cos}\frac{a\sqrt{2}}{2r\cot\alpha - a} - \operatorname{arc\,cos}\frac{2r + a\operatorname{tang}\alpha}{2r\sqrt{2}};$$

quand r va de r_1 à ∞, θ croît de $\frac{\pi}{4}(\sqrt{2} - 1)\operatorname{séc}\alpha$.

Pour déterminer la pression exercée en chaque point sur le cône, ajoutons les équations d'équilibre multipliées respectivement par $x, y, -z\operatorname{tang}^2\alpha$,

$$\text{(II)}\quad x\,d.\mathrm{T}.\frac{dx}{ds} + y\,d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} - z\operatorname{tang}^2\alpha\, d.\mathrm{T}\frac{dz}{ds} = \mathrm{NV}\,ds - pz\operatorname{tang}^2\alpha\, ds.$$

Or l'équation du cône donne

$$x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} - z\operatorname{tang}^2\alpha\frac{dz}{ds} = 0,$$

d'où

$$x\,d\frac{dx}{ds} + y\,d\frac{dy}{ds} - z\operatorname{tang}^2\alpha\, d\frac{dz}{ds}$$

$$= -\frac{1}{ds}(dx^2 + dy^2 - dz^2\operatorname{tang}^2\alpha) = \left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{dz^2}{ds^2} - 1\right)ds.$$

Tenant compte de ces relations, on tire de (II)

$$NV = pz \operatorname{tang}^2\alpha - \left(1 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{dz^2}{ds^2}\right) T$$

$$= pz \operatorname{tang}^2\alpha - p(z-a)\frac{r^2 \sin^2\alpha\, d\theta^2}{dr^2 + r^2 \sin^2\alpha\, d\theta^2}.$$

Remplaçons $d\theta$ par sa valeur générale en fonction de dr, z par $r\cot\alpha$, et V par $\frac{r}{\cos\alpha}$, nous trouvons

$$N = p\sin\alpha \frac{r^3(r - a\operatorname{tang}\alpha) - c^4}{r^3(r - a\operatorname{tang}\alpha)}.$$

Pour r infini, $N = p\sin\alpha$; pour savoir s'il est positif tout le long du fil, on cherche le signe du numérateur pour $r = r_1$; comme $r_1^2(r_1\cot\alpha - a)^2 = c^4$, le numérateur a le signe de $r_1(r_1 - a\operatorname{tang}\alpha) - (r_1\cot\alpha - a)^2$ ou de $a + r_1(\operatorname{tang}\alpha - \cot\alpha)$. Or $r_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\alpha\left(a + \sqrt{a^2 + 4c^2\cot\alpha}\right)$; pour que N puisse être < 0, il faut

$$2a + \operatorname{tang}\alpha(\operatorname{tang}\alpha - \cot\alpha)\left(a + \sqrt{a^2 + 4c^2\cot\alpha}\right) < 0,$$

ce qui exige en tous cas $\alpha < \frac{\pi}{4}$.

68. *Forme d'équilibre d'un fil dont chaque élément est soumis à une pression normale proportionnelle à sa distance à une droite fixe; ce serait la forme transversale que tend à prendre vers son milieu une enveloppe cylindrique flexible dont les bords sont tenus par deux tringles horizontales, et dans laquelle on verserait un liquide pesant.* (Resal.)

Traitons rapidement ce problème pour donner un exemple de discussion de courbe définie seulement par des relations entre les coordonnées et un paramètre variable. Je

prends pour axe des x l'horizontale sur laquelle sont les extrémités du fil, l'axe des y étant dirigé vers le haut, et j'appelle α l'angle de la tangente avec l'axe des x. Le fil étant soumis à des forces normales, la tension est constante; nous avons, en projetant sur la normale les forces qui sollicitent l'élément ds et observant que la courbe est évidemment plane,

$$(1) \qquad T\frac{ds}{\rho} = T\,d\alpha = -p\,y\,ds.$$

Multiplions par $\sin\alpha$, posons $T = a^2 p$ et appelons β la valeur de α pour $y = 0$,

$$(2) \quad a^2 \sin\alpha\, d\alpha = -y \sin\alpha\, ds = -y\,dy, \quad y = -a\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\beta)},$$

d'où

$$dy = \frac{a\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\beta)}}, \quad dx = \cot\alpha\, dy = \frac{a\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\beta)}},$$

$$ds = \frac{a\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\beta)}}.$$

On ne pourrait avoir x qu'à l'aide d'intégrales elliptiques; mais on voit que, α croissant de zéro à β, y va constamment en augmentant : il en est de même de x si $\beta < \frac{\pi}{2}$. Si $\beta > \frac{\pi}{2}$, x augmente d'abord pour diminuer ensuite; le vase se rétrécit au sommet. J'appelle $2c$ la distance des extrémités du fil, $2a$ sa longueur, et j'ai entre β et a les équations

$$l = \int_0^\beta \frac{a\,d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\beta)}}, \quad c = \int_0^\beta \frac{a\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{2(\cos\alpha - \cos\beta)}}.$$

Posons, pour transformer ces intégrales,

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\sin\varphi,$$

d'où

$$l = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\varphi}},$$

$$c = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\varphi} - a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\varphi}}.$$

$\frac{l+c}{l}$ ne contient que l'inconnue $\sin\frac{1}{2}\beta$, et on la calcule par approximation à l'aide de Tables des fonctions elliptiques complètes. Si l'on se donne β, on trouve le rapport $\frac{l+c}{l}$; soit $\beta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = 1,854,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi} = 1,351, \quad \frac{l+c}{l} = 1,46.$$

On voit que, dans les conditions du problème, le minimum de c est zéro; β est alors environ 130 degrés. Si β est plus grand, quand α va de $\frac{\pi}{2}$ à β, x devient négatif, et le fil présente un point double au-dessous de l'axe des x; si même on avait $\beta = \pi$, la courbe s'étendrait à l'infini pour être asymptote à l'axe des x. Pour obtenir toute la courbe définie par l'équation (2), il faudrait faire revenir α de β à zéro; mais, en changeant le signe du radical, on a une branche symétrique de la partie utile par rapport au point qui est sur l'axe des x; puis α va de zéro à $-\beta$, y redevient nul, et la courbe forme une suite illimitée de branches superposables. Enfin remarquons que nous n'avons pas

toutes les courbes contenues dans (1), car on eût pu disposer des constantes d'intégration de manière que la courbe ne coupe pas OX.

69. *Un fil élastique, homogène à l'état naturel et pesant, est placé sur une cycloïde dont la base est horizontale, et la convexité vers le haut; une extrémité est attachée au sommet, et l'autre, qui est libre, atteint le point le plus bas; quelle est la longueur naturelle du fil, et la loi suivant laquelle varie la tension?*

Prenons pour axes la tangente et la normale intérieure au sommet; la cycloïde est représentée par les équations

$$x = a(u + \sin u), \quad y = a(1 - \cos u);$$

la longueur d'un élément est $ds = 2a \cos \frac{1}{2} u\, du$, et son poids de la forme

$$2ap \cos \frac{1}{2} u\, du : \left(1 + \frac{T}{Q}\right);$$

Q est la tension qui doublerait la longueur naturelle de l'élément. Projetons les forces qui le sollicitent sur la tangente, inclinée à l'horizon de $\frac{u}{2}$.

$$dT + \frac{Q}{Q + T} ap \sin u\, du = 0.$$

Intégrant, comme $T = 0$ pour $u = \pi$,

$$(Q + T)^2 = 2apQ(1 + \cos u) + Q^2,$$

qui donne la loi de la tension; quant au poids du fil, c'est

$$P = \int_0^\pi \frac{2apQ}{Q + T} \cos \frac{1}{2} u\, du$$

$$= \int_0^\pi \frac{2apQ \cos \frac{1}{2} u\, du}{\sqrt{Q^2 + 4apQ \cos^2 \frac{1}{2} u}} = 2\sqrt{apQ} \arcsin \sqrt{\frac{4ap}{4ap + Q}}.$$

On en déduit la longueur naturelle en divisant par p.

EXERCICES.

Forme d'équilibre d'un fil homogène dont les extrémités sont fixes, et dont chaque élément est repoussé d'un point fixe avec une intensité inversement proportionnelle au carré de la distance.

Étant donnés trois axes rectangulaires dont l'un, OX, est horizontal, trouver la forme d'un fil pesant ayant une extrémité fixée en O, l'autre en un point quelconque : chaque élément est soumis à une force $\lambda^2 x$ parallèle à OX et sa masse est proportionnelle à sa projection sur OX. (Fuhrmann.)

Trouver la force qui sollicite chaque élément d'un fil qui a la forme d'une demi-ellipse à axe vertical, et où la tension est proportionnelle à la projection de l'élément sur l'axe vertical.

ATTRACTION DES SYSTÈMES.

Calcul direct de l'attraction.

70. Pour calculer l'attraction d'une masse quelconque sur un point A, on n'a qu'à décomposer la masse attirante en éléments et à chercher la résultante de leurs actions par les règles de composition des forces concourantes. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de A; x_1, y_1, z_1 celles d'un élément attractif dm à la distance u de A; $f(u)\,dm$ la grandeur de son attraction; on a, pour les projections de la force qui sollicite A,

$$X = \int\int\int \frac{x_1 - x}{u} f(u)\,dm, \quad Y = \ldots,$$

les intégrations s'étendant à toutes les molécules attirantes.

Je rappelle un résultat très-simple à établir, mais utile dans beaucoup de problèmes : quand l'attraction varie en raison directe de la distance, deux corps quelconques agissent l'un sur l'autre exactement comme si leurs masses étaient concentrées en leurs centres de gravité respectifs.

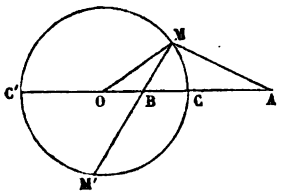
71. *Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point matériel.*

Newton a démontré que, lorsque l'attraction est inversement proportionnelle au carré de la distance, une couche de densité constante, comprise entre deux sphères concen-

triques, est sans action sur un point intérieur, et attire un point extérieur A, comme si sa masse était concentrée en son centre O. M. Thomson a donné de cette seconde propriété une démonstration très-simple.

Par raison de symétrie, l'attraction doit être dirigée suivant AO (*fig.* 5), et, si nous partageons la couche en élé-

Fig. 5.



ments, tels que dm au point M, l'attraction sera de la forme

$$A = \int\int \frac{\mu\, dm}{\overline{AM}^2} \cos MAO.$$

Pour former nos éléments d'une façon avantageuse, considérons le point B, conjugué de OA, tel que $OA \times OB = R^2$, et imaginons des cônes infiniment étroits dont le sommet est en B; l'un d'eux, dirigé suivant BM, intercepte, dans une sphère de rayon 1, la surface $d\omega$, et par suite dans une sphère ayant aussi pour centre B, mais pour rayon BM, l'aire $\overline{BM}^2\, d\omega$; mais cette sphère coupe la sphère donnée sous l'angle BMO, et, comme elle est orthogonale au cône considéré, celui-ci intercepte dans la sphère donnée un élément $\overline{BM}^2\, d\omega \operatorname{séc} BMO$. Si donc ε est la densité de la couche, il vient

$$A = \int\int \mu\varepsilon\, d\omega\, \overline{BM}^2 \operatorname{séc} BMO \frac{\cos MAO}{\overline{AM}^2};$$

mais MOB, MOA sont semblables comme ayant l'angle O

commun compris entre côtés proportionnels ; il en résulte

$$\text{angle BMO} = \text{MAO}, \quad \frac{\text{BM}}{\text{AM}} = \frac{\text{OM}}{\text{OA}},$$

$$\text{A} = \iint \mu\varepsilon \frac{\overline{\text{OM}}^2}{\overline{\text{OA}}^2}\, d\omega = \frac{4\pi \text{R}^2 \varepsilon\mu}{\overline{\text{OA}}^2} = \frac{m\mu}{\overline{\text{OA}}^2}.$$

La réciproque de la première proposition s'établit aisément ; parmi les lois d'attraction qui ne dépendent que de la distance, la loi de la nature est la seule pour laquelle une couche sphérique homogène soit sans action sur un point intérieur tel que B. La distance des points de la couche au point B varie entre BC et BC′. Soit donc $f(u)\,dm$ l'attraction d'une masse dm à la distance u ; on peut, dit M. Bertrand, choisir les dimensions BC, BC′ de telle manière que le produit $u^2 f(u)$ varie dans le même sens que u, ou en sens contraire, pour les valeurs de u comprises entre BC et BC′ ; admettons que les variations soient de même sens, et considérons simultanément l'action de M et celle de l'élément M′ qui agit en sens opposé ; d'après la valeur qu'on a trouvée pour l'élément M, la composante de son attraction suivant BC est

$$\frac{\varepsilon \overline{\text{BM}}^2\, d\omega}{\cos \text{BMO}} f(\text{BM}) \cos \text{MBC};$$

celle de l'élément M′ découpé par la seconde nappe du cône $d\omega$ donne

$$\frac{\varepsilon \overline{\text{BM}'}^2\, d\omega}{\cos \text{BM}'\text{O}} f(\text{BM}') \cos \text{M}'\text{BC} = -\frac{\varepsilon \overline{\text{BM}'}^2\, d\omega}{\cos \text{BMO}} f(\text{BM}') \cos \text{MBC}.$$

mais BM′, faisant avec BC un angle obtus, est $>$ BM, et, suivant ce qu'on a dû admettre,

$$\overline{\text{BM}'}^2 f(\text{BM}') > \overline{\text{BM}}^2 f(\text{BM});$$

l'action dirigée vers BC′ l'emporte sur celle qui est dirigée vers BC, et, comme il en est de même pour tous les couples d'éléments dans lesquels se divise la couche, le point B se trouverait attiré vers le centre. Il faut donc, pour qu'il n'y ait pas d'action,

$$u^2 f(u) = c, \quad f(u) = \frac{c}{u^2}.$$

Pour l'action sur un point extérieur, la réciproque n'est pas exacte.

72. *Attraction d'une droite homogène* CC′ *sur un point* A, *l'attraction variant suivant la loi newtonienne. Application.*

Abaissons AP perpendiculaire sur CC′, et décrivons de A comme centre, avec $AP = a$, pour rayon un arc de cercle qui rencontre AC et AC′ en H, H′. Un élément MM′ de CC′ attire A avec une force $\frac{\mu\varepsilon MM'}{\overline{AM}^2}$; mais soient I, I′ les points de rencontre de l'arc HH′ avec AM et AM′,

$$MM' = \frac{AM}{AP}\,\frac{PP'}{\cos MAP} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AP}^2}\,PP';$$

l'attraction de MM′ est égale à celle de l'arc élémentaire PP′ supposé de même densité que la droite donnée. L'attraction totale est dirigée suivant la bissectrice de l'angle $HAH' = 2\alpha$ et égale à

$$2\int_0^{\alpha} \frac{\mu\varepsilon}{a}\cos\theta\, d\theta = \frac{2\mu\varepsilon}{a}\sin\alpha.$$

Si la droite était de longueur infinie, son attraction serait dirigée suivant AP et égale à $\frac{2\mu\varepsilon}{a}$.

Cherchons la position d'équilibre d'un point M dans le

plan d'un triangle ABC dont les côtés sont homogènes et attirent suivant la loi de Newton. Soient 2α, 2β, 2γ les angles BMC, CMA, AMB; p, q, r les distances de M aux côtés; l'attraction du côté BC est de la forme $\frac{\lambda}{p}\sin\alpha$, et fait avec l'attraction de CA l'angle $\alpha+\beta$; écrivons que chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres :

$$\frac{\sin\alpha}{p\sin(\beta+\gamma)}=\frac{\sin\beta}{q\sin(\gamma+\alpha)}=\frac{\sin\gamma}{r\sin(\alpha+\beta)};$$

comme $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, on aura

$$p=q=r.$$

73. *Une droite rigide a ses extrémités* A, B *engagées dans des colliers fixes qui empêchent tout mouvement; un point* C *attire chacune des parties de la droite suivant la loi newtonienne; déterminer le point où la barre tend à se rompre.* (Université de Cambridge; 1854.)

Soient H le point demandé, $CO=c$ la perpendiculaire de C sur AB; x l'abscisse d'un point de la droite à partir de O; a, $-b$, h les abscisses de A, B, H; P, Q les composantes normales des réactions qui s'exercent en A et B. La somme des moments de P, Q et des attractions par rapport au point H est nulle; mais, si l'on considère seulement les forces qui agissent sur la partie HA, ce sont elles qui tendent à rompre la droite en H, et cela avec une énergie proportionnelle à la somme de leurs moments. Cette somme est évidemment de la forme

$$\begin{aligned}S&=\mu\int_h^a\frac{c(x-h)\,dx}{(c^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-P(a-h)\\&=\frac{\mu}{c}\left(\sqrt{c^2+h^2}-\frac{c^2+ah}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)-P(a-h).\end{aligned}$$

Si l'on suppose que H coïncide avec B ou si l'on fait $h = -b$, S doit être nul, parce qu'il comprendra les moments de toutes les forces qui agissent sur AB :

$$\frac{\mu}{c}\left(\sqrt{b^2+c^2} - \frac{c^2-ab}{\sqrt{a^2+c^2}}\right) - P(a+b) = 0.$$

Tirons P, et nous aurons pour la valeur générale de S

$$S = \frac{\mu}{c}\left[\sqrt{c^2+h^2} - \frac{c^2+ah}{\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{a-h}{a+b}\left(\sqrt{b^2+c^2} - \frac{c^2-ab}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)\right].$$

Il faut avoir la valeur de h qui rend S maximum; on égale à zéro $\frac{dS}{dh}$ et l'on trouve, en réduisant,

$$\frac{h}{\sqrt{c^2+h^2}} = \frac{\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{b^2+c^2}}{a+b} = \frac{CA - CB}{AB},$$

$$\cos CHO = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Le point H est entre les pieds de la médiane et de la bissectrice menées du sommet C dans le triangle ABC; en effet leurs distances au point O sont respectivement

$$c\cot CHO = \frac{c\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sqrt{\sin A\sin B}}, \quad \frac{c\sin(A-B)}{2\sin A\sin B}, \quad c\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(A-B),$$

et la première expression est comprise entre les deux autres.

74. *Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur, l'attraction étant inversement proportionnelle à la quatrième puissance de la distance.*

Soient x, y, z les coordonnées du point attiré A, et

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde. Posons

$$x_1 = x + u\cos\theta, \quad y_1 = y + u\sin\theta\cos\psi, \quad z = z_1 + u\sin\theta\sin\psi;$$

on peut écrire, pour les points à la surface de l'ellipsoïde,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\frac{1}{u^2}\\ &\quad+2\left(\frac{x\cos\theta}{a^2}+\frac{y\sin\theta\cos\psi}{b^2}+\frac{z\cos\theta\sin\psi}{c^2}\right)\frac{1}{u}+\ldots=0.\end{aligned}\right.$$

La composante de l'attraction suivant OX est

$$X=\mu\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\frac{du}{u^2}\sin\theta\cos\theta;$$

θ ne variant que de zéro à $\frac{\pi}{2}$, on doit, pour chaque valeur de θ et de ψ, faire varier u depuis zéro jusqu'à la racine positive u' de l'équation (1), et l'on retranche le résultat obtenu en faisant varier u de zéro à la racine négative u'' prise positivement. Pour éviter l'infini qui répondrait à $u=0$, on intégrera entre une valeur très-petite ε et u' ou $-u''$; on retire ainsi de l'ellipsoïde une sphère, évidemment sans action, ayant A pour centre et ε pour rayon, et cette sphère peut être tout entière dans l'ellipsoïde quand A est intérieur; l'intégrale relative à u sera

$$-\frac{1}{u'}+\frac{1}{\varepsilon}-\left(\frac{1}{u''}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=-\frac{1}{u'}-\frac{1}{u''};$$

on a la somme des racines de l'équation (1), et, en substituant, il vient

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)X$$
$$=2\mu\int\int\left(\frac{x\cos\theta}{a^2}+\frac{y\sin\theta\cos\psi}{b^2}+\ldots\right)\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\psi,$$

$$X=\frac{4}{3}\frac{\pi\mu x}{a^2}:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

Y et Z s'obtiennent par analogie. C'est Lejeune-Dirichlet qui a remarqué la possibilité d'exprimer en quantités finies l'attraction d'un ellipsoïde sur un point intérieur quand l'attraction est réciproque à une puissance $2m$ de la distance, $m > 1$. L'attraction sur un point de la surface est infinie, et, pour les points extérieurs, on la déduit du point intérieur à l'aide du théorème d'Ivory, généralisé par Poisson.

Calcul à l'aide du potentiel.

75. On sait que les trois composantes de l'attraction exercée sur un point sont les dérivées d'une même intégrale, qu'on appelle *fonction potentielle,* tant que du moins le point ne fait pas partie de la masse attirante. Soient $F(u)$ une fonction dont la dérivée $f(u)$ exprime la loi d'attraction, et $U = -\int\int\int F(u)\,dm$; on démontre qu'on a

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}.$$

Si, par le point attiré, on mène un arc infiniment petit ds, dont les projections soient dx, dy, dz, la composante de l'attraction suivant la direction ds sera

$$\frac{dU}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{ds} = \frac{dU}{ds};$$

le dernier quotient n'est pas une dérivée partielle, mais le rapport à ds de la différentielle de U répondant à ce déplacement du point x, y, z.

Les surfaces sur lesquelles U est constant sont dites *surfaces de niveau;* l'attraction en un de leurs points leur est normale.

76. *Calculer l'action d'un anneau sur un autre situé dans le plan et à l'intérieur du premier et passant par*

son centre; l'attraction est en raison inverse du cube de la distance. (WALTON.)

Soient O et A les deux centres, R et a les rayons, ε, ε' les densités, M un élément de l'anneau attiré, θ l'angle MOA, en sorte que la masse de M soit $2a\varepsilon' d\theta$; je pose

$$\mathrm{OM} = 2a\cos\theta = r,$$

et je cherche la fonction potentielle de l'anneau attirant; ici $\mathrm{F}(u) = -\frac{\mu}{2u^2}$; donc

$$\mathrm{U} = \mu a \mathrm{R}\varepsilon\varepsilon' d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\mathrm{R}^2 + r^2 - 2\mathrm{R}r\cos\varphi} = \frac{2\pi\mu a \mathrm{R}\varepsilon\varepsilon' d\theta}{\mathrm{R}^2 - r^2}.$$

L'attraction est dirigée suivant OM, et sa valeur $\frac{d\mathrm{U}}{dr}$ se calcule sans difficulté, car U varie seulement avec r. Faisant la somme de toutes ces attractions multipliées respectivement par $\cos\theta$, on a pour leur résultante, dirigée suivant OA,

$$\mathrm{F} = 16\pi\mu \mathrm{R} a^2 \varepsilon\varepsilon' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{(\mathrm{R}^2 - 4a^2\cos^2\theta^2)};$$

mais

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\mathrm{R}^2 - 4a^2\cos^2\theta} = \frac{\pi}{2\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}^2 - 4a^2}}.$$

Il suffit de différentier cette équation par rapport à $4a^2$, considéré comme un simple paramètre, pour avoir l'intégrale qui figure dans F :

$$\mathrm{F} = \frac{4\pi^2\mu a^2\varepsilon\varepsilon'}{(\mathrm{R}^2 - 4a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

77. *Un point est en équilibre au centre d'un octaèdre*

régulier dont les six sommets, de masses égales, l'attirent proportionnellement à la puissance n de la distance; déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équilibre est stable. (Licence, 1864.)

J'écarte légèrement le point A de sa position d'équilibre, et je cherche si la force à laquelle il est soumis tend à le rapprocher du centre O. Soient x, y, z les coordonnées très-petites du point A, a la distance de l'origine à un des sommets; ici $F(u) = \frac{\mu}{n+1} u^{n+1}$, et, si l'on pose $n+1 = 2p$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$,

$$-\frac{p}{\mu} U = (a^2 - 2ax + r^2)^p + (a^2 + 2ax + r^2)^p + (a^2 - 2ay + r^2)^p + \ldots + (a^2 + 2az + r^2)^p.$$

On développe chacun des termes par la formule du binôme, en abrégeant les calculs par symétrie, et l'on trouve, en rapprochant les termes du même ordre de grandeur,

$$U = -\mu a^{2p}\left[\frac{6}{p} + 2(2p+1)\frac{r^2}{a^2} + (p-1)(4p-5)\frac{r^4}{a^4} + \frac{4(p-1)(p-2)(p-3)}{3}\,\frac{x^4+y^4+z^4}{a^4} + \ldots\right].$$

Les composantes de la force qui sollicite A se trouvent par une simple dérivation; on a, par exemple,

$$X = \frac{dU}{dx} = -4\mu x a^{2p-2}\left[2p + 1 + (p-1)(4p-5)\frac{r^2}{a^2} + \frac{4(p-1)(p-2)(p-3)}{3}\,\frac{x^2}{a^2} + \ldots\right].$$

Si $2p + 1 > 0$ ou $n > -2$, X est de signe contraire à x, de même Y à y, Z à z, et le mobile est ramené vers l'origine; si $n < -2$, le mobile est tiré dans le sens opposé à l'origine, et l'équilibre est instable; pour $2p = -1$,

$n = -2$, ou la loi newtonienne, le premier terme disparaît, et il faut avoir recours aux suivants :

$$X = 14\mu x a^{-5}(5x^2 - 3r^2) = 14\mu x a^{-5}(2x^2 - 3y^2 - 3z^2),$$

cette expression pouvant être positive; le point s'éloigne de plus en plus dans certains cas, équilibre instable.

78. *Du potentiel proprement dit.*

Quand l'attraction est réciproque au carré de la distance, la fonction U devient le potentiel proprement dit

$$V = \int\int\int \frac{dm}{u}$$
$$= \int\int\int [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{-\frac{1}{2}} \varepsilon dx_1 dy_1 dz_1.$$

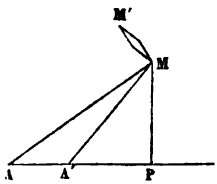
Une couche sphérique homogène étant sans action sur un point intérieur, son potentiel est constant à l'intérieur, et, en se plaçant au centre, on trouve que ce potentiel est $4\pi R\varepsilon dR$, R étant le rayon, dR l'épaisseur, ε la densité. A l'extérieur, il dépend de la distance r au centre, et est $\frac{4\pi R^2 \varepsilon dR}{r}$. Pour un point qui fait partie d'une sphère homogène de rayon a, le potentiel est

$$V = 4\pi\varepsilon\left(\int_0^r \frac{R^2 dR}{r} + \int_r^a R dR\right) = 2\pi\varepsilon a^2 - \frac{2}{3}\pi\varepsilon r^2.$$

Quand le point attiré fait partie de la masse attirante, on a toujours $\frac{dV}{dx} = X, \ldots$. La démonstration, très-simple pour un corps homogène, est délicate quand la densité varie. Voici, un peu abrégée, celle qu'a donnée M. Bouquet : soient A (*fig.* 6) le point attiré, A′ un point à une distance très-petite, a, de A sur une parallèle à OX; V, V′ les po-

tentiels relatifs à A, A′; on cherche $\lim \frac{V'-V}{a}$. Imaginons une très-petite sphère dont le centre est A : son attraction sur A est négligeable; la partie de $\frac{V'-V}{a}$ qui se rapporte au reste de la masse attirante est très-voisine de X, et il suffit

Fig. 6.



de prouver que la partie qui se rapporte au petit volume considéré, $\frac{V'_1-V_1}{a}$, est négligeable. Définissons la position d'un point quelconque par ses distances r, r' à A, A′, et l'angle ψ que fait le plan mené par AA′ et ce point avec un plan fixe. On peut décomposer un de ces plans azimutaux en parallélogrammes MM′, dont les côtés répondent aux valeurs r, $r+dr$, r', $r'+dr'$; l'aire de cet élément est $\frac{dr\,dr'}{\sin M}=\frac{rr'\,dr\,dr'}{a\times MP}$, et, quand il tourne autour de AA′, il donne un élément de volume $\frac{1}{a}rr'\,dr\,dr'\,d\psi$. Donc

$$V'_1-V_1=\frac{1}{a}\int\int\int\varepsilon(r-r')\,dr\,dr'\,d\psi<2\pi\varepsilon_1\int\int dr\,dr',$$

ε_1 étant la densité maximum dans la sphère, et $r-r'<a$. L'intégrale double est

$$\int_0^a dr\int_{a-r}^{a+r}dr'+\int_a^R dr\int_{r-a}^{r+a}dr'=2aR-a^2.$$

Donc $\frac{V'_1 - V_1}{a} < 2\pi R\varepsilon_1$ est négligeable quand R est très-petit.

Il me semble possible de rendre satisfaisante la méthode qui conduit de ce résultat à l'égalité

$$\Delta_2 V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varepsilon.$$

Soient toujours x, y, z le point attiré, x_1, y_1, z_1 un point de la masse attirante, non homogène; en faisant

$$x_1 = x + u\cos\theta, \quad y_1 = y + u\sin\theta\cos\psi, \quad z_1 = z + u\sin\theta\sin\psi,$$

on aura

$$X = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{u_1} \varepsilon\sin\theta\cos\theta\, du\, d\theta\, d\psi,$$

$$Y = \int\int\int \varepsilon\sin^2\theta\cos\psi\, du\, d\theta\, d\psi \ldots,$$

$\Delta_2 V$ est toujours égal à $\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$; les intégrales précédentes dépendent de x, y, z, à cause de ε et de u_1 à la surface, lequel varie avec x, y, z pour chaque valeur de θ et ψ. Les limites de θ et de ψ ne dépendant pas de x, y, z, on peut différentier, sous le signe $\int\int d\theta\, d\psi$,

$$\Delta_2 V = \int\int \sin\theta\, d\theta\, d\psi$$
$$\times\left(\cos\theta\frac{d}{dx}\int_0^{u_1}\varepsilon\, du + \sin\theta\cos\psi\frac{d}{dy}\int_0^{u_1}\varepsilon\, du + \cdots\right).$$

Soient ε_0, ε_1 la densité pour $u = 0$ et $u = u_1$; la parenthèse peut se développer :

$$\int_0^{u_1} du\left(\cos\theta\frac{d\varepsilon}{dx} + \sin\theta\cos\psi\frac{d\varepsilon}{dy} + \sin\theta\sin\psi\frac{d\varepsilon}{dz}\right)$$
$$+ \varepsilon_1\left(\cos\theta\frac{du_1}{dx} + \sin\theta\cos\psi\frac{du_1}{dy} + \cdots\right);$$

mais, si

$$\varepsilon = F(x_1, y_1, z_1) = F(x + u\cos\theta, y + u\sin\theta\cos\psi, \ldots),$$

on a

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{d\varepsilon}{dy} = \frac{dF}{dy_1}, \ldots,$$

$$\frac{d\varepsilon}{du} = \cos\theta\frac{dF}{dx_1} + \sin\theta\cos\psi\frac{dF}{dy_1} + \cdots;$$

le coefficient de du, sous le signe $\int$, est par conséquent égal à $\frac{d\varepsilon}{du}$, et l'intégrale à $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$. Pour former le coefficient de ε_1 dans la partie tout intégrée, écrivons l'équation de la surface

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \varphi(x + u_1\cos\theta, y + u_1\sin\theta\cos\psi \ldots) = 0.$$

On a, par la règle des fonctions implicites,

$$\frac{du_1}{dx} = -\frac{\varphi'_{x_1}}{\cos\theta\varphi'_{x_1} + \sin\theta\cos\psi\varphi'_{y_1} + \ldots}, \quad \frac{du_1}{dy} = -\frac{\varphi'_{y_1}}{\cos\theta\varphi'_{x_1} + \ldots};$$

il en résulte, en substituant, que le coefficient de ε_1 est -1, et il reste

$$\Delta_2 V = \int\int -\varepsilon_0 \sin\theta\, d\theta\, d\psi = -4\pi\varepsilon_0.$$

79. *Composer les attractions exercées par un anneau homogène* A *sur un anneau très-petit* B *ayant même centre, et dont le plan fait avec celui du grand l'angle* α.

Il est facile de voir, par des raisons de symétrie, que les forces appliquées aux divers points du petit anneau se réduisent à un couple dont l'axe est l'intersection des deux plans. Prenons pour axe des x la partie de cette droite qui est dirigée vers le nœud ascendant, l'axe des y étant dans le plan du grand anneau. Soient x, y, z les coordonnées d'un élément dm de B, r le rayon de B, ε la densité de A;

son potentiel par rapport à dm est

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{\mu\, dm\, R\varepsilon\, d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2R(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + r^2}}$$

$$= 2\pi\varepsilon\mu\, dm\left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{4R^2} + \cdots\right),$$

$$X = \frac{\pi\mu\varepsilon\, dm}{R^2}x, \quad Y = \frac{\pi\mu\varepsilon\, dm}{R^2}y, \quad Z = -\frac{2\pi\mu\varepsilon\, dm}{R^2}z.$$

Si $dm = r\varepsilon' d\varphi_1$, on trouve, pour le moment du couple cherché,

$$L = \Sigma(yZ - zY) = -3\frac{\pi^2\mu\varepsilon\varepsilon' r^3 \sin\alpha\cos\alpha}{R^2}$$

$$= -\frac{3}{4}\mu M m \frac{r^2}{R^3}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Le plan de B est sollicité de manière à se rapprocher de celui de A.

80. *Déterminer le potentiel d'une masse sphérique indéfinie, la densité étant e^{-r} à la distance r du centre.*

V est fonction de r seul, en sorte que

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dV}{dr}, \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{dV}{dr} + \frac{x^2}{r^2}\frac{d^2V}{dr^2},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} = -4\pi e^{-r}.$$

On multiplie par r^2, et le premier membre devient la dérivée de $r^2\frac{dV}{dr}$, qui doit être nul pour $r = 0$:

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi}{r^2}\int_0^r r^2 e^{-r} dr = 4\pi\left[e^{-r} + 2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-r} - \frac{2}{r^2}\right].$$

Telle est la valeur de l'attraction dirigée vers le centre.

Intégrons encore

$$V = 4\pi\left(-e^{-r} - \frac{2}{r}e^{-r} + \frac{2}{r} + C\right);$$

pour $r = 0$, on a directement

$$V = 4\pi\int_0^\infty r^2 e^{-r} dr = 8\pi;$$

on en conclut que c est nul, et l'on a le potentiel pour un point quelconque.

EXERCICES.

En supposant l'attraction newtonienne, calculer l'attraction de l'aire comprise entre la lemniscate $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ et le cercle de rayon $a \sin\varphi$, sur le point double de la lemniscate : $\mu\left(L \cot\frac{1}{2}\varphi - \cos\varphi\right)$.

Attraction d'une lame rectangulaire sur un point quelconque.

Déterminer la forme d'un solide de masse donnée, de manière qu'il exerce sur un point une attraction maximum. La composante de l'action d'une molécule dm de la surface estimée suivant une direction fixe doit être constante, quelle que soit la position de dm.

Relation entre les potentiels d'une couche sphérique sur un point extérieur et intérieur.

CINÉMATIQUE.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

Vitesse et accélération.

Je me bornerai à quelques remarques sur la vitesse et l'accélération. Un mouvement qui ne peut être défini par des formules analytiques connues peut être utilement représenté par certaines courbes : prenons des abscisses $x = at$, des ordonnées $y = cs$, s étant le chemin parcouru au temps t, a la longueur qui représente l'unité de temps, c le rapport par lequel sont multipliés les espaces, on a la courbe représentative des espaces; la vitesse est égale à $\frac{a}{c}\frac{dy}{dx}$; l'accélération tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{a^2}{c}\frac{d^2y}{dx^2}$; or $\frac{d^2y}{dx^2}$ est l'inverse du paramètre de la parabole osculatrice à la courbe figurative et dont l'axe est parallèle à OY. Dans le procédé de M. Morin pour étudier la chute des corps, la courbe est elle-même une parabole, $a = R\omega$, $c = 1$, et l'accélération est $\frac{R^2\omega^2}{p}$.

L'accélération totale γ est égale au carré de la vitesse divisé par la demi-corde qu'elle-même intercepte dans le cercle osculateur de la trajectoire.

On sait qu'elle est dirigée dans le plan osculateur et que

sa projection sur la normale principale est $\frac{v^2}{\rho}$; soit i l'angle de γ avec la normale, on a

$$\frac{v^2}{\rho} = \gamma \cos i, \quad \gamma = \frac{v^2}{\rho \cos i}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons la parabole décrite par un projectile dont la vitesse horizontale est a; la vitesse à un moment quelconque est $\frac{a}{\cos i}$, puisque son angle avec l'horizontale est égal à celui de la normale et de l'accélération, toujours verticale : la corde interceptée dans le cercle osculateur en chaque point par la direction de la pesanteur, c'est-à-dire par le diamètre correspondant, est donc $\frac{2a^2}{g \cos^2 i}$. Au sommet cette corde est $2p = \frac{2a^2}{g}$: donc elle est, en général, $\frac{2p}{\cos^2 i}$, quatre fois la distance du foyer au point d'où elle part : le centre de courbure en un point d'une parabole se projette sur le diamètre correspondant à une distance double de la distance focale. (Maclaurin.)

Dans le mouvement d'un point libre, la force qui agit et l'accélération dépendent si simplement l'une de l'autre que la plupart des questions se rattachent aussi bien à la Dynamique qu'à la Cinématique. Je traiterai ici les problèmes où l'on étudie un mouvement connu *a priori*, et je renverrai à la Dynamique la recherche du mouvement produit par une force donnée, ou, ce qui est la même chose, répondant à une accélération connue. Rappelons les formules qui donnent les composantes de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires.

Soient, dans le plan, r le rayon vecteur, θ son angle avec l'axe polaire; les projections de la vitesse sur le rayon vecteur et sur une perpendiculaire sont $\frac{dr}{dt}$ et $r\frac{d\theta}{dt}$; on les

appelle *vitesses de glissement* et de *circulation* : leur résultante est la vitesse. Les projections de l'accélération totale sont, sur le rayon vecteur,

$$\gamma_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

sur la perpendiculaire,

$$\gamma_n = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Dans l'espace, appelons r le rayon vecteur, θ son angle avec une droite fixe OZ, ψ l'angle du plan méridien mené par OZ et le point avec un plan méridien fixe, et projetons : 1° sur le rayon vecteur ; 2° sur la normale extérieure au cône droit d'angle θ ; 3° sur la perpendiculaire élevée au plan méridien du côté où ψ augmente ; nous aurons, pour les projections de la vitesse,

$$v_r = \frac{dr}{d\theta}, \quad v_n = r\frac{d\theta}{dt}, \quad v_m = r\sin\theta\frac{d\psi}{dt};$$

pour les projections de l'accélération,

$$\gamma_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} - r\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2},$$

$$\gamma_n = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - r\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2},$$

$$\gamma_m = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\right).$$

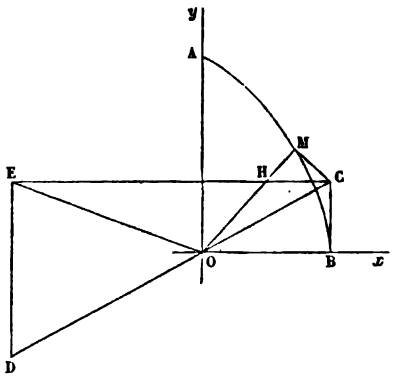
Ces projections ont pour résultante soit la vitesse, soit l'accélération.

82. *Étant donnés (fig. 7) deux axes rectangulaires, un point* M *situé d'abord sur l'axe des x se meut de telle sorte que son ordonnée et l'angle de son rayon vecteur*

sur OX *croissent proportionnellement au temps, et que le mobile vienne sur* OY *à la distance a de l'origine; trouver la trajectoire, la vitesse en chaque point, l'accélération et le rayon de courbure.*

L'équation de la trajectoire en coordonnées polaires

Fig. 7.



s'obtient immédiatement; l'angle décrit par le rayon vecteur étant $\frac{\pi}{2}$ quand l'ordonnée est a, on a

$$\frac{y}{\theta} = \frac{2a}{\pi}, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{2a\theta}{\pi \sin\theta}.$$

C'est la quadratrice de Dinostrate : le rayon vecteur est d'abord $\frac{2a}{\pi}$, et il croît jusqu'à devenir infini pour $\theta = \pi$; il a une asymptote ($y = 2a$), puis une branche allant de cette asymptote à l'asymptote $y = 4a$, et ainsi de suite.

Soit ω la vitesse angulaire du rayon vecteur : la projection de la vitesse de M sur une perpendiculaire à ce rayon est ωOM; sa projection sur OY est

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2a}{\pi}\frac{d\theta}{dt} = \omega \mathrm{OB}.$$

On n'a pas ainsi deux composantes de la vitesse; mais si, en M, on élève une perpendiculaire sur OM égale à ωOM, une parallèle à OY égale à ωOB, et si, aux extrémités de ces droites, on leur mène des perpendiculaires, celles-ci se coupent en un point V tel que $MV = v$; la figure ainsi formée a ses lignes perpendiculaires et proportionnelles à celles du quadrilatère OMCB; il en résulte que la vitesse en M est perpendiculaire à OC, et égale à ωOC, ce qui donne la tangente à la quadratrice.

L'accélération est parallèle à l'axe des x; or $x = \frac{2a}{\pi}\theta\cot\theta$: donc

$$\gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4a}{\pi}\frac{\omega^2}{\sin^2\theta}(\theta\cot\theta - 1) = -\frac{2\omega^2}{\sin^2\theta}\left(\frac{2a}{\pi} - x\right).$$

Comme MCH est le complément de θ, on voit aisément que

$$MC = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{2a}{\pi} - x\right), \quad HC = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{2a}{\pi} - x\right),$$

$$\gamma = -2\omega^2 HC.$$

On a une représentation géométrique de l'accélération, et l'on en peut déduire le rayon de courbure de la quadratrice. La corde interceptée par la direction de l'accélération dans le cercle de courbure est, comme on l'a dit (81),

$$\frac{2v^2}{\gamma} = \frac{\overline{OC}^2}{HC} = CE,$$

en faisant l'angle COE égal à CHO; d'ailleurs CO est parallèle à la normale en M; donc la perpendiculaire DE sur EC coupera CO en un point D tel, que CD sera égale au diamètre du cercle osculateur en M. En B, la valeur de γ est $\frac{4a\omega^2}{3\pi}$, et l'on trouve $\rho = \frac{3}{2}$OB.

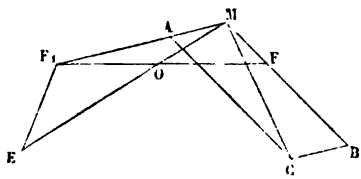
La quadratrice n'est pas rectifiable, mais l'aire de AOB peut se calculer au moyen d'intégrations par parties :

$$A = \frac{2a^2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta^2}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{2a^2}{\pi}\,L2.$$

83. *Un point parcourt avec une vitesse constante une lemniscate de Bernoulli; trouver son accélération et en déduire le centre de courbure en chaque point de la courbe.*

Étant donnés (*fig.* 8) deux foyers F, F_1 dont la distance est $2a$, la lemniscate est le lieu des points M tels que

Fig. 8.



$MF.MF_1 = a^2$. Prenons pour axe des x et des y FF_1 et la perpendiculaire en son milieu O; l'équation de la courbe sera

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 + 2a^2(y^2-x^2) = 0.$$

Je désignerai par des lettres accentuées les dérivées par rapport au temps. Comme on a $v^2 = x'^2 + y'^2$, il vient

$$x'x'' + y'y'' = 0, \quad \frac{x''}{y'} - y'' = \frac{yx'' - xy''}{yy' + xx'}.$$

On est conduit à calculer $xx' + yy'$ et $yx' - xy'$; si l'on

différentie l'équation (1), on en conclut

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x'}{y(x^2+y^2+a^2)} &= \frac{y'}{x(a^2-x^2-y^2)} = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\pm a^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{xx'+yy'}{2a^2xy} = \frac{yx'-xy'}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}\right.$$

Je suppose le sens du mouvement tel que le radical doive être précédé du signe +, et je tire de ces formules

$$yx'-xy' = \frac{v}{2a^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$yx''-xy'' = \frac{3}{2}\frac{v}{a^2}(xx'+yy')\sqrt{x^2+y^2}.$$

Les premières équations en x'', y'' donnent alors

$$x'' = \frac{3}{2}\frac{vy'}{a^2}\sqrt{x^2+y^2},\quad y'' = -\frac{3}{2}\frac{vx'}{a^2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

On en conclut

$$\gamma = \frac{3}{2}\frac{v^2}{a^2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Mais, si l'on remplace x' et y' par leurs valeurs (2), et si l'on observe qu'en faisant $MF = r$, $MF_1 = r_1$, on a

$$x^2+y^2+a^2 = \frac{1}{2}(r^2+r_1^2),\quad 4ax = r_1^2-r^2,\quad rr_1 = a^2,$$

$$x'' = \frac{3}{2}\frac{v^2x}{a^4}(a^2-x^2-y^2) = \frac{3}{4}\frac{v^2}{a^4}[4a^2x-2(x^2+y^2+a^2)x]$$

$$= \frac{3}{4}v^2\left(\frac{a-x}{r^2}-\frac{a+x}{r_1^2}\right),$$

$$y'' = -\frac{3}{4}\frac{v^2}{a^4}y(2x^2+2y^2+2a^2) = -\frac{3}{4}v^2\left(\frac{y}{r^2}+\frac{y}{r_1^2}\right).$$

L'accélération totale peut se décomposer en deux autres $\frac{3}{4}\frac{v^2}{r}$, $\frac{3}{4}\frac{v^2}{r_1}$, suivant MF et MF_1; faisons un parallélogramme

sur $MA = MF$ et $MB = MF_1$; la diagonale MC est dirigée suivant la normale, puisque l'accélération est centripète. On a vu $\gamma = \frac{3}{2}\frac{v^2}{a^2}OM$; le rayon de courbure est donc

$$\frac{2}{3}\frac{a^2}{OM} = \frac{2}{3}OE,$$

en faisant l'angle $EF_1M = F_1MF$.

84. *Quand un mobile se meut dans un plan et que son accélération totale est constamment dirigée vers le centre de courbure de la développée de la trajectoire, l'aire comprise entre un rayon de courbure fixe, une autre variable et l'arc de la développée correspondant croît proportionnellement au temps.* (NICOLAÏDÈS.)

Soient ds l'arc infiniment petit parcouru par le mobile à partir d'une position M, ρ le rayon de courbure correspondant; la différentielle de l'aire considérée est $\frac{1}{2}\rho\, ds$, et il s'agit de prouver qu'elle est égale à dt multiplié par une constante. Supposons $\frac{dv}{dt}$ positif; il faut que le centre de courbure de la développée soit, par rapport à la normale en M, du même côté que ds; l'arc infiniment petit de la développée est égal à $-d\rho$; son angle de contingence, égal à celui de la courbe, est $\frac{ds}{\rho}$; son rayon de courbure est $\rho_1 = -\frac{\rho\, d\rho}{ds}$; on a

$$(1) \qquad \frac{\gamma_t}{\gamma_c} = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad \frac{\rho\, dv}{v^2\, dt} = -\frac{d\rho}{ds}$$

ou

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0, \quad v\rho = \rho\frac{ds}{dt} = c, \quad \rho\, ds = c\, dt.$$

Si $\frac{dv}{dt} < 0$, c'est dans le premier membre de la formule (1) qu'on a le signe —; mais la suite est identique.

85. *Étudier le mouvement d'un point qui décrit une hélice sur un cylindre vertical dont la base est une ellipse horizontale : le point se déplace de telle sorte que l'aire décrite par la projection horizontale du rayon vecteur issu du centre croisse proportionnellement au temps.*

Prenons pour axes des x et des y les axes de l'ellipse, pour axe des z l'axe du cylindre; on peut représenter l'x et l'y du mobile par

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi;$$

l'aire élémentaire décrite par la projection du rayon vecteur $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ étant proportionnelle à dt, on doit avoir $\varphi = \omega t$, ω étant constant. Alors

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\varphi = -\frac{a}{b}\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = b\omega\cos\varphi = \frac{b}{a}\omega x.$$

Soient M la position du mobile, m sa projection sur le plan xy, p la distance du centre de l'ellipse à la tangente en m; la projection horizontale de la vitesse est

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = ab\omega\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \frac{ab\omega}{p}.$$

Comme la trajectoire doit couper les génératrices sous un angle constant i, on a

$$\frac{dz}{dt} = \cot i\,\frac{ab\omega}{p} \quad \text{et} \quad v = \frac{ab\omega}{p\sin i}.$$

z ne peut s'exprimer en fonction du temps qu'à l'aide d'une intégrale elliptique, ce qui était évident *a priori*.

Les projections de l'accélération sur les axes sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{p\omega^2(a^2-b^2)xy}{a^2b^2}\cot i;$$

l'accélération rencontre l'axe du cylindre, et sa projection horizontale est proportionnelle à la distance du mobile à l'axe. Soient α, β, i les angles de la tangente avec les axes, λ, μ, ν ceux de la normale principale; on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{\rho}\cos\lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\beta + \frac{v^2}{\rho}\cos\mu, \ldots.$$

Or

$$\cos\alpha = -\frac{py\sin i}{b^2}, \quad \cos\beta = \frac{px\sin i}{a^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{p\omega^2(a^2-b^2)xy}{a^2b^2\sin i}.$$

On peut tirer des équatious précédentes

$$\frac{\cos\lambda}{\rho} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dv}{dt}\cos\alpha\right) = -\frac{p^4x\sin^2 i}{a^4b^2},$$

$$\frac{\cos\mu}{\rho} = -\frac{p^4y\sin^2 i}{a^2b^4}, \quad \frac{\cos\nu}{\rho} = 0,$$

d'où

$$\rho = \frac{a^2b^2}{p^2\sin^2 i}, \quad \cos\lambda = -\frac{px}{a^2}, \quad \cos\mu = -\frac{py}{b^2}, \quad \cos\nu = 0.$$

En supposant $i = \frac{\pi}{2}$, la trajectoire devient l'ellipse de base, dont on trouve ainsi le rayon de courbure; il a avec le rayon de courbure de l'hélice une relation analogue à celle qui lie le rayon d'un cercle au rayon de courbure d'une hélice qui se projette suivant ce cercle. La normale principale de l'hélice elliptique est parallèle à la normale correspondante de l'ellipse de base.

86. *Démontrer qu'on peut régler la loi du mouvement d'un point sur une hyperbole de manière que l'accéléra-*

tion totale soit la résultante de deux accélérations dirigées suivant les rayons vecteurs et inversement proportionnelles aux carrés de ces rayons; étudier le mouvement.

Soit l'hyperbole

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

en différentiant par rapport au temps, on a deux relations entre les composantes de la vitesse et de l'accélération suivant les axes :

$$(2) \qquad \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} + \frac{xx''}{a^2} - \frac{yy''}{b^2} = 0.$$

Supposons que le mobile soit sur la branche de droite, et nommons e l'excentricité de l'hyperbole, r, r_1 les rayons vecteurs; on a

$$r = ex - a, \quad r_1 = ex + a;$$

on doit avoir aussi, par hypothèse,

$$(3) \qquad \begin{cases} x'' = -\mu \dfrac{x - ae}{(ex - a)^3} - \mu \dfrac{x + ae}{(ex + a)^3}, \\ y'' = -\mu \dfrac{y}{(ex - a)^3} - \mu \dfrac{y}{(ex + a)^3}. \end{cases}$$

Il faut que ces équations soient compatibles avec l'équation (1) et avec ses conséquences (2); or, si, dans la seconde équation (2), on remplace y' et y par leurs valeurs (1) et (2), puis x'' et y'' par leurs valeurs (3), on trouve

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{x^2 x'^2}{a^2(x^2 - a^2)} - \frac{\mu x}{a^2}\left[\frac{x - ae}{(ex - a)^3} + \frac{x + ae}{(ex + a)^3}\right]$$
$$+ \mu\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\left[\frac{1}{(ex - a)^3} + \frac{1}{(ex + a)^3}\right] = 0$$

ou

$$(4)\qquad x'^2 = \frac{\mu(x^2 - a^2)}{a}\left[\frac{1}{(ex-a)^2} - \frac{1}{(ex+a)^2}\right].$$

Cette équation doit être compatible avec la première du groupe (3) : on s'en assure en différentiant la valeur de x'^2 par rapport au temps, et, divisant les deux membres par $2x'$, on retombe sur l'équation (3).

La loi des positions du mobile sur la courbe sera donnée par l'équation (4)

$$x'^2 = \frac{4e\mu x(x^2 - a^2)}{(e^2x^2 - a^2)^2}.$$

On en conclut

$$y'^2 = \frac{4e\mu(e^2 - 1)x^3}{(e^2x^2 - a^2)^2}.$$

Au sommet, la vitesse est $2\sqrt{\frac{e\mu}{a(e^2-1)}}$, en sorte qu'un point animé de cette vitesse initiale et soumis à des forces produisant l'accélération donnée décrira l'hyperbole. La valeur de t s'obtient à l'aide d'une quadrature

$$t = \frac{1}{2\sqrt{e\mu}}\int_a^x \frac{(e^2x^2 - a^2)dx}{\sqrt{x(x^2 - a^2)}}.$$

Intégrant $\frac{x^2dx}{\sqrt{x(x^2-a^2)}}$ par parties et réduisant, on trouve

$$t = \frac{e}{3}\sqrt{\frac{e}{\mu}}\sqrt{x(x^2 - a^2)} + a^2\frac{e^2 - 3}{6\sqrt{e\mu}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x(x^2 - a^2)}}.$$

On a une intégrale elliptique de première espèce, mais elle disparaît pour $e = \sqrt{3}$; alors

$$x(x^2 - a^2) = \mu t^2\sqrt{3}.$$

87. *Étudier le mouvement d'un point qui décrit avec une vitesse constante une loxodrome, c'est-à-dire une courbe tracée sur une sphère et coupant tous les méridiens sous un angle constant* λ.

Cherchons l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires. Soient a le rayon de la sphère, M, M′ deux points infiniment voisins sur la loxodrome, P le point de rencontre du parallèle de M avec le méridien de M′; MPM′ peut être assimilé à un triangle rectiligne rectangle; or $M'P = a\,d\theta$, $MP = a \sin\theta\, d\psi$, $MM' = ds$, angle $MM'P = \lambda$; on a donc

$$\tang\lambda = \frac{MP}{M'P} = \frac{\sin\theta\, d\psi}{d\theta}, \quad \frac{d\theta}{\sin\theta} = \cot\lambda\, d\psi.$$

Intégrant et désignant par α la valeur de θ pour $\psi = 0$, on a pour la loxodrome

$$\tang\frac{1}{2}\theta = \tang\frac{1}{2}\alpha e^{\psi\cot\lambda}.$$

La courbe forme sur la sphère une infinité de spires qui s'approchent indéfiniment du pôle et du point diamétralement opposé. Comme $ds\cos\lambda = a\,d\theta$, d'après le triangle MM′P, on voit que la courbe est rectifiable, et sa longueur d'un point asymptote à l'autre est finie et égale à $\frac{\pi a}{\cos\lambda}$.

La vitesse v est constante et a une direction connue; elle donne

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v\cos\lambda}{a}, \quad \sin\theta\frac{d\psi}{dt} = \frac{v\sin\lambda}{a}.$$

Si l'on se reporte aux valeurs des composantes de l'accélération rappelées au commencement de ce Chapitre, on trouve qu'elles sont ici

$$\gamma_r = -\frac{v^2}{a}, \quad \gamma_n = -\frac{v^2}{a}\cot\theta\sin^2\lambda, \quad \gamma_m = \frac{v^2}{a}\cot\theta\sin\lambda\cos\lambda,$$

d'où

$$\gamma = \frac{v^2}{a}\sqrt{1 + \cot^2\theta \sin^2\lambda}.$$

L'accélération devient infinie quand le mobile s'approche d'un de ses points asymptotiques. Dans toutes les positions elle est centripète; soient donc O le centre de la sphère, C le centre de courbure, P le pôle, A le point où OC coupe la sphère, et φ la mesure de l'arc MA. Le théorème de Meunier prouve que OCM est droit. Or

$$\cos \mathrm{OMC} = \sin\varphi = \frac{-\gamma_r}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\theta \sin^2\lambda}}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\theta}{\sin\lambda}.$$

L'angle $\mathrm{AMP} = \frac{\pi}{2} - \lambda$; donc le triangle AMP est rectangle en P, et l'on a la règle suivante pour construire le rayon de courbure en un point M de la loxodrome :

On mène le méridien PA perpendiculaire au méridien du point M, et on le prolonge jusqu'à sa rencontre en A avec l'arc MA normal à la courbe : le centre de courbure est au pied de la perpendiculaire abaissée de M sur OA.

Accélération centrale.

88. Quand un mobile parcourt une trajectoire plane, il peut arriver que l'aire décrite par les rayons vecteurs issus d'un point O du plan croisse proportionnellement au temps; c'est un cas particulier très-important; l'accélération totale est toujours dirigée vers le point O, et la réciproque est vraie. En voici une démonstration géométrique assez précise : il est clair que la vitesse aréolaire est $\frac{1}{2}vp$, p étant la distance du pôle à la tangente à la trajectoire :

Soient (*fig.* 9) deux tangentes infiniment voisines CP, CQ, sur lesquelles je prends CA, CB égales aux vitesses

correspondantes; abaissons les perpendiculaires OP, OQ, on a

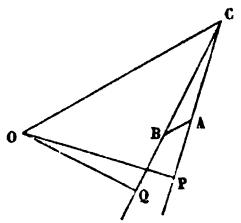
$$CA \times OP = CB \times OQ;$$

les triangles CBA, OPQ sont semblables :

$$\text{angle } CBA = OPQ = OCQ,$$

les points O, Q, P, C étant sur un cercle; AB est parallèle

Fig. 9.



à CO. Or à la limite AB prend la direction de l'accélération totale, CO celle du rayon vecteur du point où la tangente est CP.

Pour la réciproque, on suppose que AB fasse un angle infiniment petit avec CO; ABC, QPO seront semblables, parce que leurs angles sont infiniment près d'être égaux, et l'on aura, en négligeant des infiniment petits du second ordre,

$$CA \times OP = CB \times OQ.$$

Soit $\frac{1}{2}c^2$ l'aire décrite dans l'unité de temps; en prenant des coordonnées polaires, on aura

$$r^2 d\theta = c^2 dt,$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c^2}{r^2}, \quad v^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = c^4 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right].$$

En prenant θ pour variable indépendante, remplaçant dans $\gamma_r\, dt$ par $\frac{r^2 d\theta}{c^2}$; et comptant comme positive l'accélération dirigée vers le pôle, on a

$$\gamma = \frac{c^4}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) = -\frac{d\frac{1}{2}v^2}{dr}.$$

Cette dernière expression se retrouvera comme cas particulier du théorème des forces vives. Soit μ l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, l'accélération centripète est

$$\frac{v^2}{\rho} = \gamma \sin\mu;$$

or $c^2 = pv = vr\sin\mu$; donc

$$\gamma = \frac{v^2}{\rho\sin\mu} = \frac{c^4}{p^2\rho\sin\mu} = \frac{c^4}{r^2\rho\sin^3\mu}.$$

Cette expression a été donnée par Newton; en la rapprochant de la précédente, on a l'expression générale du rayon de courbure

$$\frac{1}{\rho} = \sin^3\mu\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^3}\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right).$$

On voit que dans une conique $\rho\sin^3\mu = \frac{b^2}{a}$.

89. *Un mobile parcourt une ellipse de manière que l'aire décrite par le rayon vecteur issu d'un point* O *croisse proportionnellement au temps; exprimer l'accélération du mobile.*

Considérons le cercle dont la projection est l'ellipse donnée; o est la projection d'un point O du cercle, la posi-

tion m du mobile est la projection d'un point M du cercle. Soient M′ le second point de rencontre du cercle avec OM, DD′ le diamètre parallèle à OM, $\frac{1}{2}C^2$ l'aire décrite par OM dans l'unité de temps, Γ l'accélération de M; on trouve, a et b étant les demi-axes de l'ellipse,

$$\Gamma = \frac{C^4}{r^2\rho\sin^3\mu} = \frac{8C^4a^3}{a\overline{OM}^2\,\overline{MM'}} = \frac{C^4}{8a^4}\,\frac{\overline{DD'}^6}{\overline{OM}^2\,\overline{MM'}^3}.$$

Soient i l'angle de MM′ avec sa projection mm', dd' la projection de DD′, $\frac{1}{2}c^2$ la vitesse aréolaire de m; on a

$$\gamma = \Gamma\cos i, \quad \frac{dd'}{DD'} = \frac{om}{OM} = \frac{mm'}{MM'} = \cos i, \quad \frac{C^2}{c^2} = \frac{a}{b},$$

d'où

$$\gamma = \frac{c^4}{8a^2b^2}\,\frac{\overline{dd'}^6}{\overline{om}^2\,\overline{mm'}^3}.$$

Cette expression, donnée par M. Withworth (*Cambridge and Dublin Messenger*, 1871), se simplifie dans des cas particuliers. Prenons o au centre, $dd' = mm' = 2\,om$,

$$\gamma = \frac{c^4}{a^2b^2}\,om.$$

Prenons o au foyer; soit θ l'angle de mm' avec l'axe focal, on a

$$mm' = \frac{2b^2}{a(1-e^2\cos^2\theta)}, \quad \overline{dd'}^2 = \frac{4b^2}{1-e^2\cos^2\theta}, \quad \gamma = \frac{c^4a}{b^2}\,\frac{1}{\overline{om}^2}.$$

Enfin, quand o est sur l'ellipse,

$$\gamma = \frac{c^4}{8a^2b^2}\,\frac{\overline{dd'}^6}{\overline{om}^5}.$$

90. *Un point décrit la podaire, lieu des projections du centre d'une ellipse sur ses tangentes, de manière que la vitesse aréolaire par rapport au centre soit constante,* $\frac{1}{2}c^2$; *exprimer pour chaque position la vitesse et l'accélération du mobile : rayon de courbure.*

En prenant pour axe le grand axe de l'ellipse, l'équation de la podaire sera

$$r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta.$$

L'expression du carré de la vitesse dans cette espèce de mouvement donne

$$v^2 = c^4\frac{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^3};$$

en ajoutant au numérateur $a^2b^2\sin^2\theta + a^2b^2\cos^2\theta - a^2b^2$, il vient

$$v^2 = c^4\frac{(a^2+b^2)(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) - a^2b^2}{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)^3} = c^4\left(\frac{a^2+b^2}{r^4} - \frac{a^2b^2}{r^6}\right).$$

La formule qui donne le plus vite l'accélération est

$$\gamma = -\frac{d\frac{1}{2}v^2}{dr} = c^4\left(2\frac{a^2+b^2}{r^5} - 3\frac{a^2b^2}{r^7}\right).$$

Comme il est évident que, θ croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, $r^2 = a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\theta$ décroît de a^2 à b^2, pour croître ensuite, γ varie de $(2a^2 - b^2)\frac{c^4}{a^5}$ à $(2b^2 - a^2)\frac{c^4}{b^5}$; elle est d'abord positive, et la courbe concave vers le pôle; mais, si $a^2 > 2b^2$, γ devient négative et la courbe tourne sa convexité vers le pôle : il y a une inflexion, et la podaire a une partie rentrante. Pour calculer le rayon de courbure, nous

prendrons

$$\sin\mu = \frac{1}{v} r \frac{d\theta}{dt} = \frac{c^2}{vr}, \quad \rho = \frac{v^2}{\gamma \sin\mu} = \frac{[(a^2+b^2)r^2 - a^2b^2]^{\frac{3}{2}}}{r[2(a^2+b^2)r^2 - 3a^2b^2]}.$$

91. *Un point se meut de manière que sa vitesse soit proportionnelle à la puissance $n-1$ du rayon vecteur, et que la vitesse aréolaire de ce rayon soit constante : déterminer la trajectoire et l'accélération.*

On a, par hypothèse,

$$v = \lambda r^{n-1}, \quad r^2 d\theta = c^2 dt;$$

l'accélération est

$$\gamma = -\frac{1}{2}\frac{d.v^2}{dr} = -(n-1)\lambda^2 r^{2n-3}.$$

L'équation différentielle de la trajectoire est fournie par la valeur de v^2

$$v^2 = c^4\left(\frac{1}{r^4}\frac{dr^2}{d\theta^2} + \frac{1}{r^2}\right) = \lambda^2 r^{2n-2},$$

$$d\theta = \frac{c^2\,dr}{r\sqrt{\lambda^2 r^{2n} - c^4}}, \quad n\,d\theta = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{c^4}{r^{2n}}}}\,d\frac{c^2}{r^n}.$$

Intégrant,

$$n(\theta - \alpha) = \text{arc}\cos\frac{c^2}{\lambda r^n}, \quad r^n = \frac{c^2}{\lambda\cos n(\theta-\alpha)}.$$

Ces courbes dérivent de la droite par une transformation spéciale. M. Roberts a remarqué que, si l'on change α en β, les courbes se coupent sous l'angle $\beta - \alpha$; si l'on suppose $n = 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$, on a une hyperbole équilatère, une parabole, une cardioïde, un cercle passant au pôle; l'accélération est proportionnelle respectivement aux puissances $1, -2, -4, -5$ du rayon vecteur. Pour $n = \frac{3}{2}$,

γ est constant, et la trajectoire est une courbe du sixième ordre, avec trois asymptotes se coupant au pôle sous des angles de 120 degrés.

Le cas de $n = 0$, la vitesse étant réciproque à r, donne une intégrale différente; on a

$$d\theta = \frac{c^2 dr}{r\sqrt{\lambda^2 - c^4}}, \quad r = r_0 e^{\theta \frac{c^2}{\sqrt{\lambda^2 - c^4}}}.$$

La trajectoire est une spirale logarithmique, et l'accélération réciproque au cube de la distance au pôle.

La position du mobile sur sa trajectoire est donnée dans tous les cas par la formule

$$r^2 d\theta = c^2 dt,$$

qu'on intègre en remplaçant r par sa valeur en θ.

EXERCICES.

Un point A parcourt uniformément une droite; un autre mobile M se meut de manière que la tangente à sa trajectoire rencontre toujours le point A et que MA soit de longueur constante. Trouver la trajectoire du point M, sa vitesse, son accélération, le rayon de courbure de la trajectoire. La trajectoire se nomme *tractrice;* en appelant a la longueur AM, c la vitesse de A, et prenant la droite que suit ce mobile pour axe des x, on trouve

$$v = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - y^2}, \quad \gamma = \frac{c^2 y}{a^2}, \quad \rho = \frac{a}{y}\sqrt{a^2 - y^2};$$

la développée de la tractrice est une chaînette.

Trajectoire d'un mobile qui se meut uniformément, de manière que la tangente rencontre toujours un autre point qui parcourt une droite avec une vitesse constante, accélération, rayon de courbure. La courbe décrite est appelée *courbe du chien*, l'animal étant supposé se diriger vers son maître; l'équation est algébrique, sauf le cas où les deux vitesses sont égales. n étant le rapport de la

vitesse du chien à celle du maître, α l'angle de sa direction avec la droite suivie par le maître, y sa distance à cette droite, on a

$$\rho = ny \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Un mobile parcourt uniformément un cercle pendant que le plan de ce cercle tourne autour d'un de ses diamètres avec une vitesse angulaire égale à celle du point sur le cercle; étudier le mouvement résultant dans l'espace.

Déterminer la loi du mouvement rectiligne d'un point, sachant qu'on a

$$v = ate^{-t},$$

a étant une constante; accélération.

Un point parcourt une hyperbole de manière que la vitesse aréolaire par rapport à un des foyers soit constante. Déterminer l'accélération et la loi de mouvement. Prouver que si, par un point fixe, on mène des droites égales et parallèles aux vitesses, le lieu de leurs extrémités est un cercle.

Si l'on pose

$$x = \frac{a}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right),$$

on aura, en supposant $t = 0$ pour $u = 1$, et appelant e l'excentricité,

$$\frac{e}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) - \mathrm{L}u = \frac{c^2 t}{a^2\sqrt{1+e^2}},$$

équation analogue à celle de Kepler.

Mouvement d'un point sur le limaçon de Pascal, en supposant que le rayon vecteur issu du point double tourne uniformément : tangente, rayon de courbure.

Accélération des divers ordres.

92. Si par un point fixe on mène des droites égales et parallèles à l'accélération d'un mobile aux époques t et $t + \Delta t$, OA et OA′, l'accélération du second ordre ou sur-

accélération est représentée en grandeur par la limite de $\frac{AA'}{\Delta t}$, et en direction par la direction limite de AA'. On passe de la même manière aux accélérations des ordres suivants. Il est aisé de démontrer que la projection de l'accélération d'un ordre quelconque sur un axe ou sur un plan est égale à l'accélération de même ordre dans le mouvement de la projection du mobile; d'autre part, il est visible que les accélérations successives dans un mouvement rectiligne sont égales aux dérivées successives de l'espace par rapport au temps. Si donc on rapporte un mobile à trois axes coordonnés, l'accélération du $n^{ième}$ ordre a pour composantes

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}z}{dt^{n-1}}.$$

On en conclut par exemple que, dans le mouvement elliptique représenté par les équations

$$x = a\cos\omega t, \quad y = b\sin\omega t,$$

les accélérations d'ordre impair sont dirigées suivant le rayon vecteur et proportionnelles à ce rayon; celles d'ordre pair seront parallèles et proportionnelles au diamètre conjugué; il est facile de compléter l'énoncé.

Soit à calculer les projections de l'accélération d'ordre n, γ_n, sur la tangente à la trajectoire, sur sa normale principale et sur l'axe du plan osculateur ou binormale (DE SAINT-VENANT). On y arrive à l'aide des formules de M. Serret; mais on peut employer une méthode géométrique régulière que j'exposerai, parce que son point de départ peut être utilisé dans d'autres questions sur les lignes à double courbure.

Menons en un point O d'une courbe la tangente OT, la normale principale ON et la binormale OB : prenons un arc infiniment petit OM $= ds$ dans le sens de OT, et suppo-

sons que M soit par rapport au plan osculateur en O du côté opposé à OB.

Considérons la tangente, la normale principale et la binormale en M, et cherchons, à moins d'infiniment petits du second ordre, les cosinus des angles que ces droites font avec OT, ON, OB; pour cela je leur mène en O les parallèles OT′, ON′, OB′; si l'on prend OB = BB′, BB′ sera dans le sens de la normale principale. En négligeant les infiniment petits du second ordre, on peut regarder OT′ comme situé dans le plan TON, et il est facile de déduire de la figure le tableau des neuf cosinus :

	OT.	ON.	OB.
OT′,	1,	$\frac{ds}{\rho}$,	0,
ON′,	$-\frac{ds}{\rho}$,	1,	$-\frac{ds}{r}$,
OB′,	0,	$\frac{ds}{r}$,	1;

ρ désigne le rayon de courbure, r le rayon de torsion.

Soient donc à l'époque t l'accélération d'ordre μ, γ_μ, et ses projections sur la tangente, la normale et la binormale que nous désignerons par $\gamma_{\mu,t}$, $\gamma_{\mu,n}$, $\gamma_{\mu,b}$; à l'époque $t+dt$, cette tangente et ces normales ont changé de direction, comme l'indique le tableau, et les projections de l'accélération sur ces nouvelles droites sont $\gamma_{\mu,t}+d\gamma_{\mu,t}, \ldots$; on en conclut les projections de cette accélération sur les premiers axes, et, en divisant par dt les accroissements subis par ces projections dans le temps dt, on a

$$\gamma_{\mu+1,t}=\frac{d\gamma_{\mu,t}}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\gamma_{\mu,n},$$

$$\gamma_{\mu+1,n}=\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\gamma_{\mu,t}+\frac{d\gamma_{\mu,n}}{dt}+\frac{1}{r}\frac{ds}{dt}\gamma_{\mu,b},$$

$$\gamma_{\mu+1,b}=-\frac{1}{r}\frac{ds}{dt}\gamma_{\mu,n}+\frac{d\gamma_{\mu,b}}{dt}.$$

Quand on doit prendre des dérivées de ρ ou de r par rapport au temps, on prend $\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{ds}\frac{ds}{dt}, \ldots$; puis on remplace $\frac{ds}{dt}$ par v, et l'on a les composantes de γ_μ en fonction de $v, \frac{dv}{dt}, \ldots, \frac{d^\mu v}{dt^\mu}, \rho, r, \frac{d\rho}{ds}, \ldots$.

On a, pour l'accélération ordinaire,

$$\gamma_{1,t} = \frac{dv}{dt}, \quad \gamma_{1,n} = \frac{v^2}{\rho}, \quad \gamma_{1,b} = 0;$$

on en tire, à l'aide de nos formules générales,

$$\gamma_{2,t} = \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{1}{\rho^2} v^3,$$

$$\gamma_{2,n} = \frac{3}{\rho} v \frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds},$$

$$\gamma_{2,b} = -\frac{1}{r\rho} v^3,$$

$$\gamma_{3,t} = \frac{d^3 v}{dt^3} - 6\frac{v^2}{\rho^2}\frac{dv}{dt} + 3\frac{v^4}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds}, \ldots.$$

La valeur de $\gamma_{2,n}$ peut être transformée et donner lieu à quelques remarques. L'enveloppe des plans normaux à la trajectoire est une développable appelée *surface polaire*, dont les génératrices sont les axes des cercles de courbure de la trajectoire. Considérons le plan P osculateur en O, le centre de courbure C; le centre de courbure au point M infiniment voisin de O se projette sur P en C'; CC' est un élément de ligne de courbure de la surface polaire, sa longueur est $d\rho$; l'angle des deux plans tangents à la polaire en C et C' est égal à l'angle de contingence de OM, soit $\frac{ds}{\rho}$; donc $\frac{\rho\, d\rho}{ds}$ est le rayon de courbure R de la surface polaire en C,

et l'on peut écrire

$$\gamma_{2,n} = \frac{3}{\rho} v \frac{dv}{dt} - R \frac{v^2}{\rho^2};$$

dans le cas d'une trajectoire plane, R est le rayon de courbure de la développée.

Dans le mouvement elliptique que nous avons considéré, l'accélération du second ordre est tout entière tangentielle; $\gamma_{2,n}$ est nul, et l'équation précédente donne le rayon de courbure de la développée

$$\text{(A)} \qquad R = 3\rho \frac{dv}{dt} : \frac{v^2}{\rho} = 3\rho \operatorname{tang} \alpha,$$

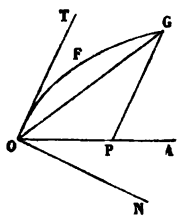
α étant l'angle du rayon vecteur de l'ellipse avec la normale, puisque $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$ sont les composantes de l'accélération γ_1. Aux sommets, $R = 0$.

93. *En désignant par c, c' les cordes interceptées par l'accélération du premier ordre dans le cercle et dans la parabole osculatrice à la trajectoire, la composante normale de γ_2, ou suraccélération normale, est*

$$\gamma_{2,n} = \frac{6v^2}{\rho\sqrt{cc'}}. \qquad \text{(Resal, } \textit{Cinématique.}\text{)}$$

Soient (*fig.* 10) OT, ON la tangente et la normale à la

Fig. 10.



trajectoire, OFG un arc de la parabole osculatrice dont OA

est un diamètre, OG la droite suivant laquelle est dirigée l'accélération γ, α l'angle AON, φ l'angle GON, GP parallèle à OT. Puisque l'accélération fait l'angle φ avec la normale, on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \operatorname{tang} \varphi,$$

d'où

$$\gamma_{2,n} = \frac{v^3}{\rho^2}\left(3 \operatorname{tang} \varphi - \frac{R}{\rho}\right).$$

La relation (A) précédemment trouvée pour l'ellipse s'applique à la parabole, et l'angle α a conservé sa signification; il en résulte

$$\gamma_{2,n} = 3\frac{v^3}{\rho^2}(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\alpha) = \frac{3v^3}{\rho^2}\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi\cos\alpha}.$$

Le triangle GOP donne

$$\frac{OP}{\cos\varphi} = \frac{GP}{\sin(\varphi-\alpha)} = \frac{c'}{\cos\alpha}, \quad \frac{\overline{GP}^2}{\sin^2(\varphi-\alpha)} = \frac{OP.c'}{\cos\varphi\cos\alpha}.$$

Or $\frac{\overline{GP}^2}{2OP} = p' = \frac{p}{\cos^2\alpha} = \rho\cos\alpha$, p' et p désignant le paramètre relatif au diamètre OA et le paramètre principal de la parabole. On a donc

$$\frac{2\rho\cos\alpha}{\sin^2(\varphi-\alpha)} = \frac{c'}{\cos\varphi\cos\alpha}, \quad \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2\rho}{c'\cos\varphi}},$$

$$\gamma_{2,n} = \frac{3v^3}{\rho^2}\sqrt{\frac{2\rho}{c'\cos\varphi}} = \frac{6v^3}{\rho}\frac{1}{\sqrt{2c'\rho\cos\varphi}} = \frac{6v^3}{\rho\sqrt{cc'}}.$$

94. *Déterminer dans le mouvement plan les projections de la suraccélération sur le rayon vecteur et sur sa perpendiculaire.*

Il suffit d'exprimer $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ en fonction de r et de θ,

et de les projeter sur le rayon vecteur et sa perpendiculaire; on trouve

$$\gamma_{2,r} = \frac{d^3 r}{dt^3} - 3\frac{dr}{dt}\frac{d\theta^2}{dt^2} - 3r\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\gamma_{2,p} = 3\frac{d^2 r}{dt^2}\frac{d\theta}{dt} + 3\frac{dr}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\frac{d\theta^3}{dt^3} + r\frac{d^3\theta}{dt^3}.$$

Composition des vitesses.

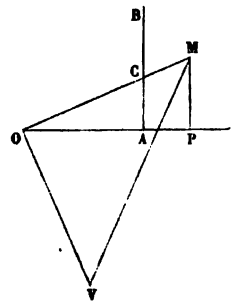
95. Étant donné un système de points de repère S et un point M, dont la position par rapport à S varie avec le temps, on dit que M a un mouvement relatif, si le système S est lui-même mobile par rapport à un second système S_1; on peut déduire des deux mouvements précédents quel est le mouvement de M par rapport à S_1 : ce sera composer les deux mouvements. On appelle *vitesse d'entraînement* du point M la vitesse par rapport à S_1 d'un point qui coïnciderait avec M à l'instant considéré, mais qui resterait en repos relatif par rapport au système S. Supposons S_1 fixe; le mouvement résultant que nous étudions sera un mouvement absolu; on a ce théorème fondamental : la vitesse absolue est la résultante géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement; la vitesse relative s'évalue en négligeant le mouvement de rotation de S, qui ne devient sensible que si l'on considère les accélérations. On généralise aisément pour le cas de plusieurs mouvements composants.

96. La méthode de Roberval pour le tracé des tangentes aux courbes consiste à les regarder comme les trajectoires d'un mobile et à déterminer la direction de sa vitesse; on y parvient souvent en considérant le mouvement comme résultant de deux ou plusieurs autres.

Soit proposé de mener la tangente à la strophoïde; étant

donnés (*fig.* 11) un point O et une droite AB, si l'on mène une sécante OC et qu'on la prolonge d'une longueur

Fig. 11.



CM = CA, OA étant perpendiculaire sur AB, le lieu de M est la strophoïde.

Le mouvement de C peut être obtenu en supposant qu'il glisse sur la droite OM pendant que celle-ci tourne autour de O avec une vitesse angulaire ω; la vitesse d'entraînement est ωOC perpendiculaire à OC; la vitesse relative parallèle à OC est $\frac{d.\mathrm{OC}}{dt}$; la vitesse résultante est $\frac{d.\mathrm{AC}}{dt}$, dirigée suivant AB; mais le triangle formé par ces trois vitesses est semblable à OAC comme ayant ses angles égaux. Avec une unité de temps convenable, on aurait

$$\omega.\mathrm{OC} = \mathrm{OA}, \quad \frac{d.\mathrm{OC}}{dt} = \mathrm{AC}, \quad \frac{d.\mathrm{AC}}{dt} = \mathrm{OC}.$$

Regardons aussi le mouvement de M comme résultant d'une vitesse de glissement et d'une vitesse d'entraînement; celle-ci est ω.OM, ou, avec notre unité de temps et par suite d'une proportion évidente, OP; la vitesse de glissement est

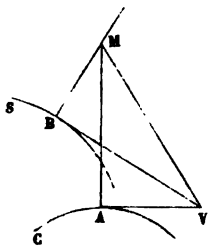
$$\frac{d.\mathrm{OM}}{dt} = \frac{d.\mathrm{OC}}{dt} + \frac{d.\mathrm{AC}}{dt} = \mathrm{AC} + \mathrm{OC} = \mathrm{OM};$$

si donc on élève OV perpendiculaire à OM et égal à OP, la droite MV représente en direction et en grandeur, vu notre unité de temps, la vitesse de M; on a une construction simple de la tangente.

97. *Déterminer la tangente au lieu des points* M (*fig.* 12), *tels que le rapport de leurs distances normales à deux courbes* C *et* S *soit une constante* n.

On peut regarder le point M comme glissant sur une nor-

Fig. 12.



male AM à C, tandis que cette droite se déplace en restant toujours normale : la vitesse de glissement sera $\frac{d\mathrm{AM}}{dt}$ qu'on peut prendre égale à AM avec une unité de temps convenable. La vitesse d'entraînement est inconnue; mais on sait qu'elle est perpendiculaire à AM, puisque le mouvement d'entraînement fait décrire des courbes parallèles à C; la vitesse s'obtiendra en joignant M à un point convenable de la tangente à C en A; mais on peut aussi bien produire le mouvement de M en le faisant glisser sur une normale variable à la courbe S. Or $\mathrm{MA} = n\mathrm{MB}$ donne

$$d.\mathrm{MA} = d.\mathrm{MB};$$

donc la vitesse de glissement sera BM avec notre unité de temps : la vitesse d'entraînement sera parallèle à la tangente à S en B, et la vitesse absolue s'obtiendra en joignant

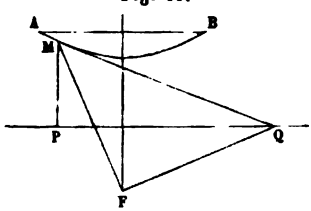
M à un point convenable de cette tangente. L'extrémité de la droite qui représente cette vitesse est donc au point V commun aux deux tangentes. Les triangles rectangles MAV, MBV donnent

$$\cos AMV = n \cos BMV;$$

on en conclut aisément que, si des rayons lumineux s'échappant normalement de la courbe C se réfractaient sur la surface lieu du point M, et si l'indice de réfraction était n, les rayons réfractés seraient normaux à S; car cos AMV n'est autre que le sinus de l'angle d'incidence, etc. La courbe S a été nommée par M. Quetelet l'*anticaustique* de C.

C peut se réduire à une droite et S à un point; le lieu de M est une conique dont nous savons ainsi mener la tangente. Supposons $n > 1$, la courbe est une ellipse; si des rayons lumineux arrivant parallèlement à MA et dans le sens de cette droite se réfractent sur une surface elliptique dont l'excentricité soit égale à l'inverse de l'indice de réfraction, ils iront converger au foyer de la courbe; si l'on veut les recevoir en ce point, il faut limiter la lentille elliptique par une surface sphérique intérieure décrite du foyer comme centre. Une autre disposition, préférable pour concentrer en un point des rayons parallèles, consiste dans l'emploi d'une lentille plan convexe, la partie convexe AMB (*fig.* 13) étant formée par la rotation d'une hyperbole dont

Fig. 13.



le foyer est F et la directrice PQ; l'excentricité sera égale

à l'indice de réfraction. La tangente s'obtient en joignant M au point Q, où la directrice rencontre la perpendiculaire au rayon MF.

98. La méthode de Roberval proprement dite n'est pas toujours facile à appliquer; cependant je citerai comme exercices, outre les cas les plus connus, la détermination de la tangente à la cissoïde et à la courbe de Viviani, considérée comme lieu d'un point qui parcourt uniformément un cercle, tandis que celui-ci fait un tour autour d'un de ses diamètres, d'un mouvement aussi uniforme. L'étude des vitesses simultanées revient à une question de Géométrie infinitésimale; j'en donnerai un seul exemple, la recherche, d'après M. Mannheim, du point où une droite, mobile dans certaines conditions, touche son enveloppe, et l'application du résultat obtenu pour construire le centre de courbure d'une épicycloïde.

Considérons une droite qui tourne autour du pôle O dans un plan, et qui fasse avec l'axe fixe un angle θ. Soient sur cette droite trois points M, M′, M″ décrivant des courbes C, C′, C″; la perpendiculaire menée au point O sur OM est rencontrée en N, N′, N″ par les normales à C, C′, C″ aux points M, M′, M″. On a, d'après une formule de Géométrie,

$$\mathrm{ON} = \frac{d.\mathrm{OM}}{d\theta}, \quad \mathrm{ON}' = \frac{d.\mathrm{OM}'}{d\theta}, \quad \mathrm{ON}'' = \frac{d.\mathrm{OM}''}{d\theta};$$

d'où

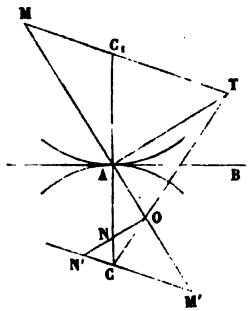
$$\frac{\mathrm{NN}'}{d.\mathrm{MM}'} = \frac{\mathrm{N}'\mathrm{N}''}{d.\mathrm{M}'\mathrm{M}''}.$$

Supposons les courbes C, C′, C″ telles que MM′ et M′M″ aient un rapport constant λ; il en sera de même de leurs différentielles, et par suite de NN′ et N′N″; si donc on savait mener les normales en M, M′, M″, et qu'on voulût trouver le point O autour duquel tourne la droite MM′M″,

ou, simplement, auquel elle rencontre sa position infiniment voisine, c'est-à-dire touche son enveloppe, il n'y aurait qu'à chercher une perpendiculaire à $MM'M''$, telle que les segments déterminés sur cette droite par les normales connues aient un rapport donné.

Soit (*fig.* 14) un cercle de rayon $C_1A = R_1$, qui roule sur un cercle fixe dont le centre est C et le rayon R ; un point M

Fig. 14.



lié au cercle C_1 engendre une épicycloïde. Cherchons la tangente en M par la méthode de Roberval ; le mouvement du cercle C_1 peut s'obtenir en supposant que son centre tourne autour de C avec une vitesse $\omega.CC_1$, tandis que le cercle tourne autour d'axes de direction fixe, menés par C_1 avec une vitesse angulaire $-\omega\frac{CC_1}{R_1}$. La vitesse relative de M sera perpendiculaire à MC_1 et égale à $\omega.CC_1\frac{C_1M}{C_1A}$; la vitesse d'entraînement est $\omega.CC_1$ perpendiculaire sur AC_1 ; le triangle formé par ces vitesses et leur résultante est semblable à MC_1A et a ses côtés perpendiculaires ; la vitesse résultante est perpendiculaire à MA, et cette droite normale à l'épicycloïde.

La normale MA se meut dans des conditions où la méthode de M. Mannheim donne le point O où elle touche

son enveloppe; en effet, menons CM′ parallèle à MC_1 jusqu'à la rencontre de MA. On a

$$\frac{AM}{AM'} = \frac{C_1M}{CM'} = \frac{R_1}{R};$$

donc CM′ est constant; le lieu de M′ est un cercle ayant son centre en C aussi bien que le lieu de A, et les segments déterminés sur la normale par l'épicycloïde elle-même et les deux cercles restent dans le rapport de R à R_1. Les normales aux courbes C, C′, C″ sont ici MM′, AC, M′C; il s'agit de trouver un point O tel, qu'en y élevant une perpendiculaire sur MM′, on ait $ON : NN' :: R_1 : R$. Menons en A une perpendiculaire sur MM′, et supposons que les droites CO et MC_1 la rencontrent en des points T et T_1; les triangles semblables CNO, CAT, d'une part, CNN′, C_1AT_1, de l'autre, donnent

$$\frac{AT}{ON} = \frac{R}{CN}, \quad \frac{AT_1}{NN'} = \frac{R_1}{CN}:$$

or

$$R \times ON = R_1 \times NN':$$

donc

$$AT = AT_1.$$

De là la construction de Savary : prolonger MC_1 jusqu'à ce qu'elle coupe en T la perpendiculaire sur AM en A; TC coupe la normale au centre de courbure. Si l'on prend AM pour axe des x, AT pour axe des y, on voit aisément que la différence entre les inverses des abscisses de C et C_1 est égale à la somme des inverses de AM et de AO; faisons donc $AM = n$, $MO = \rho$, $MAC_1 = \varphi$, on aura

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \cos\varphi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right).$$

MOUVEMENT D'UNE FIGURE DANS UN PLAN.

Du centre instantané de rotation.

99. Quand une figure plane se déplace infiniment peu dans son plan, un de ses points reste immobile; les vitesses de tous les autres sont normales aux droites qui joignent les points correspondants au centre instantané de rotation, et proportionnelles à ces mêmes droites. Le mouvement fini de la figure peut s'obtenir en la liant à une courbe S_1, lieu de ses points qui doivent être successivement centres instantanés, et faisant rouler S sur la courbe S, lieu des centres dans le plan immobile. Les points où une ligne L touche son enveloppe sont aux pieds des normales abaissées du centre instantané sur la ligne mobile.

Le centre de courbure de la roulette décrite par un point de la figure mobile s'obtient par la construction de Savary (98), sauf à remplacer la roulante S_1 et la base S par leurs cercles osculateurs de rayon R_1 et R. Le centre de courbure de l'enveloppe d'une ligne L entraînée dans le mouvement s'obtient en appliquant la même construction au centre du cercle osculateur à L au point où elle touche son enveloppe. Soient n la longueur d'une normale menée du centre instantané I à un point M de L, φ l'angle de cette droite avec la normale commune à S et S_1 en I, ρ_1 le rayon de courbure de L en M, ρ celui de l'enveloppe de L; on a, en supposant ρ compté de M vers I, ρ_1 en sens contraire, R

et R_1 opposés,

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{n+\rho_1}+\frac{1}{\rho-n}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}.$$

Quand l'une des lignes change de sens, on change son signe, mais la construction de Savary s'applique toujours.

Dans cette formule, la base et la roulante n'interviennent que par la somme de leurs courbures; le premier membre n'est pas altéré si l'on change R et R_1, la somme de leurs inverses restant constante. Faisons, par exemple, R infini, avec $R_1 = a$, et l'on pourra traiter pendant deux instants consécutifs le mouvement comme un mouvement cycloïdal; a est dit rayon de roulement, et la formule (1), appliquée à la trajectoire d'un point M avec $\rho_1 = 0$, donne

$$\rho=\frac{n^2}{n-a\cos\varphi}.$$

Prenons sur la normale aux deux surfaces roulantes en I une longueur II′ égale à a; le point I′ est le centre instantané du second ordre, et le cercle décrit sur II′ comme diamètre est le cercle des inflexions. Soit P le point où IM rencontre ce cercle; le rayon de courbure de la trajectoire de M est troisième proportionnelle à MP et à IM : ce rayon est infini quand M se trouve sur le cercle, c'est-à-dire que la trajectoire présente un point d'inflexion, d'où le nom du cercle, qui souvent est plus facile à déterminer que les centres de courbure de la base et de la roulante; on peut ensuite en déduire le rayon de courbure d'une roulette quelconque.

Enfin, si, dans la formule (1), on fait ρ_1 infini, et si l'on remplace $\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}$ par $\frac{1}{a}$, on a, pour déterminer le rayon de courbure de l'enveloppe d'une droite entraînée,

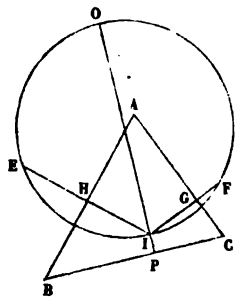
$$\rho-n=a\cos\varphi.$$

Le centre de courbure est sur la circonférence symétrique de celle des inflexions par rapport au point I. Quand un polygone se déplace d'une manière quelconque, ses côtés enveloppent des courbes dont les centres de courbure sont à chaque instant sur un cercle passant au centre instantané du premier ordre.

100. Théorème de Bobillier. — *Quand un triangle de forme invariable* ABC (*fig.* 15) *se meut de manière que deux de ses côtés* AB, AC *restent tangents à deux cercles, l'enveloppe du troisième côté est aussi un cercle.*

Soient E, F les centres des deux cercles donnés, G, H les points de contact avec AB, AC; les points G et H du

Fig. 15.



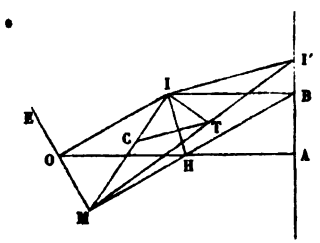
triangle se mouvant pour un instant suivant les tangentes aux cercles, HE, GF sont normales à leurs trajectoires, et le centre instantané de rotation du triangle est à leur point de concours I. L'angle EIF est constant, $\pi - A$, en sorte que le lieu S de I dans le plan est un segment capable de $\pi - A$ décrit sur EF. Traçons tout le cercle dont il fait partie, abaissons la perpendiculaire IP sur BC : ce sera une normale à l'enveloppe de BC, et elle rencontre le cercle EIF en un point O; mais l'arc EO est constant, comme mesurant deux fois l'angle EIO égal à B. Toutes

les normales à l'enveloppe cherchée passent en un même point O; cette enveloppe est un cercle dont O est le centre. Le dernier théorème du paragraphe précédent se vérifie. Enfin les normales aux trajectoires de A, B, C sont IA, IB, IC.

Il est aisé d'avoir le lieu du point A, soit le lieu du sommet d'un angle constant qui glisse sur deux cercles. Par E et F je mène des parallèles à AB et AC qui se coupent en un point A'; les droites EA', FA' forment avec ABC une figure invariable, et IA' est un diamètre de la circonférence EIF, puisque IEA', IFA' sont droits. La courbe S_1, lieu de I par rapport à ABC, est un cercle dont le centre est A', le rayon IA' double du rayon de S. On sait que, si un cercle roule sur un autre de rayon moitié moindre, en l'englobant, tout rayon tel que A'A du cercle mobile passe en un point fixe sur le petit cercle; de plus la distance AA' est constante, et le point A' reste sur le cercle EIF; le point A décrit donc un limaçon de Pascal.

101. *On donne (fig. 16) un point* O *et une droite* AB; *un angle droit* EMB, *dont le côté* MB *est égal à la distance* OA *de* O *à* B, *se meut de manière que le point* B *reste sur*

Fig. 16.



la droite AB *et que le côté* ME *passe toujours en* O, *lieu du sommet* M, *sa normale, son rayon de courbure: déterminer les courbes qu'il faut faire rouler l'une sur l'autre pour produire le mouvement.*

Les triangles OAB, OMB sont égaux; OM = AB, et, si l'on prolonge OM jusqu'à ce qu'il coupe AB en K, OKB sera isoscèle, OK = BK; donc MK = AK, et le lieu de M est une strophoïde.

Le point B se déplaçant sur AB, le centre instantané I est sur BI perpendiculaire à AB; quant au point O considéré comme faisant partie du côté ME, sa trajectoire sera tangente à OM, et il suffira de mener OI perpendiculaire à OM pour achever de déterminer le centre I.

Les triangles OMH, HAB sont égaux; donc OH = HB, et OHBI est un losange. Puisque OI = IB, le lieu S de I dans le plan est une parabole ayant O pour foyer, AB pour directrice. La même égalité prouve que, par rapport à la figure mobile, le lieu S_1 de I est une parabole dont le foyer est B, la directrice ME. Ce sont ces deux courbes égales qu'il faut faire rouler l'une sur l'autre pour produire le mouvement : la tangente commune en I est la diagonale IH du losange. Comme on n'a pas immédiatement les centres de courbure des paraboles, nous chercherons le cercle des inflexions pour arriver à la courbure de la strophoïde.

Le cercle des inflexions a pour diamètre une perpendiculaire à IH, et il passe au point B qui décrit une droite : il est aisé d'en conclure que son diamètre est II′ et que le centre instantané du second ordre est le point I′ pris sur AB; I′ est aussi le centre du cercle de roulement. Comme les deux paraboles S, S_1 sont égales, et qu'on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{2}{R} = \frac{2}{II'},$$

le rayon de courbure de la parabole qui a O pour foyer, AB pour directrice est 2II′, et II′ est la direction de la normale.

La normale à la strophoïde en M est MI; le centre de courbure s'obtient à l'aide du rayon de roulement II′ par la

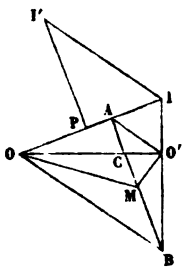
construction de Savary; on joint I′M qui rencontre en T la perpendiculaire en I à IM; puis on mène en T une parallèle à II′ qui coupe MI au centre de courbure C. Si l'on cherchait le point P où MI rencontre une seconde fois le cercle des inflexions, on aurait

$$MC \times MP = \overline{MI}^2.$$

On sait que le milieu du côté MB décrit une cissoïde, dont le cercle directeur a pour centre A et pour rayon $\frac{1}{2}$MB; on aura par là un moyen de trouver le centre de courbure de la cissoïde.

102. *Étant donnés (fig. 17) deux cercles égaux qui se coupent à angle droit, une droite* AB *égale à la distance*

Fig. 17.



des centres O, O′ *se déplace de manière que ses extrémités glissent sur les deux cercles; lieu du milieu* M *de* AB, *centre instantané, rayon de courbure; mouvement général d'une bielle.*

Soit a le rayon des deux cercles; $OO' = AB = a\sqrt{2}$. Les triangles OAB, OO′B sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; donc OAO′B est un trapèze isoscèle. OM étant médiane dans le triangle OAB, nous

avons

$$2\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{AM}^2 = \overline{OB}^2.$$

On démontrerait de même que $2\overline{O'M}^2 = \overline{O'A}^2$; donc

$$2OM.O'M = OB.O'A.$$

Le trapèze OAO'B étant inscriptible, on a (théorème de Ptolémée)

$$OB.O'A = OO'.AB - OA.O'B = 2a^2 - a^2;$$

donc enfin

$$OM.O'M = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{4}\overline{OO'}^2.$$

Le lieu de M est une lemniscate de Bernoulli, dont O, O' sont les foyers.

OA, O'B sont respectivement normales aux lieux de A et de B; leur point de concours I est le centre instantané. Il est évident que AI = A'I; donc

$$OI - O'I = a, \quad BI - AI = a.$$

Le lieu de I dans le plan est une hyperbole ayant O, O' pour foyers; le lieu de I par rapport à AB est une hyperbole égale, ayant A, B pour foyers, et, comme la distance focale est égale à la différence des rayons vecteurs multipliée par $\sqrt{2}$, ces hyperboles sont équilatères.

Pour trouver le rayon de courbure au lieu de M, nous pouvons nous servir du cercle des inflexions; soit P le point où il coupe IA; le point A décrit un cercle dont le centre est sur le prolongement de IA et le rayon $\frac{n^2}{a\cos\varphi - n}$ (99); le point P se trouve entre A et O, et l'on a

$$AO = \frac{\overline{IA}^2}{AP}, \quad AP = \frac{\overline{IA}^2}{AO}.$$

On détermine P comme troisième proportionnelle; et puisque le diamètre du cercle des inflexions est sur la normale à l'hyperbole, bissectrice extérieure de l'angle OIO′, il suffit d'élever PI′ perpendiculaire à AP jusqu'à la rencontre de cette normale pour avoir le rayon de roulement II′; la construction de Savary, modifiée par le mouvement cycloïdal, donne le centre de courbure de la lemniscate en M.

Le mouvement que nous venons d'examiner est un cas particulier du mouvement d'une bielle AB réunissant deux manivelles OA, O′B. En général, un point M de AB décrit un lieu du sixième ordre; car soient x, y ses coordonnées, $MA = a$, $MB = b$, θ l'angle de BA avec l'axe des x; les coordonnées de A et de B sont respectivement

$$x - a\cos\theta, \quad y - a\sin\theta, \quad x + b\cos\theta, \quad y + b\sin\theta.$$

Exprimons que chacun de ces points est sur un cercle; on a deux relations de la forme

$$P\sin\theta + Q\cos\theta = R,$$

P, Q étant des fonctions du premier degré, R du second degré en x et y; si l'on en tire $\sin\theta$ et $\cos\theta$, et qu'on égale à 1 la somme de leurs carrés, on a une équation du sixième degré en x et y.

Le centre instantané est encore le point I commun à OA et O′B; on aura, comme dans le cas de la lemniscate, les points où OA, O′B rencontrent le cercle des inflexions, et l'on en déduira le centre de courbure du lieu de M.

Voyons quel est à chaque instant le rapport des vitesses angulaires ω, ω' des manivelles; la vitesse absolue de A est $\omega.OA$; celle de B, $\omega'.O'B$: ces vitesses sont proportionnelles aux distances de A et de B au centre instantané,

$$\frac{OA.\omega}{O'B.\omega'} = \frac{AI}{BI}, \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{O'B.AI}{OA.BI}.$$

La transversale AB, qui rencontre OO′ en C, détermine sur les côtés de OIO′ six segments tels que

$$\frac{O'B.IA.OC}{OA.IB.O'C} = 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{O'C}{OC}.$$

Les vitesses angulaires sont dans le rapport inverse des distances des centres au point où le lien coupe la ligne des centres ou à ce lien lui-même. Quand deux cames sont en contact, le mouvement est le même pendant un instant que si les centres de courbure correspondant dans chacune au point de contact étaient réunis par un lien rigide égal à la somme des deux rayons de courbure; les vitesses angulaires sont dans le rapport inverse des segments déterminés par la normale commune sur la droite des centres.

Des roulettes.

103. Considérons une courbe S_1, qui roule sans glisser sur une courbe fixe S appelée *base*, S_1 est dite la *roulante*; le lieu engendré par un point M lié à S_1 s'appelle *roulette*. Le centre instantané est au point de contact I de S et de S_1, IM est normale à la roulette, et le centre de courbure s'obtient par la construction de Savary. Pour trouver l'équation de la roulette, comptons sur S et S_1 les arcs s et s_1 à partir de deux points A et A_1 qui ont coïncidé à un moment jusqu'au point de contact actuel I; la valeur de s détermine les coordonnées x_1, y_1 du point I par rapport à des axes fixes et l'angle α de la tangente à S avec l'axe des x; de même, pour la valeur de s_1, on connaît la longueur IM et l'angle β qu'elle fait avec la tangente à S_1 en I; les coordonnées de M sont

$$(1) \quad x = x_1 + \mathrm{IM}\cos(\alpha + \beta), \quad y = y_1 + \mathrm{IM}\sin(\alpha + \beta).$$

Il n'y aura qu'à éliminer s et s_1 qui sont égaux, ou plus

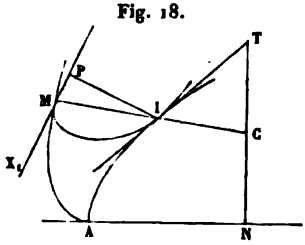
généralement les paramètres qui fixent la position de I sur S et S_1. L'enveloppe d'une ligne entraînée par S_1 se trouverait de même, sauf à remplacer IM par la normale IP à l'enveloppée.

Quand la base est une droite, on peut, sans rectifier la roulante, trouver l'équation différentielle de la roulette. Prenons la droite S pour axe des x; l'angle β est MIX : la nature de la roulante donne une relation entre cet angle et $IM = r$: $F(r, \beta) = 0$; d'ailleurs l'y de M est $r \sin\beta$, et l'angle de la tangente à la roulette avec OX est $\varphi = \beta - \frac{\pi}{2}$. On a trois équations qui, par l'élimination de r et β, donnent une relation différentielle entre y et φ. Pour l'enveloppe d'une ligne entraînée, la modification est la même que dans le cas général.

104. *Une cardioïde représentée en coordonnées polaires par $r = a(1 - \cos\theta)$, roule sans glisser sur une cycloïde dont le cercle générateur a pour rayon a, de manière que les points de rebroussement des deux courbes se correspondent; roulette décrite par le pôle de la cardioïde, enveloppe de son axe.*

Soient (*fig.* 18) M le pôle de la cardioïde, MX_1 son axe;

Fig. 18.



θ est l'angle IMX_1. On trouve aisément que l'arc

$$MI = s_1 = 4a\left(1 - \cos\frac{1}{2}\theta\right),$$

et que l'angle de MI avec la tangente IT est $\beta = \pi - \frac{\theta}{2}$. Soient maintenant C le centre du cercle générateur de la cycloïde correspondant au point I et ICN $= u$; on a

$$s = 4a\left(1 - \cos\frac{1}{2}u\right).$$

Comme $s = s_1$, on a $u = \theta$. On sait enfin que l'angle de IT avec OX est $\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} = \alpha$. Comme CIT $=$ CTI $= \frac{u}{2}$, les points M, I, C sont en ligne droite. Les équations (1) deviennent

$$x = a(u - \sin u) + a(1 - \cos u)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - u\right)$$
$$= a(u - 2\sin u + \sin u\cos u),$$
$$y = a(1 - \cos u) + a(1 - \cos u)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - u\right) = a(1 - \cos u)^2.$$

L'élimination de u donnerait un résultat compliqué, et il est plus simple de garder les deux équations et de faire varier u. On a

$$dx = -2a(1 - \cos u)\cos u\,du, \quad dy = 2a(1 - \cos u)\sin u\,du,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang} u.$$

Quand u varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$, x décroît de zéro à $a\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)$, y croît de zéro à a; la courbe part de A tangentiellement à AN et s'éloigne vers la gauche au-dessus de AN; u allant de $\frac{\pi}{2}$ à π, x croîtra jusqu'à πa, y jusqu'à $4a$; puis la courbe aura une partie symétrique de celle que je viens d'indiquer par rapport à l'axe de la cycloïde : elle est rectifiable et quarrable.

Pour l'enveloppe de l'axe de la cardioïde, abaissons IP perpendiculaire à cet axe; on aura

$$\text{IP} = a(1 - \cos\theta)\sin\theta = a(1 - \cos u)\sin u, \quad \text{PIT} = \frac{3}{2}(\pi - u).$$

Les coordonnées du point P seront, d'après les équations (1),

$$x = a[u - \sin u + (1 - \cos u)\sin u \cos 2u],$$
$$y = a(1 - \cos u)(1 - \sin u \sin 2u),$$

d'où

$$dx = a \sin u \sin 2u (4 \cos u - 3)\, du,$$
$$dy = a \sin u \cos 2u (4 \cos u - 3)\, du;$$

x et y partent de zéro et commencent par croître jusqu'à ce que $\cos u = \frac{3}{4}$. Là est un point de rebroussement; x et y diminuent, le premier jusqu'à $u = \frac{\pi}{2}$, le second jusqu'à $u = \frac{\pi}{4}$, puis ils croissent, sauf y entre $u = \frac{3\pi}{4}$ et $u = \pi$; alors la courbe présente un nouveau rebroussement, qui coïncide avec le sommet de la cycloïde.

105. *L'enveloppe d'une droite* L, *entraînée par un cercle* C_1 *qui roule sans glisser sur un cercle fixe* C, *est une développante d'épicycloïde.*

Soient I le point de contact, O_1A_1 le rayon de C_1 qui est parallèle à L, IP la perpendiculaire sur O_1A_1, enfin A le point de la circonférence C qui a coïncidé avec A_1; on sait que P décrit une épicycloïde; car il se trouve sur le cercle ayant IO_1 pour diamètre, et l'arc IP est égal à AI, parce qu'il mesure l'angle inscrit IO_1A_1, tandis que IA_1 mesure le même angle, mais placé au centre d'un cercle de rayon double; donc arc $IP = IA_1 = IA$, et le point P appartient à un cercle de rayon $\frac{1}{2}R_1$ roulant sur C. La développée du lieu de P est une épicycloïde intérieure au cercle C; or l'enveloppe de O_1A_1 et celle de L ont les mêmes normales : elles ont donc la même développée.

106. *Une parabole roule sans glisser sur une parabole égale et symétrique; lieu du sommet de la parabole mobile, enveloppe de l'axe.*

L'identité de la base et de la roulette simplifie le problème; la roulette décrite par le sommet mobile s'obtient en doublant les rayons vecteurs de la podaire du sommet de la base : c'est une cissoïde dont la droite $x = -p$ est l'asymptote. Pour avoir l'enveloppe de l'axe, considérons le point de contact I d'une tangente et le pied P de l'ordonnée de ce point; on est amené à chercher le lieu symétrique de P par rapport à la tangente en I. Soit α l'angle de la tangente avec l'axe; les coordonnées d'un point du lieu sont

$$y = 2p \cot\alpha \cos^2\alpha, \quad x = \frac{p}{2}\cot^2\alpha - 2p\cos^2\alpha.$$

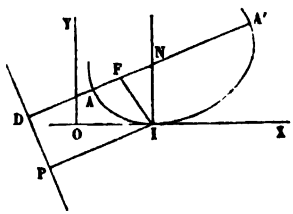
On construit la courbe à l'aide de ces équations plus aisément qu'avec l'équation finie

$$12y^4 + 12x^2y^2 + 32px^3 + 20pxy^2 - p^2y^2 = 0.$$

107. *Une ellipse roule sans glisser sur une droite fixe; lieu décrit par un foyer, courbure de ce lieu; enveloppe d'une directrice.*

Je prends (*fig.* 19) pour axe des x la droite fixe et pour origine le point O qui coïncide à un instant avec le som-

Fig. 19.



met A le plus voisin du foyer F que l'on considère. Soient

$2a$, $2b$ les axes, e l'excentricité; le centre instantané est au point de contact de l'ellipse avec OX et la tangente au lieu de F, perpendiculaire à IF, fait avec OX l'angle α égal à FIN; on a une relation entre y et α, en écrivant que le produit des distances des deux foyers à OX est b^2,

$$y(2a\cos\alpha - y) = b^2.$$

Puisque $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, c'est une équation différentielle de la courbe; mais il vaut mieux tirer de cette équation la valeur de y

$$(1)\quad \begin{cases} y = a\cos\alpha \pm \sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^2}, \\ dy = -a\sin\alpha\, d\alpha\left(1 \pm \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^2}}\right). \end{cases}$$

α est d'abord nul quand le sommet A est sur OX, puis il augmente jusqu'à la valeur $\alpha_1 = \text{arc}\cos\frac{b}{a}$, qu'il ne peut dépasser. Il diminue ensuite jusqu'à zéro et $-\alpha_1$, pour revenir à α_1, et ainsi de suite. Quand α croît de zéro à α_1, il faut prendre dans les équations (1) le radical avec le signe $-$; $d\alpha$ est > 0, et, comme la dernière parenthèse a le signe du radical, $dy > 0$, y croît de $a(1-e)$ à b : c'est le moment où le sommet du petit axe est sur OX, et la roulette présente une inflexion. L'angle α revenant de α_1 à zéro, il faut prendre le radical avec le signe $+$, et, comme $d\alpha < 0$, dy reste > 0; y croît de b à $a(1+e)$; la moitié de l'ellipse a alors roulé sur OX, et le reste du lieu est symétrique de la première partie par rapport à l'ordonnée qui la termine.

La valeur de x peut s'obtenir sous forme d'intégrale elliptique

$$dx = dy\cot\alpha = -\cos\alpha\, d\alpha\left(a \pm \frac{a^2\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^2}}\right);$$

x va toujours en croissant. L'arc ds est intégrable :

$$(2) \qquad ds = \frac{dy}{\sin\alpha} = -a\,d\alpha \mp \frac{a^2\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^2}}.$$

Il faut faire attention au signe du radical ; ainsi l'arc compris entre le point le plus bas et le point d'inflexion est

$$S_1 = \int_0^{\alpha_1}\left(-a + \frac{a^2\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^2}}\right)d\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)a;$$

l'arc du point d'inflexion au point le plus haut est

$$S_2 = \int_{\alpha_1}^{0}\left(-a - \frac{a^2\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha - b^2}}\right)d\alpha = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)a;$$

donc $S_1 + S_2 = \pi a$: c'est la demi-circonférence de la podaire du foyer par rapport à l'ellipse.

L'équation (2) donne une propriété remarquable de la courbe ; si l'on y remplace le radical par sa valeur

$$(1) \qquad y - a\cos\alpha,$$

et si l'on nomme ρ le rayon de courbure de la roulette, il vient

$$\frac{ds}{d\alpha} = \rho = -a - \frac{a^2\cos\alpha}{y - a\cos\alpha} = \frac{ay}{a\cos\alpha - y}, \quad \frac{1}{FI} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a}.$$

Si donc on fait tourner la roulette autour de OX, elle engendre une surface de révolution dont les rayons principaux de courbure sont ρ et FI ; la somme des courbures principales de cette surface est constante. (Delaunay.)

L'enveloppe de la directrice est le lieu du pied P de la perpendiculaire abaissée du centre instantané sur cette droite. L'angle de la normale IN avec l'axe NA de l'ellipse est le supplément de l'angle α que la tangente à l'enveloppe fait avec OX. On sait que la distance du centre de l'ellipse

à cette tangente est

$$(3) \qquad \delta = \sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha};$$

si l'on désigne par x_1 l'abscisse du point I par rapport aux deux axes de l'ellipse, la distance du centre au point d'intersection de l'axe focal et de la tangente en I est $\frac{a^2}{x_1}$; donc $\delta = \frac{a^2}{x_1} \cos \mathrm{DNI} = -\frac{a^2}{x_1} \cos\alpha$; enfin $\mathrm{IP} = \frac{a}{e} - x_1$. Mais $y = \mathrm{IP} \cos\alpha$; remplaçant IP par $\frac{a}{e} - x_1 = \frac{a}{e} + \frac{a^2}{\delta} \cos\alpha$, et enfin δ par sa valeur (3), on a l'équation différentielle de l'enveloppe

$$y = \frac{a \cos\alpha}{e} + \frac{a^2 \cos^2\alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha}}.$$

Pour avoir la variation de y, je différentie;

$$(4) \quad dy = -a \sin\alpha \, d\alpha \left[\frac{1}{e} + \frac{(2b^2 + a^2 e^2 \cos^2\alpha) a \cos\alpha}{(a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Comme l'angle analogue à IND est d'abord égal à zéro, α commence par avoir la valeur π pour décroître constamment jusqu'à zéro quand le sommet A′ est venu sur OX. Pour savoir le signe de dy, cherchons si la quantité entre crochets (4), $f(\alpha)$, peut s'annuler; on aurait, en réduisant,

$$a^4 e^4 \cos^4\alpha + a^2 e^2 b^2 \cos^2\alpha - b^4 = 0.$$

On n'en tire pour $\cos^2\alpha$ qu'une valeur positive

$$\cos^2\alpha = \frac{b^2(\sqrt{5} - 1)}{2a^2 e^2} = \frac{(1 - e^2)(\sqrt{5} - 1)}{2e^2};$$

si cette quantité est < 1, ou si l'on a

$$(1 - e^2)(\sqrt{5} - 1) < 2e^2, \quad e^2 > \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} > \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2,$$

$f(\alpha)$ s'annule pour une valeur α_0 de α, et il faut évidemment prendre $\cos\alpha_0 < 0$. Comme $f(\alpha)$ est > 0 quand $\alpha < \frac{\pi}{2}$, il sera < 0 pour $\alpha > \alpha_0$; or $-\sin\alpha\, d\alpha$ est toujours positif; donc, lorsque α varie de π à α_0, y diminue d'abord, tandis que x croît, puisque $dx = \cot\alpha\, dy$; quand α passe par α_0 pour devenir moindre, dx et dy changent de signe; il y a rebroussement, puis x décroît, tandis que y augmente. La courbe, d'abord au-dessous de OX, le coupe pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, puis passe au-dessus, et l'ordonnée devient $a + \frac{a}{e}$ pour $\alpha = 0$; puis vient une branche symétrique de la précédente, et ainsi de suite.

Au contraire, si $e < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{dy}{d\alpha}$ ne change pas de signe; y croît sans interruption de $a - \frac{a}{e}$ à $a + \frac{a}{e}$; x décroît d'abord pour croître quand $\alpha < \frac{\pi}{2}$ La valeur $dx = \cot\alpha\, dy$ n'est intégrable qu'à l'aide des fonctions elliptiques, mais ds est plus simple. On a en général

$$ds = \frac{dy}{\sin\alpha} = -\frac{a}{e}\, d\alpha - \frac{2 - e^2 - e^2\sin^2\alpha}{(1 - e^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\, a\cos\alpha\, d\alpha;$$

cependant, quand α décroît de π à α_0, il faut changer le signe; car, dy étant négatif, on a

$$ds = -\frac{dy}{\sin\alpha}.$$

Lorsque dy ne s'annule pas, on a sans peine l'arc de développée répondant au roulement de la demi-ellipse, l'intégrale du terme en $\cos\alpha$ est nulle, et il reste $S_1 = \frac{\pi a}{e}$: dans le cas du rebroussement, $\frac{\pi a}{e}$ est l'arc depuis le point de rebroussement jusqu'au point le plus haut, moins l'arc

compté jusqu'au point inférieur; ce dernier est

$$S_2 = \int_{\pi}^{\alpha_0} a\,d\alpha \left[\frac{1}{e} + \frac{(1-e^2)\cos\alpha}{(1-e^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos\alpha}{(1-e^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

$$S_2 = \frac{a(1-e^2)\sin\alpha_0}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha_0}} - a\,\frac{2\pi - \alpha_0 - \operatorname{arc\,sin}(e\sin\alpha_0)}{e}.$$

L'arc total de l'enveloppe est $\frac{\pi a}{e} + 2S_2$.

Si l'on remplace l'ellipse par une parabole, on obtient le lieu de F en remarquant que le pied de l'ordonnée est sur la tangente au sommet. Projetant cette ordonnée sur l'axe de la parabole avec lequel elle fait l'angle α,

$$\frac{p}{2} = y\cos\alpha,$$

équation d'une chaînette dont le sommet est à la distance $\frac{p}{2}$ au-dessus de OX. D'ailleurs les points F et P sont symétriques par rapport à OX, dans le cas de la parabole; l'enveloppe de la directrice est une chaînette.

108. Théorèmes de Steiner.— *Considérons une courbe convexe et fermée* S, *un point* M *de son plan, la roulette* R *engendrée par* M *quand* S *roule sur une droite fixe, la roulette* R_1 *engendrée quand* S *roule sur une courbe égale et symétrique, enfin la podaire* P *de* M *par rapport à* S : 1° *un arc de* R *est égal à l'arc correspondant de* P; 2° *l'aire de* R, *limitée par la base et les normales extrêmes, est double de l'aire de* P *et moitié de l'aire de* R_1.

1° Soient (*fig.* 20) IA, I'A' deux tangentes successives de S, ε l'angle de contingence, AA' l'arc de podaire; on a AMA' $= \varepsilon$, et, comme MAA'I sont sensiblement sur un cercle dont AI est le diamètre, arc AA' $= \varepsilon$MI; mais que la courbe roule sur AI considéré comme fixe, M décrit un

arc de cercle MM′ égal à $MI' \times MI'M' = \varepsilon MI = AA'$; donc, etc.

2° L'aire de R, comprise entre l'arc MM′, les normales aux extrémités et la droite fixe, est sensiblement

$$MII'M' = MII' + \frac{1}{2}\varepsilon\,\overline{MI}^2,$$

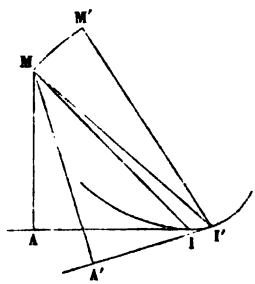
$$\text{surf. } R = \text{surf. } S + \frac{1}{2}\Sigma\varepsilon\,\overline{MI}^2,$$

la somme s'étendant à tous les angles de contingence de S; mais

$$\text{surf. } P = \Sigma MAA' = \frac{1}{2}\Sigma\varepsilon\,\overline{MA}^2.$$

Cette aire peut aussi s'évaluer comme la somme d'éléments dont l'un se compose du secteur MII′ et du triangle

Fig. 20.



IAA′; on prend ainsi l'aire de la courbe et celle qui est entre la courbe et la podaire; donc

$$\text{surf. } P = \Sigma MII' + \Sigma\frac{1}{2}\overline{IA}^2\varepsilon;$$

ajoutons à l'expression précédente

$$2\,\text{surf. } P = \Sigma MII' + \frac{1}{2}\Sigma\varepsilon\left(\overline{MA}^2 + \overline{AI}^2\right) = \text{surf. } R.$$

Si l'on fait rouler S sur une courbe symétrique fixe,

quand le point de contact se déplace de I en I′, S tourne de 2ε; l'arc décrit par M est $MM'' = 2MM'$, et la surface $MM''II'$ est $MII' + \varepsilon\overline{MI}^2$. Pour avoir l'aire intérieure à R_1, il faut ajouter à la somme de ces éléments l'aire de la base; donc

$$\text{surf. } R_1 = 2\,\text{surf. } S + \Sigma\varepsilon\overline{MI}^2 = 2\,\text{surf. } R.$$

Cette élégante démonstration est développée dans le *Cours de Calcul intégral* de M. Bertrand.

109. *Étant données la base et la roulette, trouver la roulante qui a engendré cette roulette; exemples.*

Par chaque point I de la base, on peut mener une normale IN à la roulette, et l'on a une relation entre la longueur r de IN et son angle μ avec la tangente à la base $\mu = f(r)$; prenons dans le plan de la roulante N pour pôle, cette courbe étant tangente à la base en I, la relation précédente donne pour chaque valeur du rayon vecteur son angle avec la tangente à la courbe cherchée; comme $\tang\mu = \frac{rd\theta}{dr}$, on a l'équation différentielle de la roulante.

La base et la roulette sont deux droites faisant entre elles l'angle α; μ est constant, égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. La roulante coupe tous ses rayons vecteurs sous un angle constant : c'est une spirale logarithmique.

La roulette est une parabole dont l'axe est la base; la sous-normale de la parabole étant constante, $r\cos\mu = p$, les normales de la roulante sont à une distance constante du pôle; on a une développante de cercle.

La base est un cercle et la roulette une tangente au cercle; soit a le rayon : on trouve sans peine

$$r = a(1 - \sin\mu) = a - \frac{ar\,d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}, \quad d\theta = \frac{(a-r)\,dr}{r\sqrt{2ar - r^2}}.$$

En faisant $\theta = 0$ pour $r = a$, l'intégrale est

$$\theta = 1 - \sqrt{\frac{2a - r}{r}} - \text{arc sin}\,\frac{r - a}{a}.$$

L'équation différentielle montre plus clairement la forme de la courbe; puisque $d\theta = 0$ pour $r = a$, la courbe est tangente au rayon vecteur. Du côté où r croît, θ prend des valeurs négatives et est égal à $1 - \frac{\pi}{2}$ pour $r = 2a$: c'est un sommet de la roulante; du côté des angles positifs, r décroît et s'annule pour θ infini, la courbe est asymptote au pôle. Quant à la tangente au cercle, il n'y a que la portion à une distance a de part et d'autre du point de tangence qui puisse être décrite comme roulette avec le cercle pour base.

Accélérations dans le mouvement épicycloïdal.

110. Quand une figure se meut dans un plan, les accélérations des divers ordres de ses points sont soumises à quelques lois qu'on peut trouver à l'aide d'un changement de coordonnées. Soient x_1, y_1 les coordonnées absolues d'un point M de la figure, x, y les coordonnées relatives à deux axes rectangulaires faisant partie de la figure mobile, p, q les coordonnées absolues de l'origine mobile; on a

$$x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi + p, \quad y_1 = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi + q,$$

ou, en posant $\cos\varphi = a$, $\sin\varphi = b$,

$$x_1 = ax - by + p, \quad y_1 = bx + ay + q.$$

Pour avoir les composantes de la vitesse ou des accélérations successives, on différentie par rapport au temps

$$x_1^{(n)} = xa^{(n)} - yb^{(n)} + p^{(n)}, \quad y_1^{(n)} = xb^{(n)} + ya^{(n)} + q^{(n)}.$$

Il y a un point A dont les coordonnées relatives sont α_n et

β_n pour lequel ces deux composantes sont nulles; on le nomme *centre des accélérations du $n-1^{ième}$ ordre*. Faisons

$$x - \alpha_n = r_n \cos\theta_n, \quad a^{(n)} = \omega_n \cos\lambda_n,$$
$$y - \beta_n = r_n \sin\theta_n, \quad b^{(n)} = \omega_n \sin\lambda_n.$$

Les composantes de l'accélération d'ordre $n-1$ prennent la forme

$$x_1^{(n)} = \omega_n r_n \cos(\theta_n + \lambda_n), \quad y_1^{(n)} = \omega_n r_n \sin(\theta_n + \lambda_n).$$

L'accélération d'un point quelconque M est proportionnelle à sa distance au centre A des accélérations de cet ordre; de plus, AM faisant avec OX_1 l'angle $\theta_n + \varphi$, fait avec l'accélération d'ordre $n-1$ un angle constant et égal à $\lambda_n - \varphi$, quel que soit le point M.

Soient donc A et B les centres des accélérations d'ordre $n-1$ et $p-1$ par exemple, la vitesse comptant comme accélération d'ordre zéro dont le centre est le centre instantané de rotation. Les points pour lesquels γ_{n-1} et γ_{p-1} ont un rapport donné sont sur un cercle conjugué à A et B, car leurs distances à ces centres ont un rapport constant. Les points où les deux accélérations font un angle donné ε sont sur deux segments capables des angles $\varepsilon \pm \lambda_n \mp \lambda_p$ décrits sur AB comme corde. En particulier, les points où l'accélération est tangentielle ou normale à la vitesse sont sur des cercles passant au centre instantané de rotation; on ne peut rien conclure sur l'accélération en ce dernier point, où la vitesse a une grandeur nulle et une direction indéterminée.

Ces théorèmes peuvent s'établir en considérant les binômes

$$x_1^{(n)} x_1^{(p)} + y_1^{(n)} y_1^{(p)} = A_{n,p} = \gamma_{n-1}\gamma_{p-1}\cos(\gamma_{n-1}, \gamma_{p-1}),$$
$$x_1^{(n)} y_1^{(p)} - x_1^{(n)} y_1^{(p)} = B_{n,p} = \gamma_{n-1}\gamma_{p-1}\sin(\gamma_{n-1}, \gamma_{p-1}).$$

M. Jordan remarque que ces binômes sont les premiers membres de l'équation d'un cercle passant par les centres de γ_{n-1} et de γ_{p-1}. On en conclut, outre les propositions précédentes, que le cercle est le lieu des points où $A_{n,p}$, $B_{n,p}$ ont une valeur donnée, aussi bien que ceux où $A_{n,p} = \lambda A_{n',p'}, \ldots$. Si, au contraire, on donne

$$\gamma_{n-1}\cos(\gamma_{n-1}, \gamma_{p-1}) = \frac{A_{n,p}}{\gamma_{p-1}} = \lambda, \quad \text{ou} \quad \gamma_{n-1}\sin(\gamma_{n-1}, \gamma_{p-1}) = \lambda',$$

un point M du lieu est tel qu'il existe un rapport constant entre sa puissance relative à un cercle qui passe au centre A de l'ordre $p-1$ et la longueur MA. Soit B le second point où MA rencontre le cercle considéré : la puissance par rapport au cercle est MA $\times$ MB; il faut donc que MB soit constant; le lieu de M est une conchoïde du cercle AB, dont le point double est A. Tel est le lieu des points où l'accélération tangentielle ou centripète a une valeur constante.

Supposons qu'à l'époque t les axes fixes et les axes mobiles coïncident, que l'origine soit le centre instantané, et l'axe des x tangent aux courbes lieux des centres instantanés; p, q, p', q', φ sont nuls. L'accélération du point O de la figure mobile est dirigée suivant OY et égale à $\omega\frac{ds}{dt}$, ds étant le déplacement du centre instantané pendant le tempt dt; en effet, la vitesse de O, nulle à l'époque t, est est $\omega\, ds$ à l'époque $t + dt$; d'ailleurs

$$ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) = \omega\, dt.$$

Si l'on calcule x''_1 et y''_1, on trouve dans ce cas

$$x''_1 = -\omega^2 x + y\frac{d\omega}{dt}, \quad y''_1 = \omega\frac{ds}{dt} - x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y.$$

Le centre des accélérations du premier ordre est donné par

les formules

$$\frac{x}{\frac{d\omega}{dt}} = \frac{y}{\omega^2} = \frac{\omega\frac{ds}{dt}}{\omega^4 + \frac{d\omega^2}{dt^2}},$$

et l'on pourra vérifier les théorèmes généraux.

EXERCICES.

On fait rouler une courbe successivement sur une droite et sur une courbe égale et symétrique; les rayons de courbure d'une roulette pour les deux cas et la normale forment une progression harmonique; les rayons de courbure de l'enveloppe d'une droite entraînée et sa normale sont en progression arithmétique.

Une droite entraînée par un cercle qui roule sur une droite a pour enveloppe une développante de cycloïde; si la roulante est une chaînette et la base une droite, l'enveloppe sera une développante de parabole. (Besant.)

Enveloppe d'un cercle tangent à une droite qui roule sur un cercle fixe, de la tangente au sommet d'une cycloïde qui roule sur une droite. (Besant.)

Roulette décrite par le pôle d'une épicycloïde qui roule sur une droite (ellipse); par le pôle d'une spirale logarithmique qui roule sur un cercle (développante); par le centre d'une hyperbole équilatère qui roule sur une droite. (Besant.)

La portion de tangente à l'hypocycloïde à trois sommets comprise à l'intérieur de la courbe a une longueur constante. (Besant.)

Mouvement d'une parabole qui glisse sur deux droites rectangulaires.

MOUVEMENT GÉNÉRAL D'UN SOLIDE.

Cas où il y a un point fixe.

111. *Étant donnés trois axes rectangulaires définis par les angles qu'ils font avec un système d'axes fixes susceptibles de coïncider avec les premiers, déterminer l'axe autour duquel il faut faire tourner le premier système pour l'amener sur le second et la grandeur de la rotation.* (CAYLEY.)

L'axe cherché OI est le lieu des points qui ont des coordonnées égales par rapport aux deux systèmes. On a en général, entre les deux systèmes de coordonnées d'un point, des relations de la forme

$$x = ax_1 + a'y_1 + a''z_1, \quad y = bx_1 + b'y_1 + b''z_1,$$
$$z = cx_1 + c'y_1 + c''z_1.$$

Faisons $x = x_1, \ldots$; on a trois équations sans partie constante qui admettent une solution différente de zéro, car leur déterminant est nul.

Si l'on considère le groupe de la deuxième et de la troisième équation, ou celui de la première et de la troisième, ou de la première et de la deuxème, on a tour à tour

$$\frac{x}{1 + a - b' - c''} = \frac{y}{b + a'} = \frac{z}{c + a''},$$
$$\frac{y}{1 + b' - c'' - a} = \frac{z}{c' + b''} = \frac{x}{a' + b}, \ldots;$$

mais on a des résultats plus symétriques en multipliant

membre à membre d'une façon convenable :

$$\frac{x^2}{1+a-b'-c''}=\frac{y^2}{1+b'-c''-a}=\frac{z^2}{1+c''-a-b'}.$$

Telles sont les équations de l'axe OI; soit A son angle avec OX :

$$\cos^2 A=\frac{1+a-b'-c''}{3-a-b'-c''}.$$

Dans le triangle sphérique isoscèle XIX_1, l'angle I mesure la rotation, et l'on a

$$a=\cos^2 A+\sin^2 A\cos I,$$

$$\cos^2\frac{1}{2}I=\frac{1+a-2\cos^2 A}{2(1-\cos^2 A)}=\frac{1+a+b'+c''}{4}.$$

112. *Mouvement d'une figure sphérique.* — Le mouvement d'un solide autour d'un point fixe est déterminé par celui de la figure qu'il intercepte sur une sphère de rayon 1 ayant son centre au point fixe. Le déplacement d'une figure sur la sphère est soumis à des règles analogues à celles qu'on a établies pour le plan; quant au centre de courbure d'une roulette sphérique, il suffit de faire la perspective sur un plan tangent au pôle instantané pour reconnaître que la construction de Savary s'applique, sauf la substitution d'arcs de grands cercles à des droites. Cependant toutes les propriétés des figures planes ne se reproduisent pas dans les figures sphériques; ainsi, quand un cercle plan roule dans l'intérieur d'un cercle de rayon double, un point de la circonférence mobile décrit un diamètre du cercle fixe; il n'en saurait être de même sur une sphère, car un cercle de rayon sphérique r a une circonférence égale à $2\pi\sin r$; un cercle de rayon double a pour circonférence $2\pi\sin 2r$, qui est moindre que le double de la première. L'épicycloïde ne se confond pas avec un arc de grand cercle; elle

passe au centre du cercle fixe et a des rebroussements sur sa circonférence.

Les droites de l'espace et du corps mobile qui doivent être successivement axes instantanés forment deux cônes qui roulent l'un sur l'autre; soient C et C_1 leurs cônes droits osculateurs suivant la génératrice du contact OI; α, α_1 les demi-angles au sommet, ω la vitesse angulaire du cône mobile C_1, ds la quantité dont se déplace le pôle instantané pendant le temps dt, R, R_1 les rayons de courbure principaux des deux cônes; on a

$$(1) \qquad \omega\, dt = \frac{ds}{R} + \frac{ds}{R_1} = ds(\cot\alpha + \cot\alpha_1).$$

Abaissons IP, IP_1 perpendiculaires sur les axes de C et de C_1, et nommons φ, φ_1 les vitesses angulaires de ces droites dans l'intérieur des deux cônes; on a

$$IP = \sin\alpha, \quad IP_1 = \sin\alpha_1, \quad ds = \varphi \sin\alpha\, dt = \varphi_1 \sin\alpha_1\, dt;$$

ces valeurs transforment l'équation (1) dans la suivante :

$$\omega = \varphi \cos\alpha + \varphi_1 \cos\alpha_1;$$

elles donnent en outre

$$\frac{\varphi}{\sin\alpha_1} = \frac{\varphi_1}{\sin\alpha} = \frac{\varphi\cos\alpha + \varphi_1\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1\cos\alpha + \ldots} = \frac{\omega}{\sin(\alpha + \alpha_1)}.$$

Si l'on prend sur les axes des cônes des longueurs φ et φ_1 mesurant les vitesses de précession du plan méridien qui contient l'axe instantané, leur résultante est ω. Quand on envisage le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité, on sait que φ est > 0 et $\omega < 0$; donc C_1 doit rouler à l'intérieur de C. D'ailleurs, en prenant l'année pour unité de temps,

$$\varphi = 50'',2, \quad \omega = -360^\circ \times 366,24, \quad \alpha = 23^\circ 27';$$

en prenant $\sin\alpha$ au lieu de $\sin(\alpha - \alpha_1)$, on trouve

$$-\sin\alpha_1 = \frac{50''.2 \times \sin 23^\circ 27'}{360 \times \overline{60}^2 \times 366,24}.$$

En multipliant par le rayon terrestre, on obtient environ 27 centimètres pour le rayon du cercle que le pôle décrit sur la surface terrestre.

113. *Détermination analytique des éléments du mouvement.*

Considérons trois axes fixes OX_1, OY_1, OZ_1 et trois axes mobiles OX, OY, OZ liés au solide; on sait que les relations entre les coordonnées absolues et relatives sont de la forme

$$x_1 = ax + a'y + a''z,$$
$$y_1 = bx + b'y + b''z,$$
$$z_1 = cx + c'y + c''z.$$

Les projections de la vitesse sur les axes fixes sont

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = x\frac{da}{dt} + y\frac{da'}{dt} + z\frac{da''}{dt}, \quad V_{y_1} = x\frac{db}{dt} + \ldots.$$

On projette ces trois composantes sur OX, puis sur OY et OZ, et l'on pose

$$p\,dt = a''\,da' + b''\,db' + c''\,dc' = -(a'\,da'' + b'\,db'' + c'\,dc''),$$
$$q\,dt = a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'', \quad r\,dt = a'\,da + b'\,db + c'\,dc;$$

il en résulte, pour les projections de la vitesse sur les axes mobiles,

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qx.$$

L'interprétation de ces équations est bien connue; le mouvement à l'époque t est une rotation résultant de trois rotations p, q, r autour de OX, OY, OZ.

On peut avoir les dérivées $\frac{da}{dt}, \cdots$ en fonction de p, q, r, en formant les valeurs de V_{x_1}, V_{y_1}, V_{z_1} comme étant les sommes des projections de V_x, V_y, V_z sur les axes immobiles. On a ainsi

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} V_{x_1} &= aV_x + a'V_y + a''V_z = x(ra' - qa'') \\ &\quad + y(pa'' - ra) + z(qa - pa'). \end{aligned} \right.$$

Cette valeur doit être identique à la valeur (1); en égalant les coefficients de x, y, z, et faisant de même pour V_{y_1}, V_{z_1}, on a

$$\frac{da}{dt} = a'r - a''q, \quad \frac{da'}{dt} = a''p - ar, \quad \frac{da''}{dt} = aq - a'p,$$

$$\frac{db}{dt} = b'r - b''q, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dc}{dt} = c'r - c''q, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut remplacer les neuf cosinus par les trois variables d'Euler, l'angle θ du plan xy avec le plan x_1y_1, les angles φ et ψ de l'intersection OP des deux plans avec OX et OX_1; les valeurs de φ, ψ, θ en a, b, c,... donnent leurs dérivées par rapport au temps en fonction de p, q, r. On évite ces calculs en regardant la rotation instantanée ω comme résultant de trois autres $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, autour de OZ_1, OP, OZ; p est la somme des projections de leurs axes sur OX,...,

$$p = \sin\theta \sin\varphi \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$q = \sin\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Résolvant par rapport à $d\theta$, $d\psi$, $d\varphi$,

$$\frac{d\theta}{dt} = p\cos\varphi - q\sin\varphi, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p\sin\varphi + q\cos\varphi}{\sin\theta},$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \cot\theta(p\sin\varphi + q\cos\varphi).$$

A l'époque t, l'axe OI de la rotation instantanée a pour projections sur OX, OY, OZ, p, q, r; à l'époque $t + dt$, les axes OX,... sont venus en OX',..., et l'axe de rotation est une droite OI', dont les projections sur OX',... sont $p + dp$, $q + dq$, $r + dr$; mais, OX ayant été amené en OX' par une rotation autour d'une droite infiniment voisine de OI', on a

$$\mathrm{I'OX} = \mathrm{I'OX'};$$

de même $\mathrm{I'OY} = \mathrm{I'OY'}$, $\mathrm{I'OZ} = \mathrm{I'OZ'}$, et les projections de OI' sur OX, OY, OZ sont encore $p + dp$, $q + dq$, $r + dr$. La rotation OI' est la résultante de OI et de II', en sorte que $\lim \frac{\mathrm{II'}}{dt}$ peut s'appeler *accélération angulaire* γ_ω, et ses projections sur OX,... sont $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$.

En différentiant les formules (2) par rapport au temps, on trouve les projections de l'accélération sur les axes fixes; en projetant ces trois composantes sur chacun des axes mobiles successivement, on a les composantes de l'accélération suivant ces axes. Tenant compte des valeurs de $\frac{da}{dt}, \ldots$, ajoutant et retranchant p^2x, on trouve

$$\gamma_x = z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} + p(px + qy + rz) - x(p^2 + q^2 + r^2),$$
$$\gamma_y = x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} + \ldots.$$

L'accélération peut être envisagée comme résultant de trois parties : la première, perpendiculaire au rayon vec-

teur OM et à la direction de l'accélération angulaire, égale à $OM\gamma_\omega \sin(OM, \gamma_\omega)$; la deuxième partie, dirigée suivant OI, égale à $\omega^2 OM \cos MOI$; la troisième suivant MO, égale à $\omega^2 OM$; ces deux dernières pouvant être remplacées par une seule, $\omega^2 OM \sin MOI$ dans le plan MOI et perpendiculaire à OI.

Mouvement dans l'espace.

114. Le mouvement le plus général d'un solide peut être considéré comme résultant d'une translation et d'une rotation autour d'un axe mené par un point O choisi à volonté. Soient OX, OY, OZ trois axes liés au corps, p, q, r les composantes de la rotation OI suivant ces trois droites, u, v, w les composantes de la vitesse V_0 absolue du point O; les composantes de la vitesse d'un point M seront

$$V_x = u + qz - ry, \quad V_y = v + rx - pz, \quad V_z = w + py - qx.$$

La rotation p, q, r est indépendante du choix du point O; mais u, v, w en dépendent, et l'on sait qu'on peut choisir une origine C au lieu de O, de sorte que la vitesse de C soit dirigée suivant l'axe de rotation CC'. Pour avoir les équations de cet axe, il suffit de chercher le lieu des points dont la vitesse V est parallèle à OI :

$$(1) \qquad \frac{u + qz - ry}{p} = \frac{v + rx - pz}{q} = \frac{w + py - qx}{r};$$

en combinant ces rapports, on trouve que chacun est égal à $\frac{V}{\omega}$ et aussi à

$$\frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + p^2} = \frac{\omega V_0 \cos(\omega, V_0)}{\omega^2}.$$

Pour tous les points de CC', V est égal à

$$\frac{1}{\omega}(pu + qv + rw).$$

ou à la projection de V_0 sur OI. En comparant les deux dernières fractions (1), on trouve

$$rv - qw = rpz + pqy - (r^2 + q^2)x = p(px + qy + rz) - \omega^2 x,$$

ce qui permet d'écrire les équations de l'axe de rotation et de glissement

$$\frac{\omega^2 x + rv - qw}{p} = \frac{\omega^2 y + pw - ru}{q} = \frac{\omega^2 z + qu - pv}{r}.$$

Les projections de l'accélération sur les axes mobiles s'obtiennent en ajoutant aux expressions trouvées dans le cas d'un point fixe les projections u', v', w' de l'accélération du point O.

115. Les composantes de la vitesse et de l'accélération se simplifient si l'on prend pour axe des x l'axe de rotation et de glissement, pour axe des z la perpendiculaire commune à cet axe et à sa position infiniment voisine, pour axe des y une perpendiculaire aux deux premiers; la vitesse de l'origine à l'époque $t + dt$ sera dans le plan des xy; donc w' est nul, et il en est de même de v, w, q, r, $\frac{dr}{dt}$; p est égal à ω, $\frac{dp}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = \omega'$, et je fais $\frac{dq}{dt} = q'$; avec ces coordonnées, les valeurs générales deviennent

$$V_x = u, \quad V_y = -\omega z, \quad V_z = \omega y,$$

$$\gamma_x = u' + q'z, \quad \gamma_y = v' - \omega' z - \omega^2 y, \quad \gamma_z = \omega' y - q'x - \omega^2 z.$$

Les composantes de la vitesse mettent en évidence le mouvement héliçoïdal; les points où la vitesse est la même sont sur un cylindre droit.

Il existe un centre des accélérations, à moins que $\omega q'$ ne soit nul; le lieu des points dont l'accélération totale est K est un ellipsoïde dont le centre est le centre des accéléra-

tions; l'équation, rapportée à ce point, serait

$$q'^2z^2 + (\omega^2 y + \omega' z)^2 + (q'x - \omega' y + \omega^2 z)^2 = K^2.$$

Comme le rectangle yz manque, l'ellipsoïde n'est pas de révolution : les cas particuliers se discutent aisément.

Le lieu des points où l'accélération a une directiou donnée est une ligne droite.

Les points où l'accélération est normale à la vitesse sont sur un hyperboloïde

$$\omega\omega'(y^2 + z^2) - \omega q' xy + (uq' - \omega v')z + uu' = 0.$$

Le plan des yz est un plan cyclique; le plan des xz coupe la surface suivant deux droites parallèles : selon qu'elles sont réelles ou imaginaires, l'hyperboloïde est à une ou à deux nappes.

Les points dont l'accélération est tangentielle sont à l'intersection des surfaces

$$q'\omega z^2 - \omega^2 uy + (\omega u' - u\omega')z + uv' = 0,$$
$$\omega q' yz + uq' x + (\omega u' - u\omega')y + \omega^2 uz = 0;$$

la première est un cylindre parabolique parallèle à l'axe des x, la seconde un paraboloïde dont l'axe a la même direction; les deux surfaces ont une génératrice commune à l'infini dans le plan $z = 0$: elles se coupent suivant une cubique gauche et non suivant une courbe plane.

116. Le mouvement infiniment petit d'un solide peut être regardé comme résultant de deux rotations autour d'axes non situés dans un même plan. En effet, soient AB la perpendiculaire commune aux deux axes, $AP = p$, $BQ = q$ les droites qui représentent les deux rotations, θ leur angle. Menons AQ′ égale et parallèle à BQ; les ro-

tations p et q' ont une résultante $AR = \omega$, et

$$\frac{p}{\sin(\omega, q)} = \frac{q}{\sin(\omega, p)} = \frac{\omega}{\sin\theta}.$$

Décomposons p et q chacune en deux rotations, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à AR; les rotations parallèles à AR ont une résultante $\omega = p\cos(p, \omega) + q\cos(q, \omega)$; l'axe de cette rotation rencontre AB à angle droit en un point O tel que, si l'on fait $OA = a$, $OB = b$, $AB = c$, on ait

$$\frac{a}{q\cos(q, \omega)} = \frac{b}{p\cos(p, \omega)} = \frac{c}{\omega},$$

$$\frac{a}{q^2 + pq\cos\theta} = \frac{b}{p^2 + pq\cos\theta} = \frac{c}{\omega^2}.$$

Les rotations perpendiculaires à AR donnent un couple équivalent à une translation dont la vitesse V, parallèle à ω, est

$$V = pc\sin(p, \omega) = c\frac{pq}{\omega}\sin\theta.$$

Il y a une infinité de manières de choisir les axes des deux rotations, de manière que le mouvement héliçoïdal résultant coïncide avec le mouvement élémentaire du solide. Les droites AP, BQ sont dites *conjuguées;* le déplacement de chacune d'elles peut être obtenu par une simple rotation autour de la conjuguée, en sorte que les plans normaux aux trajectoires de ses divers points passent par la conjuguée. De là résulte la construction indiquée par M. Chasles pour l'axe central, lorsqu'on connaît la direction des vitesses de trois points A, B, C : on mène en A, B, C les plans normaux aux vitesses de ces points; les deux premiers se coupent suivant une droite $\alpha\beta$, les deux derniers suivant $\beta\gamma$; AB et $\alpha\beta$, BC et $\beta\gamma$ forment deux systèmes de droites conjuguées. Menons donc la perpendiculaire commune à AB et

à $\alpha\beta$, puis celle de BC et $\beta\gamma$; l'axe central doit rencontrer ces deux perpendiculaires à angle droit; il est donc leur plus courte distance.

EXERCICES.

Étant donnés trois axes rectangulaires, un solide se déplace de manière que deux de ses points A, B glissent sur OX et OY, tandis qu'un plan contenant A et B et lié au corps passe par un point fixe H de OZ; trouver à chaque instant l'axe central. Soit C le quatrième sommet du rectangle dont les trois autres sont O, A, B; le mouvement du solide peut résulter d'une rotation autour de la parallèle à OZ menée par C et d'une rotation autour de AB : on prend pour variable l'angle de AB avec OX, et l'on compose les deux rotations.

En supposant que le centre de la Terre décrive un cercle d'un mouvement uniforme, tandis qu'elle tourne autour d'un diamètre qui reste parallèle à lui-même, trouver pour chaque position l'axe central, la vitesse de rotation absolue et de glissement, le lieu des axes centraux dans la Terre et dans l'espace.

Les tangentes aux trajectoires des divers points d'une droite forment un paraboloïde; les projections des vitesses sur la droite sont égales.

Quand une droite est tangente à la trajectoire d'un de ses points, il en est de même pour la conjuguée, et les deux points considérés sont sur la plus courte distance des deux droites.

DYNAMIQUE.

MOUVEMENT D'UN POINT LIBRE.

Mouvement rectiligne.

117. Soient m la masse d'un point matériel se mouvant en ligne droite, F la force qui le sollicite suivant cette droite, x sa distance à un point fixe pris sur la droite, v sa vitesse à l'époque t; on a les relations suivantes :

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\frac{1}{2}v^2}{dx}.$$

Qu'on donne entre F, t, x et v une relation qui caractérise le problème avec les circonstances initiales, on est ramené à une simple question d'Analyse.

118. *Mouvement d'un point matériel* M *tiré du repos par une action attractive émanant d'un centre fixe* O *et inversement proportionnelle au cube de la distance.* (Licence, 1860.)

Le mobile reste sur la droite qui va de O à sa position initiale A. Soient $OM = x$, $OA = a$, $m\mu^2$ l'attraction à l'unité de distance; l'équation du mouvement est

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{x^3};$$

multiplions par $2dx$, ou remplaçons $\frac{d^2x}{dt^2}$ par $\frac{1}{2}\frac{d.v^2}{dx}$, on a l'intégrale des forces vives

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} = \mu^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{\pm x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\mu}{a}dt.$$

On prend d'abord le signe —, parce que x commence par décroître, et l'on a l'intégrale seconde

$$(3) \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\mu t}{a}.$$

La constante d'intégration est nulle, puisque $a^2 - x^2$ est nul pour $t = 0$. Cette intégrale ne peut être constamment vérifiée, car elle exigerait que t ne dépassât point $\frac{a^2}{\mu}$, ce qui serait absurbe; elle est du moins vraie jusqu'à ce que t atteigne cette valeur avec $x = 0$, car jusque-là (2) ne donne pas de difficultés. A cette époque, M arrive en O avec une vitesse infinie et se trouve soumis à une force infinie : il y aurait de l'indétermination; mais il est naturel d'admettre que M dépassera O et que l'intégrale des forces vives aura toujours lieu. En n'étudiant que le mouvement défini par cette convention, on voit que, x devenant négatif, il faudra prendre le signe + dans l'équation (2), et l'on aura une nouvelle intégrale avec une constante indéterminée

$$(4) \qquad -\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\mu t}{a} + C.$$

La constante C n'est plus nulle; quand M est venu en O, x est zéro et $t = \frac{a^2}{\mu}$; donc $C = -2a$, t étant toujours

compté à partir de l'origine du mouvement; dans sa seconde période, le mouvement est donc défini par la loi

$$(5) \qquad -\sqrt{a^2-x^2} = -2a + \frac{\mu t}{a}.$$

Cette nécessité de changer non-seulement le signe du radical qui entre dans l'intégrale, mais aussi la constante arbitraire, ne se rencontre pas généralement, témoin le mouvement d'un point attiré proportionnellement à la distance : cela tient à ce que, lorsqu'il y a à changer le signe d'un radical dans l'équation différentielle, le radical est ordinairement nul, ainsi que le terme qui en résulte dans l'intégrale, et celle-ci n'offre pas de discontinuité à laquelle on est forcé de parer à l'aide d'un changement de constante arbitraire. J'en aurai un exemple en suivant encore notre mobile; l'équation (5) montre qu'il parcourra une distance $OA' = a$ en sens contraire de OA dans le temps $\frac{a^2}{\mu}$; alors $x = -a$, et (2) prouve que dx doit devenir > 0, et le radical reprendre le signe —; le retour de A′ vers O serait défini par l'équation

$$+\sqrt{a^2-x^2} = \frac{\mu t}{a} + C'.$$

Comme on a $x = -a$ avec $t = \frac{2a^2}{\mu}$, C′ est égal à $-2a$, et la troisième période du mouvement est définie par la loi

$$\sqrt{a^2-x^2} = -2a + \frac{\mu t}{a}:$$

il suffit de changer le signe du radical dans l'équation (5); mais, quand nous repassons au delà de O vers A, le radical doit changer de signe sans s'annuler : nous revenons à la forme d'intégrale (4); or ici x est nul avec $t = \frac{3a^2}{\mu}$; il

faut que C soit $-4a$, et la loi du mouvement jusqu'au troisième passage en O est donnée par la formule

$$\mp\sqrt{a^2-x^2}=-4a+\frac{\mu t}{a};$$

alors nouveau changement de constante, et ainsi de suite.

119. *Mouvement d'un point* M *attiré vers deux centres fixes* O *et* C *avec des intensités inversement proportionnelles au carré des distances, le mobile restant sur la droite* OC; *ce serait le cas d'un corps se mouvant entre la Lune et la Terre.*

Prenons le point O pour origine et la masse du mobile pour unité. Soient $OC=c$, a et b les distances respectives auxquelles les attractions de O et de C sont égales à g. Dans le cas actuel, c'est l'équation différentielle du problème qui change selon la position du mobile : si celui-ci est entre O et C, on aura

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\frac{1}{2}v^2}{dx}=-g\left[\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{(c-x)^2}\right].$$

Quand le mobile est au delà de C ou de O, on a respectivement

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\mp g\left[\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{(c-x)^2}\right].$$

Plaçons-nous dans le premier cas, et soit v_0 la valeur initiale de v pour $x=x_0$: on a pour intégrale première

$$(2)\quad v^2=v_0^2+2ga^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)+2gb^2\left(\frac{1}{c-x}-\frac{1}{c-x_0}\right)=f(x).$$

La seconde intégration qui donnerait t en fonction de x conduit à une intégrale elliptique; mais il suffit de discuter les valeurs que v peut prendre pour se faire une idée nette du mouvement. En égalant v^2 à zéro, on a une équation du

second degré, outre la solution $x = \pm\infty$; quand x est très-près de zéro ou de c, $f(x)$ est > 0; il faut voir si l'expression peut devenir négative, et pour cela substituer la valeur x_1 qui annule $f'(x)$; on a

$$(3) \qquad \frac{x_1}{a} = \frac{c - x_1}{b} = \frac{c}{a+b}.$$

et

$$(4) \qquad f(x_1) = v_0^2 - 2g\left(\frac{a^2}{x_0} + \frac{b^2}{c - x_0}\right) + 2g\frac{(a+b)^2}{c}.$$

Si cette valeur est > 0, le mobile ira sans s'arrêter depuis son point de départ jusqu'à O ou C, selon le sens de la vitesse initiale, dépassera ces points avec une vitesse infinie, et son mouvement sera déterminé par une des deux autres équations qu'il faut substituer à (1) en dehors de l'espace OC. Supposons, au contraire, $f(x_1) < 0$; si le mobile est lancé dans la direction de O vers C, et si $x_0 < x_1$, le mobile s'arrête pour la plus petite valeur de x qui annule v^2, puis il revient vers O qu'il dépasse avec une vitesse infinie. Le cas limite est celui où $f(x_1)$ est nulle; on peut alors transformer l'équation (2), en retranchant du second membre $f(x_1)$ qui est nulle; en tenant compte de (3), on a

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2g(a+b)^2(x - x_1)^2}{cx(c-x)}.$$

On n'a qu'une irrationnelle du second degré; mais, sans expliciter l'intégrale, on voit que x variera de x_0 à x_1 pour n'atteindre cette valeur qu'après un temps infini. Examinons l'hypothèse où les points O et C seraient les centres de la Terre et de la Lune; a est le rayon terrestre, soit 6360 kilomètres; b est environ $\frac{1}{9}a$, $c = 60a$. Imaginons que x_0 soit égal à a; pour que le mobile atteigne la position de repos correspondant à $x = x_1 = 54a$, il faudrait

le lancer avec une vitesse telle que

$$v_0^2 = 2ga\left(1 + \frac{1}{81 \times 59} - \frac{100}{81 \times 60}\right), \quad v_0 = 7800 \text{ mèt. env.}$$

Avec une vitesse moindre, le point retombera sur la Terre.

120. *Mouvement vertical d'un point pesant, en admettant qu'il éprouve dans l'air une résistance proportionnelle au cube de la vitesse.*

Supposons que le corps monte, l'équation de son mouvement sera de la forme

$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} = -g - g\frac{v^3}{k^3}.$$

Séparons les variables et décomposons en fractions simples :

$$\frac{3g\,dt}{k} = -\frac{3k^2\,dv}{k^3 + v^3} = -\frac{dv}{v + k} + \frac{(v - 2k)\,dv}{v^2 - vk + k^2},$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{3gt}{k} &= \mathrm{L}\frac{(v_0 + k)\sqrt{v^2 - vk + k^2}}{(v + k)\sqrt{v_0^2 - v_0 k + k^2}} \\ &\quad + \sqrt{3}\,\text{arc tang}\,\frac{k(v_0 - v)\sqrt{3}}{2k^2 - k(v + v_0) + 2vv_0}. \end{aligned} \right.$$

Si dans (1) on remplace dt par $\frac{dx}{v}$, on en tire

$$\frac{3g\,dx}{k^2} = -\frac{3kv\,dv}{k^3 + v^3} = \frac{dv}{v + k} - \frac{(v + k)\,dv}{v^2 - vk + k^2};$$

d'où

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{3gx}{k^2} &= \mathrm{L}\frac{(v + k)\sqrt{v_0^2 - v_0 k + k^2}}{(v_0 + k)\sqrt{v^2 - vk + k^2}} \\ &\quad + \sqrt{3}\,\text{arc tang}\,\frac{k(v_0 - v)\sqrt{3}}{2k^2 - k(v + v_0) + 2vv_0}. \end{aligned} \right.$$

Il suffit d'éliminer v entre (2) et (3) pour avoir une relation entre x et t, et il y aurait avantage à remplacer ces équations par leur somme et leur différence. Le résultat est compliqué; mais, si l'on donne à v des valeurs arbitraires entre v_0 et zéro, on aura autant de valeurs simultanées qu'on voudra de t et de x; en faisant $v=0$, on trouve, pour la position la plus élevée du mobile,

$$x=\frac{k^2}{3g}\left(\mathrm{L}\frac{\sqrt{v_0^2-v_0k+k^2}}{v_0+k}+\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{v_0\sqrt{3}}{2k-v_0}\right).$$

Le cas du corps descendant se déduit sans peine du premier en changeant g en $-g$, k en $-k$; on trouve qu'avec le temps v s'approche de plus en plus de k, et que x croit indéfiniment.

Pour voir ce que devient t quand on fait k infini, écrivons-le ainsi :

$$t=\frac{k}{3g}\left[\frac{3}{2}\mathrm{L}\frac{1+\frac{v_0}{k}}{1+\frac{v}{k}}+\frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{1+\frac{v^3}{k^3}}{1+\frac{v_0^3}{k^3}}+\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{(v_0-v)\sqrt{3}}{2k-v-v_0+\frac{2vv_0}{k}}\right]$$

$$=\frac{k}{3g}\left[\frac{3}{2}\frac{v_0-v}{k}-\frac{3}{4}\frac{v_0^2-v^2}{k^2}+\ldots+\frac{3}{2}\frac{v_0-v}{k}\left(1+\frac{v+v_0}{2k}-\ldots\right)\right].$$

La partie qui reste finie est $\frac{v_0-v}{g}$; un développement analogue donne $\frac{v_0^2-v^2}{2g}$ pour les termes finis de la valeur de x; mais, si l'on voulait avoir t ou x en série ordonnée suivant les puissances négatives de k, il vaudrait mieux ordonner de la même manière l'équation différentielle primitive; ainsi pour t

$$g\,dt=-\frac{k^3\,dv}{k^3+v^3}=-dv+\frac{v^3\,dv}{k^3}-\frac{v^6\,dv}{k^6}+\ldots,$$

et l'on intègre aisément.

121. *Un point matériel est attiré vers un centre fixe* O *avec une intensité fonction continue de la distance, et il se meut dans un milieu homogène dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse; déterminer la loi d'attraction de manière que le mobile partant du repos arrive en* O *dans un temps* T *indépendant de la distance initiale* a. (W. WALTON.)

Soient $f(x)$ la fonction cherchée de la distance x, kv^2 la résistance de l'air;

$$(1)\quad \frac{d.v^2}{dx} = 2kv^2 - 2f(x), \quad v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} = e^{2kx}\int_x^a 2e^{-2kx}f(x)dx.$$

Faisons

$$(2)\qquad \int_0^x 2e^{-2kx}f(x)dx = u, \quad e^{-kx}dx = \varphi(u)du.$$

Soit α la valeur de u qui répond à $x = a$; on a

$$\int_x^a 2e^{-2kx}f(x)dx = \int_0^a - \int_0^x = \alpha - u.$$

On n'a qu'à intégrer la valeur de dt tirée de (1) pour avoir

$$T = \int_0^\alpha \frac{\varphi(u)du}{\sqrt{\alpha - u}};$$

changeons de variables en posant $u = \alpha z$, nous aurons

$$T = \int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha}\varphi(\alpha z)dz}{\sqrt{1-z}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\alpha z}.\varphi(\alpha z)dz}{\sqrt{z-z^2}}.$$

Pour que T ne dépende pas de α, il faut que $\sqrt{\alpha z}\varphi(\alpha z)$ soit une constante; autrement elle serait croissante ou décroissante tant que la variable αz serait comprise entre zéro et une valeur finie h. Donnons à α deux valeurs différentes

moindres que h; les éléments de l'intégrale dans un des cas seront tous plus grands ou plus petits que dans l'autre et T ne sera pas constant. On a donc

$$\varphi(\alpha z) = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha z}}, \quad \varphi(u) = \frac{\lambda}{\sqrt{u}}.$$

La seconde équation (2) devient

$$e^{-kx}dx = \frac{\lambda du}{\sqrt{u}}, \quad \text{d'où} \quad 1 - e^{-kx} = 2\lambda k\sqrt{u},$$

la constante d'intégration étant choisie de manière que u s'annule avec x. En différentiant la première équation (2),

$$2e^{-2kx}f(x)dx = du = e^{-kx}dx\frac{\sqrt{u}}{\lambda} = e^{-kx}\frac{1 - e^{-kx}}{2\lambda^2 k}dx,$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{4\lambda^2 k}(e^{kx} - 1).$$

Quant au temps de la chute, c'est

$$T = \int_0^1 \frac{\lambda dz}{\sqrt{z - z^2}} = \pi\lambda.$$

Lorsque k est nul ou qu'on néglige la résistance de l'air, on voit sans peine que $f(x)$ se réduit à $\frac{x}{4\lambda^2}$.

Mouvement curviligne.

122. Ce mouvement se détermine d'une manière générale en exprimant que les diverses composantes de l'accélération, multipliées par la masse du mobile, sont égales aux composantes analogues de la force motrice qui agit sur le mobile. On a, pour déterminer les trois coordonnées en fonction de t, trois équations différentielles du second

ordre ; l'intégration donne six constantes qu'on détermine à l'aide des valeurs initiales des coordonnées et de leurs dérivées par rapport au temps. Il sera souvent utile de considérer l'intégrale des aires et celle des forces vives quand elles ont lieu.

Je rappelle dès maintenant une proposition générale qui est vraie pour un système matériel placé dans des conditions quelconques : un problème de Dynamique n'a qu'une solution ; un système placé dans des circonstances données prend un mouvement nécessaire et fatal. Si donc on trouve pour les différents points une loi de mouvement qui satisfasse aux équations différentielles du problème et aux conditions initiales, le problème est résolu : le mouvement possible est seul possible.

123. *Mouvement d'un point attiré vers une droite fixe par une force inversement proportionnelle au carré de la distance et ayant une vitesse initiale a parallèle à cette droite.*

Le mobile reste dans le plan qui passe par sa position initiale et la droite attirante ; prenons celle-ci pour axe des x, et une perpendiculaire par la position initiale pour axe des y ; les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{c^3}{y^2},$$

intégrales premières :

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{2c^3(y_0 - y)}{yy_0}};$$

éliminant dt, on a, pour la trajectoire,

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{2c^3(y - y_0)}{a^2yy_0}} = -\frac{c}{a}\sqrt{\frac{2c}{y_0}}\sqrt{\frac{y - y_0}{y}}.$$

Si l'on avait $\frac{c\sqrt{2c}}{a\sqrt{y_0}} = 1$, la trajectoire serait un arc de cycloïde, sinon c'est la courbe déduite de cet arc en dilatant les abscisses dans le rapport de $a\sqrt{y_0}$ à $\sqrt{2c^3}$; le temps que met le mobile pour arriver à la base est

$$T = \sqrt{\frac{y_0}{2c^3}} \int_0^{y_0} dy \sqrt{\frac{y}{y - y_0}} = \pi \left(\frac{y_0}{2c}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Par raison de symétrie, le mobile passera au-dessous de la droite en gardant sa vitesse parallèle à OX, et décrira une cycloïde dilatée, égale à celle dont il a décrit une moitié.

124. *Mouvement de deux points qui s'attirent proportionnellement à leur distance et à leurs masses, et dont l'un est libre, l'autre obligé de rester sur une droite fixe. Cas où la masse du point libre est triple de la masse du second, et où la droite fixe exerce un frottement, les vitesses initiales des deux points étant nulles.* (Licence, 1865.)

Prenons la droite fixe OA pour axe des x avec deux autres axes rectangulaires; soient μ la masse du point assujetti à rester sur OA, m celle du point libre, s l'abscisse du point μ, x, y, z les coordonnées de m, c^2 le coefficient d'attraction pour deux unités de masse à l'unité de distance. Les équations du mouvement s'écrivent immédiatement, en divisant par les masses,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 s}{dt^2} = mc^2(x - s), & \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \mu c^2 (s - x), \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = -\mu c^2 y, & \dfrac{d^2 z}{dt^2} = -\mu c^2 z. \end{cases}$$

Les deux dernières sont des équations linéaires du se-

cond ordre à une seule inconnue et à coefficients constants; leurs intégrales ont une forme connue

$$y = \mathrm{A}\cos ct\sqrt{\mu} + \mathrm{A}'\sin ct\sqrt{\mu}, \quad z = \mathrm{B}\cos ct\sqrt{\mu} + \mathrm{B}'\sin ct\sqrt{\mu}.$$

On pourrait les écrire sous la forme équivalente

$$y = a\cos c\sqrt{\mu}(t-\alpha), \quad z = b\cos c\sqrt{\mu}(t-\beta).$$

Il en résulte que m se meut sur un cylindre elliptique dont l'axe est l'axe des x, la projection de son rayon vecteur sur le plan yz décrivant des aires proportionnelles au temps; la durée d'une révolution est $\frac{2\pi}{c\sqrt{\mu}}$.

Quant aux deux premières équations (1), je les remplace par les deux combinaisons suivantes :

$$\mu\frac{d^2s}{dt^2} + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2} = -(m+\mu)c^2(x-s).$$

Les intégrales ont encore une forme connue

$$\mu s + mx = \mathrm{G} + \mathrm{G}'t,$$
$$x - s = \mathrm{H}\cos ct\sqrt{m+\mu} + \mathrm{H}'\sin ct\sqrt{m+\mu}.$$

La première exprime que le centre de gravité de μ et de m projeté sur OX se meut uniformément; les valeurs de s et x prouvent que ces points oscillent autour de ce centre de gravité dans un temps $\frac{2\pi}{c\sqrt{m+\mu}}$.

Dans le cas particulier proposé, je prends pour origine la position initiale O de μ, et pour plan des xy celui qui passe par la position initiale M de m; je fais $\mu = 1$, $m = 3$. Le point m ne sort pas du plan des xy. Quant à μ, il éprouve de la part de m une attraction dont la composante suivant OX est $3c^2(x-s)$, et la composante normale $3c^2y$; celle-ci est détruite par la rigidité de OX, mais elle donne lieu

à une force de frottement en sens contraire de la vitesse de μ et égale à la valeur absolue de $3c^2fy$. Les équations différentielles du mouvement seront d'abord

$$(2) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = 3c^2(x-s) - 3fc^2y,$$

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -c^2(x-s),$$

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -c^2y.$$

Soient a et b les coordonnées initiales de m, $(b > 0)$; l'équation (4) admet pour intégrale

$$y = \mathrm{A}\cos ct + \mathrm{B}\sin ct;$$

mais, comme pour $t = 0$, on a $y = b$, $\frac{dy}{dt} = 0$; il vient

$$\mathrm{A} = b, \quad \mathrm{B} = 0 \quad \text{et} \quad y = b\cos ct.$$

Dans l'équation (2) je remplace y par cette valeur; puis, en l'ajoutant à l'équation (3) multipliée par 3 ou en la retranchant de la même équation, je forme les combinaisons suivantes :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{d^2x}{dt^2} = -3bfc^2\cos ct,$$

$$\frac{d^2(x-s)}{dt^2} = -4c^2(x-s) + 3c^2fb\cos ct.$$

Intégrons, en tenant compte de ce que, pour $t = 0$, on a $\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = s = 0$, $x = a$,

$$s + 3x = 3bf\cos ct + 3(a - bf),$$

$$x - s = bf\cos ct + (a - bf)\cos 2ct,$$

d'où

$$s = \frac{3}{4}(a - bf)(1 - \cos 2ct),$$

$$x = \frac{3}{4}(a - bf) + bf\cos ct + \frac{1}{4}(a - bf)\cos 2ct.$$

Ainsi y diminue d'abord jusqu'à devenir nul pour $t = \frac{\pi}{2c}$, et, dans la même période, s augmente de zéro à $\frac{3}{2}(a - bf)$. Mais il faut porter notre attention sur l'équation (2), où entre la force de frottement; elle est écrite dans l'hypothèse où y et $\frac{ds}{dt}$ sont positifs. Quand l'une des deux quantités changera de signe, il faudra dans cette équation changer le signe de $3fc^2y$; il en résulterait de la difficulté pour suivre les points dans la suite des temps; ici les données sont tellement choisies que y et $\frac{ds}{dt}$ changent de signe en même temps, en sorte que l'équation (2) sert encore pour le retour de μ vers le point O; t croissant de $\frac{\pi}{2c}$ à $\frac{\pi}{c}$, s revient à zéro, y va de zéro à $-b$, et x arrive à la valeur finale $a - 2bf$; alors m et μ sont immobiles, et nous nous retrouvons dans les conditions initiales, sauf le changement de a en $a - 2bf$. L'équation de la trajectoire du point m s'obtient en éliminant t entre les valeurs de x et de y :

$$x = \frac{1}{2}(a - bf)\frac{y^2}{b^2} + fy + \frac{1}{2}(a - bf).$$

C'est une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe des x, et le sommet a pour coordonnées

$$x' = \frac{a^2 - 2abf}{2(a - bf)}, \quad y' = -\frac{b^2 f}{a - bf};$$

le paramètre est $\frac{b^2}{a - bf}$.

Une condition indispensable pour que les choses se passent comme il vient d'être dit, c'est qu'au départ la composante suivant OX de l'attraction subie par le point μ soit plus grande que la composante normale multipliée par f; cela revient à dire que $a - bf$ soit > 0, sinon μ ne bougerait pas, et m se mouvrait sur la droite OM. Quand m sera arrivé à l'extrémité de l'arc que nous lui avons vu parcourir, si $a - 2bf - bf$ ou $a - 3bf$ est encore > 0, μ se remettra en marche pour une excursion d'amplitude $\frac{3}{2}(a - 3bf)$, et m parcourra un arc de parabole dont l'extrémité finale aura pour coordonnées $a - 4bf$ et b : μ fera i excursions, i étant le plus petit nombre pour lequel

$$a - (2i + 1)bf < 0;$$

ensuite μ sera immobile et m oscillera en ligne droite de part et d'autre de O, sa distance r étant réglée par la formule

$$r = r_0 \cos ct.$$

On aura un problème facile en prenant notre cas particulier avec $f = 0$.

125. *Mouvement plan d'un point matériel* M *attiré en raison directe de la distance par un centre d'action* C *qui parcourt un cercle avec une vitesse angulaire constante* ω, *cas où l'attraction est égale à la distance multipliée par* ω^2, *et où* M *est primitivement en repos au centre du cercle.*

On écrit de suite les équations du mouvement, où les lettres ont un sens bien clair,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu^2(\mathrm{R}\cos\omega t - x), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mu^2(\mathrm{R}\sin\omega t - y).$$

Les intégrales donnent la position du mobile à chaque

instant :

$$(1)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\mu^2 R}{\mu^2 - \omega^2}\cos\omega t + A\cos\mu t + B\sin\mu t, \\ y = \dfrac{\mu^2 R}{\mu^2 - \omega^2}\sin\omega t + C\cos\mu t + D\sin\mu t. \end{cases}$$

On peut se faire une idée nette du mouvement de M en imaginant un point P dont les coordonnées seraient

$$x_1 = \frac{\mu^2 R}{\mu^2 - \omega^2}\cos\omega t, \quad y_1 = \frac{\mu^2 R}{\mu^2 - \omega^2}\sin\omega t;$$

ce point parcourt un cercle concentrique à l'origine et de rayon $\frac{\mu^2 R}{\mu^2 - \omega^2}$, avec une vitesse angulaire ω. Par rapport à ce point P, les coordonnées de M sont

$$(2)\quad \xi = x - x_1 = A\cos\mu t + B\sin\mu t, \quad \eta = C\cos\mu t + D\sin\mu t.$$

L'équation de la trajectoire relative est celle d'une ellipse

$$(3)\qquad (A\eta - C\xi)^2 + (B\eta - D\xi)^2 = (AD - BC)^2.$$

M parcourt cette ellipse avec une vitesse aréolaire constante, tandis que l'ellipse a un mouvement de translation, tel que son centre décrit uniformément un cercle de rayon $R' = \frac{R\mu}{\sqrt{\mu^2 - \omega^2}}$. L'ellipse (3) devient un cercle si

$$AC + BD = 0, \quad A^2 + B^2 = C^2 + D^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{D} = -\frac{B}{C} = \pm 1.$$

Pour interpréter ces relations, je désigne par r la grandeur initiale de PM, par θ son angle avec OX, par w la vitesse relative initiale de M, par φ l'angle de cette vitesse avec OX; les équations (2) montrent que

$$A = r\cos\theta, \quad C = r\sin\theta, \quad B = \frac{w}{\mu}\cos\varphi, \quad D = \frac{w}{\mu}\sin\varphi;$$

donc

$$r\cos\theta = \mp\frac{\varpi}{\mu}\sin\varphi, \quad r\sin\theta = \pm\frac{\varpi}{\mu}\cos\varphi,$$
$$\operatorname{tang}\theta = -\cot\varphi, \quad \varpi = \mu r;$$

la vitesse relative initiale est perpendiculaire à la droite P_0M_0 et égale à cette droite multipliée par μ. M se meut comme s'il était lié à un cercle de rayon $\frac{R'\omega}{\mu}$, roulant intérieurement ou extérieurement (selon le signe admis dans les dernières relations) sur un cercle de rayon $R'\left(1 \pm \frac{\omega}{\mu}\right)$. L'épicycloïde décrite par M sera allongée ou raccourcie selon que $r \gtrless \frac{R'\omega}{\mu}$. On ne pourra, toutefois, avoir le mouvement donné par le roulement d'un cercle dans un autre de rayon double; car il faudrait $\omega = \mu$, et, pour ce cas, les intégrales (1) ont une forme illusoire; c'est le cas particulier proposé. Il est permis d'écrire les équations (1), dans le cas général, sous la forme

$$x = \mu^2 R\frac{\cos\omega t - \cos\mu t}{\mu^2 - \omega^2} + A'\cos\mu t + B\sin\mu t,$$
$$y = \mu^2 R\frac{\sin\omega t - \sin\mu t}{\mu^2 - \omega^2} + \ldots.$$

Que μ tende vers ω, il est aisé de trouver la limite de ces expressions

$$x = \frac{1}{2}R\omega t\sin\omega t + A'\cos\omega t + B\sin\omega t,$$
$$y = -\frac{1}{2}R\omega t\cos\omega t + C'\cos\omega t + D\sin\omega t.$$

Le mouvement est celui d'un point se déplaçant sur une ellipse analogue à l'ellipse (3), mais dont le centre décrit une spirale d'Archimède avec une vitesse angulaire con-

stante ω. Si au début x, y et leurs dérivées sont nulles, on connaît les constantes, et il vient

$$x = \frac{1}{2} R\omega t \sin\omega t, \quad y = -\frac{1}{2} R\omega t \cos\omega t + \frac{1}{2} R \sin\omega t.$$

Le point M peut être regardé comme oscillant sur une droite de longueur R, qui reste parallèle à l'axe des y, tandis que son milieu décrit une spirale d'Archimède dont l'équation serait $r = \frac{R}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$. La courbe que décrit M présente à l'origine un rebroussement où la tangente est l'axe des x, puis le rayon vecteur grandit constamment; car son carré est

$$\frac{1}{4} R^2(\omega^2 t^2 - 2\omega t \sin\omega t \cos\omega t + \sin^2\omega t);$$

la dérivée de cette expression est $R^2\omega^2 t \sin^2\omega t$, toujours positive.

Le milieu P de la droite sur laquelle oscille M est toujours dans un azimut en arrière de $\frac{\pi}{2}$ sur celui où se trouve le centre d'attraction C; mais on a un exemple bien remarquable de la modification profonde et singulière qu'un fait analytique peut apporter à un mouvement.

126. *Un corps pesant est soumis à l'action d'une force variable, mais toujours tangentielle; déterminer la loi de cette force de manière que la vitesse soit constante; trajectoire du mobile.*

Ce problème s'appliquerait, dans une certaine mesure, à une fusée lancée dans l'air.

Prenons pour axes des x et des y l'horizontale et la verticale du point de départ, et désignons par α l'angle de la vitesse avec l'horizon, par a la grandeur constante de cette

vitesse et par F la force inconnue. La trajectoire est contenue dans le plan vertical qui passe par la vitesse initiale. Projetons les forces qui sollicitent le mobile sur la tangente et la normale à sa trajectoire; on doit avoir

$$F - mg\sin\alpha = 0, \quad m\frac{a^2}{\rho} = mg\cos\alpha;$$

la première fait connaître F et la seconde donne, φ étant la valeur initiale de α,

$$\frac{a^2}{g} = \rho\cos\alpha = -\frac{ds\cos\alpha}{d\alpha} = -\frac{dx}{d\alpha}, \quad x = \frac{a^2}{g}(\varphi - \alpha), \quad \alpha = \varphi - \frac{gx}{a^2};$$

ensuite

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{gx}{a^2}\right), \quad y = \frac{a^2}{g}\,\mathrm{L}\,\frac{\cos\left(\varphi - \frac{gx}{a^2}\right)}{\cos\varphi}.$$

Le mobile s'élève d'abord, atteint une hauteur maximum $\frac{a^2}{g}\mathrm{L}\,\text{séc}\,\varphi$ pour $x = \frac{a^2\varphi}{g}$, puis redescend indéfiniment et devient asymptote à la droite $x = \frac{a^2}{g}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$; la courbe est symétrique par rapport à la verticale du sommet. Résolvant son équation par rapport à φ, on trouve

$$e^{\frac{gy}{a^2}} = \cos\frac{gx}{a^2} + \operatorname{tang}\varphi\sin\frac{gx}{a^2};$$

on en déduit l'angle de projection nécessaire pour que la trajectoire passe en un point donné. x est nul pour $y = 2\frac{a^2}{g}\varphi$; le jet est maximum pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$. La position du mobile à chaque instant se déduira de la relation

$$\frac{dx}{dt} = a\cos\alpha = a\cos\left(\varphi - \frac{gx}{a^2}\right), \quad t = \frac{a}{g}\,\mathrm{L}\,\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} + \frac{gx}{2a^2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

127. *Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné dépoli.*

La pesanteur se décompose à chaque instant en une force $mg \sin i$, dirigée suivant la ligne de plus grande pente, et une force normale au plan, qui donne lieu à une force de frottement $mfg \cos i$, dirigée en sens contraire de la vitesse du point. Ces forces ont des valeurs constantes, que je désigne par $m\gamma$ et $mn\gamma$; n est égal à $\frac{f}{\operatorname{tang} i}$; elle est donc $\gtrless 1$, selon que l'angle de frottement est supérieur ou inférieur à l'angle du plan avec l'horizon. Nous avons un cas particulier du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant, où l'on supposerait la résistance constante.

Prenons pour axe des x l'horizontale du point de départ, pour axe des y la ligne de plus grande pente, en remontant; désignons par θ l'angle de la vitesse avec l'axe des y et par α la valeur initiale de θ; la vitesse v a d'abord la valeur a. Projetons les forces qui sollicitent m sur la tangente et la normale, et divisons par m :

$$(1) \qquad \frac{dv}{dt} = -\gamma \cos\theta - n\gamma, \quad \frac{v^2}{\rho} = \gamma \sin\theta;$$

mais $\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{v\,dt}{d\theta}$; donc

$$(2) \qquad dt = \frac{v\,d\theta}{\gamma \sin\theta}.$$

Remplaçons dt par sa valeur dans (1), nous en déduirons

$$(3) \qquad \frac{dv}{v} = -\cot\theta\,d\theta - \frac{n\,d\theta}{\sin\theta}, \quad v = a\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta}\right)^n.$$

L'équation (2) montre que θ va sans cesse en augmentant, sans que v s'annule, jusqu'à $\theta = \pi$; l'équation (1) prouve que, si α est $< \frac{\pi}{2}$, v diminue d'abord jusqu'à ce

qu'on ait $\cos\theta = -n$. Nous trouvons tout de suite une division essentielle dans la discussion du problème, selon que n est $\gtrless 1$. Dans le premier cas, v ne cesse de diminuer, et l'équation (3) nous montre que, pour $\theta = \pi$, $v = 0$; le mobile s'arrête donc en un certain point et il y reste immobile, car l'hypothèse est précisément que le frottement est plus grand que la force accélératrice. Au contraire, pour $n < 1$, v passe par un minimum et augmente ensuite indéfiniment quand θ s'approche de π. D'ailleurs la formule (2) nous donne la relation, entre θ et t,

$$dt = \frac{a \sin\alpha \operatorname{tang}^n \frac{1}{2}\alpha}{\gamma} \frac{d\theta}{\sin^2\theta \operatorname{tang}^n \frac{1}{2}\theta}.$$

Pour abréger l'écriture et avoir une intégrale plus simple, je pose

$$\frac{a}{\gamma} \sin\alpha \operatorname{tang}^n \frac{1}{2}\alpha = 2c, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = u,$$

et je désigne par ε la valeur $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$. Nous aurons

$$(4) \quad \begin{cases} dt = c\,\dfrac{1+u^2}{u^{n+2}}\,du, \\ t = \dfrac{c}{n+1}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^{n+1}} - \dfrac{1}{u^{n+1}}\right) + \dfrac{c}{n-1}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^{n-1}} - \dfrac{1}{u^{n-1}}\right). \end{cases}$$

Selon que n sera $\gtrless 1$, quand θ sera égal à π ou $u = \infty$, t prendra une valeur finie ou croîtra indéfiniment; le temps au bout duquel le mobile s'arrête, dans le premier cas, est

$$\frac{c}{n+1}\,\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{c}{n-1}\,\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}.$$

Nous calculerons dx et dy par les relations

$$dx = v\,dt \sin\theta = \frac{a^2}{\gamma} \sin^2\alpha \operatorname{tang}^{2n}\frac{1}{2}\alpha \frac{d\theta}{\sin^2\theta \operatorname{tang}^{2n}\frac{1}{2}\theta} = 2\gamma c^2 \frac{1+u^2}{u^{2n+2}}\,du,$$

$$dy = v\,dt \cos\theta = \gamma c^2 \frac{1-u^4}{u^{2n+3}}\,du,$$

d'où

$$(5)\quad x = \frac{2\gamma c^2}{2n+1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n+1}} - \frac{1}{u^{2n+1}}\right) + \frac{2\gamma c^2}{2n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} - \frac{1}{u^{2n-1}}\right),$$

$$(6)\quad y = \frac{\gamma c^2}{2n+2}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n+2}} - \frac{1}{u^{2n+2}}\right) - \frac{\gamma c^2}{2n-2}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2n-2}} - \frac{1}{u^{2n-2}}\right).$$

x gardera une valeur finie tant que n sera $> \frac{1}{2}$, y ne sera fini que si $n > 1$; donc, quand n est > 1, le mobile s'arrête en un point dont les coordonnées sont données par les formules (5) et (6), où l'on fait u infini; quand n est compris entre 1 et $\frac{1}{2}$, la trajectoire a une asymptote verticale à une distance donnée par l'équation (5); enfin, si $n \leq \frac{1}{2}$, la trajectoire présente une branche parabolique. A gauche de OY, on peut supposer que la courbe définie par les équations (5) et (6) soit prolongée : on trouve que, pour $u = 0$, x et y sont infinis, $\frac{y}{x}$ ayant une limite infinie; il y a donc toujours de ce côté une branche parabolique à axe vertical. Les résultats obtenus pour le cas où la résistance du milieu est kv^n sont notablement modifiés.

Dans le cas de $n = 1$, les équations (3), (4), (5), (6) deviennent

$$v = a\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\theta}\right)^2, \quad t = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{u^2}\right) + c\,\mathrm{L}\frac{u}{\varepsilon}, \quad c = \frac{a}{\gamma}\sin^2\frac{1}{2}\alpha,$$

$$x = \frac{2\gamma c^2}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon^3} - \frac{1}{u^3}\right) + 2\gamma c^2\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{u}\right), \quad y = \frac{\gamma c^2}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon^4} - \frac{1}{u^4}\right) + \gamma c^2\,\mathrm{L}\frac{\varepsilon}{u}.$$

L'élimination de u entre x et y est irréalisable; mais on n'en voit pas moins clairement la forme de la trajectoire, branche hyperbolique à droite, branche parabolique à gauche. Pour $\theta = \pi$, la limite de v est $a\sin^2\frac{1}{2}\alpha$.

128. *Mouvement d'un point matériel* M *attiré vers un centre fixe* O *par une force* $\frac{mr^3}{c^2}$, r *étant la distance* OM, c *une constante; la distance initiale est* a, *la vitesse initiale* $\frac{a^2}{c}$ *fait l'angle aigu* α *avec la droite* MO; *enfin le centre* O *est entouré d'un milieu non homogène exerçant une résistance mesurée par* $\frac{3m\cos\alpha}{r}v^2$.

Soit μ l'angle de la tangente avec le rayon vecteur; on aura

$$\tang\mu = \frac{rd\theta}{dr}, \quad ds = \frac{dr}{\cos\mu}, \quad \rho = \frac{ds}{d\theta + d\mu} = \frac{dr}{\sin\mu\frac{dr}{r} + \cos\mu d\mu}.$$

Projetons les forces sur la tangente et la normale à la trajectoire, qui est évidemment plane, et divisons par m,

$$(1) \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d\frac{1}{2}v^2}{ds} = -\frac{r^3}{c^2}\cos\mu - \frac{3v^2\cos\alpha}{r}, \quad \frac{v^2}{\rho} = \frac{r^3}{c^2}\sin\mu.$$

La seconde donne, en remplaçant ρ par sa valeur,

$$(2) \qquad v^2 = \frac{r^4}{c^2\left(1 + r\cot\mu\frac{d\mu}{dr}\right)}.$$

La première équation (1) peut s'écrire

$$(3) \qquad \frac{d.v^2}{dr} = -\frac{2r^3}{c^2} - \frac{6v^2\cos\alpha}{r\cos\mu}.$$

On y remplacera v^2 par sa valeur tirée de l'équation (2), et $\frac{d.v^2}{dr}$ par la valeur obtenue en différentiant cette formule; il

vient, après réduction,

$$\frac{d^2\mu}{dr^2} - \frac{1 + \sin 2\mu}{\sin^2\mu}\frac{d\mu^2}{dr^2} - \frac{6\cos\alpha + 7\cos\mu}{r\cos\mu}\frac{d\mu}{dr}$$
$$= \frac{6\sin\mu}{r^2\cos^2\mu}(\cos\alpha + \cos\mu).$$

On ne peut intégrer cette équation; mais, comme on aperçoit l'intégrale particulière $\cos\mu = -\cos\alpha$, $\mu = \pi - \alpha$, on devra essayer si elle peut vérifier les équations (1) du problème, en tenant compte des conditions initiales. Or les équations (1), ou leurs transformées (2) et (3), donnent, par $\mu = \pi - \alpha$,

$$v^2 = \frac{r^4}{c^2}, \quad \frac{d.v^2}{dr} = -\frac{2r^2}{c^2} + \frac{6v^2}{r};$$

la seconde est conséquence de la première et elles sont compatibles; μ étant constant, la trajectoire est une spirale logarithmique, et la loi du mouvement est donnée par la formule

$$\frac{r^2}{c} = v = -\frac{dr}{dt\cos\alpha}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{t\cos\alpha}{c}.$$

Ainsi le mouvement donné par l'intégrale particulière satisfait à toutes les conditions du problème; il aura donc réellement lieu.

Forces centrales.

Quand la force qui sollicite un point passe constamment par un point fixe, la trajectoire est plane, le principe des aires a lieu, et les simplifications qui s'offrent dans la valeur de l'accélération se reproduisent quand on considère les forces. Si la force motrice rencontre toujours une droite fixe, c'est pour la projection du mouvement sur un plan perpendiculaire à la droite que le théorème des aires est vérifié.

129. *Mouvement d'un point attiré vers un centre fixe* C *avec une intensité proportionnelle à la distance; étudier les variations de la trajectoire quand on change la direction de la vitesse initiale.*

Prenons pour origine le point de départ, pour axe des z la droite OC, et pour axes des x et des y deux droites quelconques passant en O. Les équations du mouvement ont une forme bien connue

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu^2(z-c).$$

Je désigne la vitesse initiale par $\lambda\mu$, et ses composantes suivant les axes par $\lambda\mu\alpha$, $\lambda\mu\beta$, $\lambda\mu\gamma$; les intégrales du problème sont

$$x = \lambda\alpha \sin\mu t, \quad y = \lambda\beta \sin\mu t, \quad z = c(1-\cos\mu t) + \lambda\gamma \sin\mu t.$$

Les équations de la trajectoire s'obtiennent en éliminant t

$$(1) \qquad \beta x - \alpha y = 0, \quad \left(\frac{\gamma x}{\alpha} - z + c\right)^2 + \frac{c^2x^2}{\lambda^2\alpha^2} - c^2 = 0.$$

On reconnaît une ellipse passant en O et ayant son centre en C.

Cherchons le lieu formé par les trajectoires quand on suppose la vitesse initiale constante en grandeur, mais prenant toutes les directions dans un plan donné. Je choisis ce plan pour plan des xy, je prends la projection de OC pour axe des x et une perpendiculaire pour axe des y; on aura

$$\gamma = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

L'élimination de α, β, γ entre ces relations et les équations (1) donne

$$c^2(x^2+y^2) + \lambda^2(z^2 - 2cz) = 0.$$

La surface formée par les trajectoires considérées est un

ellipsoïde dont C est le centre, O un ombilic; le plan donné le touche en O, et le plan ZOX est principal.

130. *Mouvement d'un point* M *sollicité par deux forces émanant d'un centre d'action* O, *l'une, attractive, proportionnelle à la distance, l'autre, répulsive, en raison inverse du cube de la distance. Cas où, à l'instant initial, la vitesse est perpendiculaire à la droite qui passe en* O, *et les deux forces se font équilibre.* (Licence, 1869.)

Le mouvement a lieu dans le plan qui passe par O et par la vitesse initiale; en prenant O pour pôle et employant la valeur de l'accélération qui convient dans le cas des forces centrales, où $r^2 d\theta = c^2 dt$, nous avons

$$\frac{c^4}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right)=-\frac{d\frac{1}{2}v^2}{dr}=\mu^2 r-\frac{\lambda^4}{r^3}.$$

Multipliant par $2dr$, on en déduit l'intégrale des forces vives

$$v^2=c^4\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]=v_0^2-\mu^2(r^2-r_0^2)-\lambda^4\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_0^2}\right).$$

Désignons par ε l'angle de r_0 et de v_0; on a

$$c^2=r_0 v_0 \sin\varepsilon;$$

si l'on divise l'équation précédente par r^2, on peut l'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} v_0^2 r_0^2 \sin^2\varepsilon\,\frac{1}{r^6}\,\frac{dr^2}{d\theta^2} &= -\left(\lambda^4+r_0^2 v_0^2\sin^2\varepsilon\right)\frac{1}{r^4} \\ &\quad +\left(v_0^2+\mu^2 r_0^2+\frac{\lambda^4}{r_0^2}\right)\frac{1}{r^2}-\mu^2. \end{aligned}\right.$$

Le second membre est positif pour $r=r_0$, mais il devient négatif quand r est très-grand ou très-petit; r doit donc rester entre deux limites a et b, et, quand elle les atteint,

dr est nul; la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur; les valeurs correspondantes h et k de cette vitesse sont telles que $ah = bk = c^2 = r_0 v_0 \sin\varepsilon$.

Si l'on prenait pour origine des temps l'époque où le rayon vecteur atteint un de ces maxima ou un de ces minima, l'équation des forces vives garderait la forme (1), où l'on ferait $r_0 = a$, $v_0 = h$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$,

$$(2)\quad \frac{a^2h^2}{r^6}\frac{dr^2}{d\theta^2} = -(\lambda^4 + a^2h^2)\frac{1}{r^4} + \left(h^2 + \mu^2a^2 + \frac{\lambda^4}{a^2}\right)\frac{1}{r^2} - \mu^2.$$

Posons, pour simplifier l'écriture, $\lambda^4 + a^2h^2 = n^2a^2$:

$$\frac{a^2h^2}{r^6}\frac{dr^2}{d\theta^2} = -\frac{n^2a^2}{r^4} + \frac{\mu^2a^2 + n^2}{r^2} - \mu^2$$

$$= -n^2a^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu^2a^2 + n^2}{2a^2n^2}\right)^2 + \frac{(n^2 - \mu^2a^2)^2}{4a^2n^2}.$$

Nous prendrons $\frac{1}{r^2}$ pour inconnue, et, en admettant qu'elle commence par décroître, c'est-à-dire que a soit un minimum, nous aurons

$$\frac{2n}{h}d\theta = \frac{-d\frac{1}{r^2}}{\sqrt{\frac{(n^2 - a^2\mu^2)^2}{4a^4n^4} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{n^2 + a^2\mu^2}{2a^2n^2}\right)^2}}.$$

En supposant $\theta = 0$ pour $r = a$, on aura, sans constante d'intégration,

$$\frac{2n\theta}{h} = \arccos\frac{2a^2n^2}{n^2 - a^2\mu^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{n^2 + a^2\mu^2}{2a^2n^2}\right);$$

d'où

$$(3)\quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\frac{n\theta}{h} + \frac{\mu^2}{n^2}\sin^2\frac{n\theta}{h}.$$

Cette courbe est comprise entre deux cercles concen-

triques au pôle et ayant pour rayons a et $\frac{n}{\mu}$; l'angle d'un rayon vecteur minimum avec le maximum qui suit est $\frac{h}{n}\frac{\pi}{2}$ moindre que $\frac{\pi}{2}$; la courbe est fermée et algébrique si $\frac{h}{n}$ est commensurable. Il est aisé de voir que, en appliquant le plan de la figure sur un cône droit dont le demi-angle au sommet ait pour sinus $\frac{h}{n}$, le pôle étant au sommet du cône, la transformée de la trajectoire se projettera sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône suivant une ellipse dont les demi-axes sont $\frac{ah}{n}$ et $\frac{h}{\mu}$.

La trajectoire se réduirait à un cercle si le maximum et le minimum de r étaient égaux, $a\mu = n$ ou $\mu^2 a^4 = \lambda^4 + a^2 h^2$. Il faudrait que la vitesse initiale fût perpendiculaire au rayon vecteur et moyenne proportionnelle entre ce rayon et l'accélération du mobile à cette époque; c'est la relation qui existe constamment dans le mouvement circulaire uniforme.

La trajectoire présente un point d'inflexion lorsque la valeur de r pour laquelle l'accélération serait nulle $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}$ est comprise entre les limites a et $\frac{n}{\mu}$ entre lesquelles varie la distance du mobile au pôle.

La loi du mouvement sur la trajectoire est donnée par le principe des aires

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{c^2} = \frac{\frac{1}{ah}\, d\theta}{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{n\theta}{h} + \frac{\mu^2}{n^2}\sin^2\frac{n\theta}{h}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{a^2\mu^2}{n^2}\tang^2\frac{n\theta}{h}} \times \frac{a\,d\theta}{h\cos^2\frac{n\theta}{h}}.$$

L'intégrale devient, en faisant $t = 0$ pour $\theta = 0$,

$$\operatorname{tang}\frac{n\theta}{h} = \frac{n}{a\mu}\operatorname{tang}\mu t.$$

Le temps employé pour décrire l'arc compris entre un maximum et un minimum de r est $\frac{\pi}{2\mu}$ et ne dépend point de λ.

Dans le cas particulier proposé, λ^4 est égal à $\mu^2 a^4$; on prendra la forme (2) pour l'intégrale des forces vives, a représentant le rayon vecteur initial, h la vitesse initiale; n^2 sera égal à $\mu^2 a^2 + h^2$, mais la trajectoire sera toujours représentée par l'équation (3); a est le minimum de r, car l'autre limite $\frac{n}{\mu}$ est $> a$. Pour $r = a$, le rayon de courbure de la trajectoire est infini sans qu'il y ait inflexion; seulement la tangente a un contact du troisième ordre.

131. *Un mobile est attiré vers un centre fixe avec une intensité fonction de la distance au centre d'action; trouver quelle doit être la forme la plus générale de cette fonction pour que la trajectoire soit toujours une courbe fermée, quelle que soit la direction de la vitesse initiale, dont la grandeur doit seulement ne pas dépasser une certaine limite.*

Soit $f(r)$ l'attraction du centre fixe qu'on prend pour pôle; le mouvement s'effectue dans un plan, et l'équation des forces vives, avec la forme qui convient aux forces centrales, donne

$$c^4\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = v_0^2 - 2\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr.$$

Posons $\frac{1}{r} = u$, $\int 2f(r)\,dr = \varphi(u)$, et nous aurons

$$\frac{du^2}{d\theta^2} = \frac{v_0^2}{c^4} - u^2 + \frac{\varphi(u_0) - \varphi(u)}{c^4}.$$

Si la trajectoire est une courbe fermée, u devra rester entre certaines limites finies; supposons qu'il commence par décroître, il diminuera jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur a pour laquelle le second membre de (1) changerait de signe; il faudra que u aille ensuite en croissant jusqu'à une valeur b pour laquelle (1) changerait encore de signe; n reviendra ensuite à a, et ainsi de suite. Dans tous les cas la trajectoire sera formée d'arcs superposables et comprise entre deux cercles de rayons $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$. Les changements de signe du second membre de (1) ne se feront qu'en passant par zéro et jamais par l'infini; car alors, $\frac{du}{d\theta}$ étant infini, la courbe serait tangente au rayon vecteur, et le principe des aires ne serait plus vérifié. Prenons pour u_0 la valeur minimum a, $\frac{v_0^2}{c^4} = a^2$, et l'équation (1) devient

$$\frac{du^2}{d\theta^2} = a^2 - u^2 + \frac{1}{c^4}[\varphi(a) - \varphi(u)].$$

Pour $u = b$, $\frac{du}{d\theta}$ est nul; donc

$$\frac{1}{c^4} = \frac{b^2 - a^2}{\varphi(b) - \varphi(a)}, \quad \frac{du^2}{d\theta^2} = (b^2 - a^2)\frac{\varphi(u) - \varphi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} - (u^2 - a^2) \quad (^1).$$

L'angle de deux rayons vecteurs maximum et minimum qui se suivent est

$$(2) \quad \theta_1 = \int_a^b \frac{du\sqrt{\varphi(b) - \varphi(a)}}{\{(b^2 - a^2)[\varphi(u) - \varphi(a)] - (u^2 - a^2)[\varphi(b) - \varphi(a)]\}^{\frac{1}{2}}}.$$

---

(1) Si $\varphi(u) = \lambda u^2 + \mu$, la méthode semble en défaut; mais il est aisé de voir que la trajectoire peut être dans ce cas une spirale.

Pour que la trajectoire soit fermée, il faut et il suffit que θ_1 soit commensurable avec π; cela implique que l'intégrale (2) soit indépendante de a et b; sinon, en faisant varier très-peu ces quantités, θ_1 varierait d'une manière continue, et ne serait pas toujours commensurable avec π. Faisons $a = c - h$, $b = c + h$, $u = c + hz$, et supposons h excessivement petit; on développera $\varphi(c-h), \ldots$ par la formule de Taylor, on divisera haut et bas par $h\sqrt{2h}$ et, négligeant les termes qui contiendront encore h, on trouvera

$$\theta_1 = \int_{-1}^{1} \frac{dz\sqrt{\varphi'(c)}}{\sqrt{(1-z^2)[\varphi'(c) - c\varphi''(c)]}} = \pi\left[\frac{\varphi'(c)}{\varphi'(c) - c\varphi''(c)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Le coefficient de π doit être commensurable; si on le représente par $\frac{1}{n}$, il vient

$$(n^2 - 1)\varphi'(c) + c\varphi''(c) = 0.$$

Intégrant,

$$\varphi'(c) = Ac^{1-n^2}, \quad \varphi(c) = \frac{A}{2-n^2}c^{2-n^2} + B.$$

Substituons cette valeur dans l'intégrale qui représente θ_1; les constantes A et B disparaissent, et, en divisant haut et bas par $\sqrt{\varphi(b) - \varphi(a)}$, on obtient

$$\theta_1 = \int_a^b \left[\frac{(b^2 - a^2)(u^{2-n^2} - a^{2-n^2})}{b^{2-n^2} - a^{2-n^2}} - (u^2 - a^2)\right]^{-\frac{1}{2}} du.$$

Je reprends les valeurs $a = c - h$, $b = c + h$, $u = c + hz$, mais je fais $c = 1$; je développe les différents termes par la formule du binôme, et j'obtiens pour la quantité entre crochets, après avoir divisé par $(2 - n^2)h$ les deux termes de

la fraction qu'elle comprend,

$$4h\frac{\left[\begin{array}{l} z+1+\frac{1-n^2}{2}h(z^2-1)-\frac{(1-n^2)n^2}{2.3}h^2(z^3+1) \\ +\frac{(1-n^2)n^2(1+n^2)}{2.3.4}h^3(z^4-1)+\ldots \end{array}\right]}{2+2\frac{(n^2-1)n^2}{2.3}h^2+\ldots}-2h(z+1)-h^2(z^2$$

$$=2h\left[z+1+\frac{1-n^2}{2}h(z^2-1)+\ldots\right]$$

$$\times\left[1-\frac{(n^2-1)n^2}{2.3}h^2+\ldots\right]-2h(z+1)-h^2(z^2-1)$$

$$=n^2h^2(1-z^2)+\frac{n^2(n^2-1)}{3}h^3z(z^2-1)$$

$$+\frac{n^2(n^2-1)}{12}h^4(z^2-1)[n^2-3-(n^2+1)z^2];$$

donc

$$\theta_1=\int_{-1}^{1}\frac{dz}{n\sqrt{1-z^2}}$$

$$\times\left\{1+\frac{1-n^2}{3}hz-\frac{1-n^2}{12}h^2[3-n^2+(n^2+1)z^2]+\ldots\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\theta_1=\left[\frac{1}{n}+\frac{(n^2-1)(n^2-3)}{24n}h^2\right]\int_{-1}^{1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$+\frac{n^2-1}{6n}h\int_{-1}^{1}\frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{1-n^2}{12n}h^2\int_{-1}^{1}\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

On sait que la première intégrale définie est égale à π, la deuxième à zéro, la troisième à $\frac{\pi}{2}$,

$$\theta_1=\frac{\pi}{n}+\frac{(n^2-1)(n^2-4)}{24}\frac{\pi}{n}h^2+\ldots.$$

Or nous avons dit que θ doit être indépendant de h; il faut

donc que les coefficients des diverses puissances de ce paramètre soient nuls. Considérons celui de h^2; nous trouvons que n^2 doit être égal à 1 ou à 4, soit $n = 1$ ou $n = 2$; selon celle des deux valeurs qu'on adopte, on trouve

$$\varphi'(u) = A \quad \text{ou} \quad \varphi'(u) = \frac{A}{u^2};$$

mais

$$2f(r)\,dr = \varphi'(u)\,du = -\varphi'(u)\frac{dr}{r^2};$$

donc, suivant le cas,

$$f(r) = -\frac{A}{2}\frac{1}{r^2} \quad \text{ou} \quad f(r) = -\frac{A}{2}r.$$

Les seules lois d'attraction qui donnent des trajectoires toujours fermées, et par suite un mouvement tel que le mobile revienne dans un même azimut après des temps égaux, sont la loi de Newton et l'attraction proportionnelle à la distance, et cette dernière ne saurait guère se réaliser pour des corps éloignés. La loi newtonienne est la seule qui convienne aux mouvements périodiques de tous les astres, même des étoiles doubles où l'on ne peut guère constater que la périodicité.

Cette proposition est due à M. Bertrand (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1873), et j'ai reproduit en partie sa démonstration. La formule (3) avait été donnée par Newton pour les mouvements presque circulaires, et la lenteur extrême du mouvement des périhélies planétaires confirmait l'exactitude de la loi de la gravitation universelle.

132. *Sur les constantes du mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe suivant la loi de Newton; mouvement sur une trajectoire parabolique; théorème de Lambert.*

Soit $\frac{f\mu}{r^2}$ la valeur de l'attraction à la distance r; la loi du

mouvement est donnée par l'équation des aires et celle des forces vives

$$r^2 d\theta = c^2 dt, \quad c^4\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = v_0^2 + \frac{2f\mu}{r} - \frac{2f\mu}{r_0}.$$

On en tire

$$d\theta = -c^2 d\frac{1}{r}\left[v_0^2 - \frac{2f\mu}{r_0} + \frac{f^2\mu^2}{c^4} - \left(\frac{c^2}{r} - \frac{f\mu}{c^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale du second membre est un arc cosinus, et en résolvant par rapport au cosinus, on aura l'équation de la trajectoire

$$r = \frac{\frac{c^4}{f\mu}}{1 + \sqrt{\frac{c^4 v_0^2}{f^2\mu^2} - 2\frac{c^4}{f\mu r_0} + 1}\cos(\theta - \alpha)}.$$

On reconnaît la section conique dont le pôle est un foyer; si l'on égale les termes de notre équation aux termes correspondants de l'équation ordinaire des coniques, on a de quoi déterminer les éléments de la trajectoire

$$\frac{c^4}{f\mu} = p = a(1 - e^2), \quad \frac{c^4 v_0^2}{f^2\mu^2} - \frac{2c^4}{f\mu r_0} + 1 = e^2.$$

On en déduit

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{f\mu}.$$

La trajectoire est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que $e^2 \lesseqgtr 1$, ou selon que $\frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{f\mu}$ est < 0, $= 0$ ou > 0. Quand la trajectoire est elliptique, en appelant T le temps d'une révolution, on a

$$c^2 = \frac{2\pi a^2\sqrt{1 - e^2}}{T};$$

$\frac{2\pi}{T}$ est le moyen mouvement, vitesse angulaire moyenne, que l'on désigne par n; donc, en nous reportant à une formule précédente,

$$c^4 = f\mu a(1 - e^2) = n^2 a^4 (1 - e^2), \quad n^2 a^3 = f\mu.$$

Si l'on applique cette dernière formule à la Terre, en supposant le Soleil fixe, et si l'on prend pour unité de temps le jour solaire, pour unité de longueur le rayon moyen de l'écliptique, on trouve

$$f\mu = \frac{4\pi^2}{(365,24)^2} = (0,0172)^2.$$

Mais, si l'on prend la seconde pour unité de temps, le rayon terrestre pour unité de longueur, on trouve à peu près

$$f\mu = (0,0172)^2 \times \frac{(24000)^3}{24^2 \times 60^2 \times 60^2} = \frac{5}{9};$$

c'est environ g divisé par le rayon terrestre exprimé en mètres et multiplié par le rapport de la masse du Soleil à celle de la Terre, 356000; on retrouve l'identité de la pesanteur et de l'attraction universelle.

Quand la trajectoire est parabolique ou que $2f\mu = r_0 v_0^2$, on trouve le paramètre

$$p = \frac{c^4}{f\mu} = \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2(r_0, v_0)}{f\mu} = 2r_0 \sin^2(r_0, v_0).$$

L'angle du périhélie avec le rayon vecteur initial se déduit de l'équation de la parabole en y faisant $r = r_0$, $\theta = 0$; on a

$$1 + \cos\alpha = \frac{p}{r_0}.$$

Pour avoir la position du mobile sur sa trajectoire, je suppose que l'axe polaire passe au périhélie, en sorte que

θ désignera l'anomalie vraie. Le théorème des aires nous donne

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{c^2} = \sqrt{\frac{p^3}{f\mu}} \frac{d\theta}{4\cos^4 \frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^3}{f\mu}}\left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\theta\right) d\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta.$$

Intégrant et faisant $t = 0$ pour $\theta = 0$,

$$(1) \qquad t = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{p^3}{f\mu}}\left(3 \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta + \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2}\theta\right).$$

Il ne sera pas commode de résoudre par rapport à θ, mais on construira des Tables qui donneront t en fonction de θ, et par interpolation on en déduira l'anomalie vraie du mobile à chaque instant.

Le théorème de Lambert consiste en ce que l'intervalle de temps employé par le mobile pour aller d'un point à un autre de la parabole peut s'exprimer sans faire intervenir le paramètre, et seulement au moyen des rayons vecteurs extrêmes et de la corde de l'arc parcouru. Soient a et b ces rayons extrêmes, θ_1, θ_2 leurs anomalies vraies, α, β les tangentes des moitiés de ces angles, c la corde de l'arc parabolique; l'équation (1) donne, pour le temps que le mobile met à passer d'une position à l'autre,

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} T &= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{p^3}{f\mu}}[3(\beta - \alpha) + \beta^3 - \alpha^3] \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)\sqrt{\frac{p^3}{f\mu}}(3 + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2). \end{aligned}\right.$$

Le carré de la corde de l'arc parcouru est

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta_2 - \theta_1),$$

d'où

$$\begin{aligned}(a + b)^2 - c^2 &= 4ab\cos^2\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \\ &= \frac{p^2}{\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}}\cos^2\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = p^2(1 + \alpha\beta)^2.\end{aligned}$$

Nous connaissons le produit de $a+b+c$ et de $a+b-c$; nous aurons facilement leur somme

$$2a+2b=\frac{p}{\cos^2\frac{\theta_1}{2}}+\frac{p}{\cos^2\frac{\theta_2}{2}}=p(2+\alpha^2+\beta^2);$$

$a+b+c$ et $a+b-c$ sont racines de l'équation du second degré

$$u^2-p(2+\alpha^2+\beta^2)u+p^2(1+\alpha\beta)^2=0;$$

donc

$$a+b\pm c=p\left(1+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\pm p(\beta-\alpha)\sqrt{1+\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2}.$$

On peut former dans la partie rationnelle la quantité sous le radical, et écrire

$$\begin{aligned}&a+b\pm c\\&=p\left[1+\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\pm(\beta-\alpha)\sqrt{1+\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2}\right]\end{aligned}$$

On a un carré, et, si l'on veut mettre en évidence la racine prise en valeur absolue, on devra écrire, en supposant $\theta_2-\theta_1<\pi$,

$$a+b\pm c=p\left[\sqrt{1+\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2}\pm\frac{\beta-\alpha}{2}\right]^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^{\frac{3}{2}}-(a+b-c)^{\frac{3}{2}}\\&=p^{\frac{3}{2}}(\beta-\alpha)\left[3+3\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\right]\\&=p^{\frac{3}{2}}(\beta-\alpha)(3+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).\end{aligned}$$

Comparant à l'équation (2), nous avons l'expression cherchée

$$T=\frac{1}{6\sqrt{f\mu}}\left[(a+b+c)^{\frac{3}{2}}-(a+b-c)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Si $\theta_2 - \theta_1$ est $> \pi$, $\sqrt{1 + \frac{1}{4}(\beta + \alpha)^2}$ est $< \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2$, et l'on aura

$$a + b \pm c = p\left[\frac{\beta - \alpha}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right)^2}\right]^2,$$

$$T = \frac{1}{6\sqrt{f\mu}}\left[(a + b + c)^{\frac{3}{2}} + (a + b - c)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Ces formules donnent une expression remarquable de l'aire d'un secteur parabolique, qui est égal à $\frac{1}{2}c^2 T$ ou $\frac{1}{2}T\sqrt{pf\mu}$; l'aire du secteur est donc

$$A = \frac{1}{12}\sqrt{p}\left[(a + b + c)^{\frac{3}{2}} \pm (a + b - c)^{\frac{3}{2}}\right].$$

En adoptant pour unité de temps le jour moyen, pour unité de longueur le rayon moyen de l'écliptique, nous avons trouvé

$$\sqrt{f\mu} = 0{,}0172;$$

donc

$$T = 9^j\,16^h\left[(a + b + c)^{\frac{3}{2}} - (a + b - c)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Cette formule est employée dans la recherche des orbites paraboliques des comètes; si l'on connaît le temps qui sépare les deux passages de l'astre dans le plan de l'écliptique, ou en d'autres termes aux extrémités d'une corde focale, on en conclut la longueur de cette corde; c étant égal à $a + b$, la formule devient

$$T = 27^j\,15^h \times c^{\frac{3}{2}}.$$

EXERCICES.

Mouvement rectiligne d'un point attiré par une force proportionnelle à la distance vers un centre d'action qui parcourt d'un mouvement uniformément accéléré la droite que le premier point suit également. (RICCATI.)

Un corps pesant tombe sans vitesse initiale d'une hauteur a sur un plan horizontal parfaitement élastique qui le fait rebondir avec vitesse égale à sa vitesse d'arrivée; le mouvement a lieu dans l'air dont la résistance est $\frac{gv^2}{k^2}$; à quelle hauteur remontera le mobile après avoir rebondi n fois? (W. WALTON.)

Les formules du mouvement dans l'air montrent que, si l'on désigne par a_{i-1} et a_i les hauteurs d'ascension après le $i-1^{ième}$ et $i^{ième}$ bond, on a

$$1 - e^{-\frac{2g}{k^2}a_{i-1}} = e^{\frac{2g}{k^2}a_i} - 1.$$

On en conclut

$$a_n = \frac{k^2}{2g} \mathrm{L} \frac{(n+1)e^{\frac{2ag}{k^2}} - n}{ne^{\frac{2ag}{k^2}} - (n-1)}.$$

Un point matériel décrit une parabole sous l'action d'une force perpendiculaire à l'axe, proportionnelle à la distance du point à cette droite, et sous l'influence d'une seconde force parallèle à l'axe; déterminer la loi de cette force et du mouvement du mobile sur la parabole, connaissant la vitesse c au sommet.

La force donnée étant $-k^2y$, l'autre est $\frac{c^2}{p} - 4k^2x$.

Un centre fixe attire avec une intensité proportionnelle à la puissance n de la distance; déterminer n de manière qu'un mobile parti de l'infini ait à la distance c du centre la même vitesse qu'il aurait à la distance $\frac{c}{4}$ si sa distance initiale eût été c. $n = \frac{3}{2}$. (WALTON.)

Étudier le mouvement rectiligne défini par l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a + bt - cx.$$

Un point pesant, lancé horizontalement dans un milieu non homogène, dont la résistance est proportionnelle à la densité et au carré de la vitesse, décrit un quart de cercle dans un plan vertical; comment varie la densité du milieu? (P. JULLIEN.)

Mouvement d'un point pesant qui tombe dans un milieu résistant où la densité varie en raison inverse de la distance à un plan horizontal.

Mouvement d'un projectile dans l'air en supposant la résistance proportionnelle au cube de la vitesse; étudier toute la courbe qui lui sert de trajectoire; montrer qu'en le supposant en mouvement avant l'instant où l'on compte les temps il a dû avoir une vitesse infinie en un point qui est à distance finie.

Si un fil dont chaque élément est soumis à une force connue F dessine une certaine courbe dans un plan, un point matériel pourra décrire la même courbe sous l'action d'une force F′ ayant la même direction que F aux points correspondants et égale à $\frac{Fk}{\sin i}$, i étant l'angle que F et F′ font avec la tangente à la courbe. Ainsi un point lancé parallèlement à une droite dont il est repoussé avec une force proportionnelle à la distance peut décrire une chaînette.

(P. SERRET.)

Une bille pesante est lancée horizontalement à partir d'un point d'un plan incliné parfaitement élastique. Quand elle retombe sur le plan, elle rebondit avec une vitesse égale à sa vitesse d'arrivée, mais symétrique par rapport à la normale au point d'incidence; trouver l'angle d'incidence au $n^{ième}$ bond et sa distance au point de départ. La tangente de l'angle cherché est $\frac{\tang i}{1 - 2n \tang^2 i}$. (BORDONI.)

Mouvement d'un point attiré vers un centre fixe par une force

$$F = \frac{2c^4(a^2 + b^2)}{r^5} - \frac{3c^4 a^2 b^2}{r^7},$$

a, b, c étant des constantes, r la distance au point fixe; cette dis-

tance est d'abord a, et la vitesse initiale $\frac{c^2}{a}$ perpendiculaire au rayon vecteur. (Licence, 1870.)

On emploiera l'intégrale des forces vives, où les constantes se détruiront, et l'on verra que la trajectoire est la podaire d'une ellipse relative à son centre.

Mouvement d'une bille placée sur un plan horizontal et attaché à un fil élastique légèrement extensible dont la réaction est proportionnelle à l'allongement; la vitesse initiale est perpendiculaire au fil. (WALTON.)

Mouvement d'un point attiré vers un centre fixe par une force $\frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^3}$; la trajectoire est la projection d'une ellipse dont le plan serait enroulé sur un cône, quand μ est assez petit. Clairaut avait pensé que telle était la trajectoire de la Lune.

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE FIXE.

Cas où la courbe est donnée et parfaitement polie.

133. Imaginons un point assujetti à rester sur une courbe fixe qui ne produit pas de frottement; on peut décomposer la force extérieure F qui sollicite le mobile en une force P, dirigée suivant la tangente à la courbe, et une composante normale Q. La première produit l'accélération tangentielle

$$(1) \qquad m\frac{dv}{dt} = \mathrm{P}, \quad d\frac{1}{2}mv^2 = \mathrm{P}\,ds;$$

Q, composé avec la force normale N, qui représente l'action de la courbe, produit l'accélération centripète $m\frac{v^2}{\rho}$. Comme l'une des équations (1) ne contient que le temps et le paramètre qui détermine la position des points sur la courbe, on peut dire qu'elle donne la loi du mouvement. La seconde proposition fait connaître l'action de la courbe, résultante de $m\frac{v^2}{\rho}$ et de Q pris en sens contraire; cette réaction fait en général un angle fini avec la normale principale. La pression supportée par la courbe est égale à cette réaction changée de sens.

Si l'on rapporte la courbe à trois axes rectangulaires et qu'on nomme X, Y, Z les composantes de F, λ, μ, ν les

angles de N avec les axes, on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos\lambda,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos\mu,\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\cos\nu,\end{aligned}\right.$$

avec la condition $dx\cos\lambda + dy\cos\mu + dz\cos\nu = 0$. On en conclut l'équation des forces vives

$$d\frac{1}{2}mv^2 = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

L'intégration est possible si X, Y, Z ne dépendent que des coordonnées x, y, z, et, en définitive, d'un paramètre unique; alors les équations (2) donnent les composantes de N, et le problème est résolu.

134. *Mouvement d'un point dont la masse est l'unité, assujetti à rester sur la courbe d'intersection d'un cylindre parabolique et d'un cône*

$$z^2 = 2ax,\quad 9y^2 = 16xz,$$

et sollicité par une force dont les composantes rectangulaires sont

$$X = 4k^2x,\quad Y = \frac{9}{2}k^2y,\quad Z = 2k^2(a + 3z);$$

le point est d'abord placé à l'origine et lancé vers le haut sur la branche qui est en avant du plan xz, avec une vitesse ak.

Ce problème se traite très-facilement à l'aide des équations générales (2). On tire des équations de la courbe

$$x = \frac{z^2}{2a},\quad y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{a}}\,z^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$dx = \frac{z}{a}dz, \quad dy = dz\sqrt{\frac{2z}{a}}, \quad ds = \frac{a+z}{a}dz.$$

L'équation des forces vives est ici

$$d\frac{1}{2}v^2 = 4k^2x\,dx + \frac{9}{2}k^2y\,dy + 2k^2(a+3z)dz.$$

On peut intégrer sans même remplacer x, y, dx, dy par leur valeur en z, paramètre le plus propre à définir les points de la courbe,

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}a^2k^2 = 2k^2x^2 + \frac{9}{4}k^2y^2 + k^2(2az + 3z^2).$$

Remplaçant x, y et $v = \frac{ds}{dt}$ par leur valeur en z,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{(a+z)^2}{a^2}\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{k^2}{a^2}(a+z)^4;$$

d'où

$$\frac{dz}{a+z} = k\,dt, \quad a+z = ae^{kt}.$$

Le mouvement se fera toujours dans le même sens, avec une vitesse croissante. Il nous reste à calculer les composantes de N, et pour cela il faut connaître $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. On a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{kz(a+z)}{a}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dz}{dt} = \frac{k^2(a+z)(a+2z)}{a},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2}{\sqrt{2az}}(a+z)(a+3z), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = k^2(a+z);$$

par conséquent

$$N\cos\lambda = \frac{d^2x}{dt^2} - X = k^2(a + 3z),$$

$$N\cos\mu = \frac{k^2}{\sqrt{2az}}(a^2 + 4az - 3z^2),$$

$$N\cos\nu = -k^2(a + 5z).$$

Il est aisé de constater que $\cos\lambda\, dx + \ldots = 0$; quant à l'angle de N et de la normale principale, on en aura facilement le cosinus, mais il est très-compliqué.

135. *Un point matériel, assujetti à rester sur une ellipse, est attiré vers les deux foyers par des forces inversement proportionnelles au carré de la distance et vers le centre par une force proportionnelle à la distance; démontrer que la pression exercée en chaque point de l'ellipse est inversement proportionnelle au rayon de courbure; déterminer la vitesse initiale qui annulerait la pression; mouvement correspondant.* (Question de licence, 1865, généralisée.)

Je suppose la masse du mobile M égale à l'unité, et je désigne par r, r', u ses distances aux foyers F, F′ et au centre O, par μ, μ', λ les attractions de ces trois points à l'unité de distance, par ψ et ω les angles de la normale en M avec MF et MF′ d'une part, avec MO de l'autre. On sait que le travail d'une force attractive émanant d'un centre fixe est égal et de signe contraire au produit de la force par l'accroissement de distance du mobile au centre. Le théorème des forces vives donne ici

$$d\frac{1}{2}v^2 = -\mu\frac{dr}{r^2} - \mu'\frac{dr'}{r'^2} - \lambda u\, du;$$

d'où

$$\text{(I)}\quad v^2 - v_0^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + 2\mu'\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r'_0}\right) - \lambda(u^2 - u_0^2).$$

Soit N la réaction normale de la courbe, supposée positive quand elle est dirigée vers le centre de courbure; nous avons

$$\frac{v^2}{\rho} = N + \frac{\mu}{r^2}\cos\psi + \frac{\mu'}{r'^2}\cos\psi + \lambda u \cos\omega;$$

d'où, en tenant compte de la valeur de v^2 tirée de l'équation (I),

$$N = \frac{1}{\rho}\left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} - \frac{2\mu'}{r'_0} + \lambda u_0^2\right) + \mu\left(\frac{2}{r\rho} - \frac{\cos\psi}{r^2}\right)$$
$$+ \mu'\left(\frac{2}{r'\rho} - \frac{\cos\psi}{r'^2}\right) - \lambda\left(\frac{u^2}{\rho} + u\cos\omega\right).$$

Pour évaluer les termes variables en μ et μ', je rappelle les relations

$$\rho = \frac{b^2}{a\cos^3\psi}, \quad rr'\cos^2\psi = b^2, \quad \rho\cos\psi = \frac{rr'}{a};$$

d'où

$$\frac{2}{r\rho} - \frac{\cos\psi}{r^2} = \frac{2r - \rho\cos\psi}{r^2\rho} = \frac{2ar - rr'}{ar^2\rho} = \frac{1}{a\rho} = \frac{2}{r'\rho} - \frac{\cos\psi}{r'^2}.$$

Pour calculer les termes en λ, je désigne par p la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en M; on sait que $u\cos\omega = p$ et $p^3\rho = a^2b^2$; donc

$$\frac{u^2}{\rho} + u\cos\omega = \frac{1}{\rho}\left(u^2 + \frac{a^2b^2}{p^2}\right) = \frac{1}{\rho}(a^2 + b^2).$$

La dernière transformation est fondée sur les théorèmes d'Apollonius, d'où résulte que $\frac{ab}{p}$ est le diamètre conjugué de OM. Les calculs précédents donnent à la valeur de N la forme proposée

$$N = \frac{1}{\rho}\left[v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} - \frac{2\mu'}{r'_0} + \lambda u_0^2 + \frac{\mu + \mu'}{a} - \lambda(a^2 + b^2)\right].$$

Il a été dit que, si N est positif, c'est que le point tend à sortir de l'ellipse. Pour qu'elle soit nulle ou que le point décrive librement la courbe, il faut avoir

$$\text{(II)} \qquad v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} + \frac{2\mu'}{r'_0} - \lambda u_0^2 - \frac{\mu + \mu'}{a} + \lambda(a^2 + b^2).$$

Pour avoir l'équation différentielle du mouvement dans ce cas particulier, je reprends l'équation (I), en l'additionnant membre à membre avec l'équation (II),

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{2\mu'}{r'} - \lambda u^2 - \frac{\mu + \mu'}{a} + \lambda(a^2 + b^2).$$

Déterminons les points de l'ellipse par leur anomalie excentrique φ; on a

$$r = a(1 - e\cos\varphi), \qquad r' = a(1 + e\cos\varphi),$$
$$u^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \qquad ds^2 = a^2(1 - e^2\cos^2\varphi)\,d\varphi^2.$$

Substituant dans l'équation précédente, on lui donne, après de simples réductions, la forme suivante :

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \frac{\mu}{a^2(1 - e\cos\varphi)^2} + \frac{\mu'}{a^2(1 + e\cos\varphi)^2} + \lambda.$$

On ne peut effectuer l'intégration; mais, comme $\frac{d\varphi}{dt}$ ne peut s'annuler, on voit que le mouvement sera continu.

L'équation (II) est remarquable : si l'on y annule tour à tour μ' et λ, μ et λ, μ et μ', on reconnaît que v_0^2 est la somme des carrés de trois vitesses initiales avec lesquelles le mobile décrirait librement l'ellipse sous l'action de F seul, ou de F', ou de O. Nous avons un cas particulier d'un théorème général : lorsqu'un mobile, partant d'un point donné avec des vitesses dirigées suivant une droite donnée, peut, sous l'action de forces qui donnent lieu à l'intégrale des forces vives, décrire une certaine courbe, il la décrit encore si

toutes les forces agissent à la fois, pourvu que la vitesse initiale soit dirigée suivant la droite donnée, et que son carré soit la somme des carrés des vitesses correspondant à l'action individuelle de chaque force. Il suffit d'écrire l'intégrale des forces vives avec toutes les forces pour y lire ce résultat.

Une autre proposition, qui comprend le cas proposé, consiste en ceci : soit un mobile soumis à l'action de certaines forces, qui, avec une vitesse initiale donnée, décrit une courbe plane; si l'on change la vitesse initiale et qu'on oblige le mobile à décrire la même courbe, il exercera une pression inversement proportionnelle au rayon de courbure. En effet la valeur de N, qui était nulle dans le premier cas, se complique seulement d'un terme provenant de $\frac{v^2}{\rho}$. Or la valeur de v^2 ne diffère de ce qu'elle est dans le premier cas que par l'addition d'une constante h, qui rend $N = \frac{h}{\rho}$.

136. *Un mobile* M, *non pesant, assujetti à rester sur une circonférence de cercle, est attiré vers un point* O *de cette courbe par une force fonction de la distance; déterminer cette fonction de manière que la pression exercée sur le cercle soit constante; nature du mouvement produit.*

(Licence, 1868.)

Prenons la masse du mobile pour unité, le point O pour pôle, le diamètre OA pour axe polaire; désignons par a le diamètre, par r la distance OM et par $\varphi(r)$ l'attraction du centre O. La vitesse est donnée par le théorème des forces vives

$$d.v^2 = -2\varphi(r)dr. \tag{I}$$

La réaction normale N du cercle fait avec r un angle égal

à θ, et, comme le rayon de courbure est $\frac{a}{2}$, on a

$$\frac{2v^2}{a} = \mathrm{N} + \cos\theta\varphi(r), \quad v^2 = \frac{\mathrm{N}a}{2} + \frac{1}{2}r\varphi(r),$$

puisque $a\cos\theta = r$. Différentions et comparons à l'équation (2)

$$d.v^2 = \frac{1}{2}\varphi(r)dr + \frac{1}{2}r\varphi'(r)dr = -2\varphi(r)dr :$$

donc

$$r\varphi'(r) + 5\varphi(r) = 0, \quad \varphi(r) = \frac{2c}{r^5};$$

c désigne une constante; l'attraction varie en raison inverse de la cinquième puissance de la distance. On peut alors intégrer l'équation (2), qui donne

$$(3) \qquad v^2 - v_0^2 = \frac{c}{r^4} - \frac{c}{r_0^4}.$$

La pression exercée sur le cercle est égale à N, mais dirigée en sens contraire;

$$\mathrm{N} = \frac{2v_0^2}{a} - \frac{2c}{ar_0^4}.$$

Quand N est positif, c'est que le mobile tend à sortir du cercle; si N est négatif, il tend à y pénétrer. Je tire c de cette relation pour le substituer dans l'équation (3), en même temps que les valeurs

$$v = a\frac{d\theta}{dt}, \quad v_0 = a\omega, \quad r_0 = a\cos\alpha, \quad c = a^5\cos^4\alpha\left(a\omega^2 - \frac{\mathrm{N}}{2}\right);$$

elle devient

$$(4) \qquad a\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{\mathrm{N}}{2} + \left(a\omega^2 - \frac{\mathrm{N}}{2}\right)\frac{\cos^4\alpha}{\cos^4\theta}.$$

On ne peut intégrer dans le cas général; mais on voit

que, si N est $> 2a\omega^2$ ou $c < 0$, le mobile n'atteindra jamais le point O et oscillera entre les points dont l'angle polaire est $\pm\theta'$, où l'on a

$$\cos^2\theta' = \left(1 - \frac{2a\omega^2}{N}\right)\cos^2\alpha.$$

Qand $N < 2a\omega^2$, c'est-à-dire quand la force est attractive, le mobile arrivera en O avec une vitesse infinie; mais il n'atteindra pas toujours le point diamétralement opposé. Il n'y arrivera pas si

$$\frac{N}{2} + \left(a\omega^2 - \frac{N}{2}\right)\cos^2\alpha < 0, \quad N < -2a\omega^2\cot^2\alpha;$$

mais, lorsque N sera compris entre $2a\omega^2$ et $-2a\omega^2\cot^2\alpha$, $\frac{d\theta}{dt}$ ne s'annulera jamais, et le mouvement sera continu.

Les seuls cas où l'équation (4) s'intègre à l'aide des fonctions élémentaires sont celui de $N = 2a\omega^2$ et de $N = 0$: le premier répond à une attraction nulle et donne un mouvement uniforme; le second, où le point suit librement le cercle, donne à l'équation (4) la forme simple

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\theta}, \quad 2\theta + \sin 2\theta = 4\omega t\cos^2\alpha + 2\alpha + \sin 2\alpha.$$

Le mouvement est continu, périodique, et la durée de la révolution sur le cercle est $\frac{\pi}{\omega\cos^2\alpha} = \frac{\pi a^2}{\sqrt{c}}$.

137. *On donne, dans un plan vertical, une cycloïde dont la base est horizontale et la convexité tournée vers le bas; le rayon du cercle générateur est a. Un fil sans masse, de longueur 6a, est attaché par une de ses extrémités à l'un des points de rebroussement de la cycloïde; le fil est d'abord vertical et se termine par une*

masse m à laquelle on donne une vitesse horizontale $\sqrt{8ga}$; *mouvement du point m, tension du fil.* (Licence, 1864.)

Je prends pour origine le point O, où le fil est attaché; pour axe des x l'horizontale, et pour axe des y la verticale descendante. Soit A la position initiale de m; le fil OA s'enroulera sur la cycloïde, une portion OP s'infléchissant suivant un arc égal de la courbe, l'autre partie PM étant dirigée suivant la tangente. Les coordonnées du point P peuvent s'écrire

$$x_1 = a(u - \sin u), \quad y_1 = a(1 - \cos u).$$

Un calcul connu donne

$$\text{arc OP} = 4a\left(1 - \cos\frac{u}{2}\right);$$

donc

$$\text{PM} = 2a\left(1 + 2\cos\frac{u}{2}\right).$$

D'ailleurs $\frac{u}{2}$ est l'angle de PM avec OY ou de la tangente à la trajectoire avec OX. Je le désigne par φ. En projetant sur les axes l'arc OP et la tangente PM, on a les coordonnées du point M

$$x = a(2\varphi - \sin 2\varphi) + 2a(1 + 2\cos\varphi)\sin\varphi = a(2\varphi + 2\sin\varphi + \sin 2\varphi),$$
$$y = a(3 + 2\cos\varphi + \cos 2\varphi).$$

Sans effectuer l'élimination de φ, qui donne un résultat très-compliqué, on peut reconnaître la forme de la courbe. On a d'abord

$$dx = 2a\cos\varphi(1 + 2\cos\varphi)d\varphi, \quad dy = -2a(1 + 2\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Dans la cycloïde, on fait toujours croître u; on fera de même pour φ; x commence par croître, y par décroître; pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dx devient négatif; alors x diminue jusqu'à

ce que φ soit égal à $\frac{2\pi}{3}$; dx et dy changent de signe à ce moment; x et y vont augmenter, et l'on a un point de rebroussement B $\left[x = a\left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right), y = \frac{3}{2}a\right]$, situé sur la cycloïde, tandis que tout le reste de la courbe est en dessous. A partir du rebroussement jusqu'à $\varphi = \pi$, x et y augmentent pour atteindre $2a\pi$ et $2a$. La partie qui suit est symétrique de celle que je viens d'esquisser, par rapport à la verticale du second point de rebroussement de la cycloïde; mais le poids m n'atteint pas même le point B, car le théorème des forces vives donne

$$v^2 - 8ga = 2g(y - 6a).$$

Or $ds = 2a(1 + 2\cos\varphi)d\varphi$; il vient alors

$$v^2 = 4a^2(1 + 2\cos\varphi)^2\frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2ga(1 + 2\cos\varphi + 2\cos\varphi);$$

d'où

$$\text{(I)} \qquad dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{(1 + 2\cos\varphi)d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi(1 + \cos\varphi)}}.$$

On voit que φ ne peut croître au delà de $\frac{\pi}{2}$; pour cette valeur, le mobile s'arrête et va rebrousser chemin pour exécuter des oscillations symétriques; les coordonnées du point d'arrêt sont $x = (\pi + 2)a$, $y = 2a$; la tangente est verticale; l'arc parcouru est

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a(1 + 2\cos\varphi)d\varphi = a(\pi + 4).$$

Pour intégrer l'équation (I), on prendra pour variable $\tang\frac{1}{2}\varphi$, ce qui laisse un radical; mais, comme φ reste com-

pris entre $\pm\frac{\pi}{2}$, on posera $\tang\frac{1}{2}\varphi = \sin\mu$; d'où

$$d\varphi = \frac{2\cos\mu\, d\mu}{1+\sin^2\mu}, \quad \cos\varphi = \frac{\cos^2\mu}{1+\sin^2\mu}.$$

Substituant dans l'équation (I),

$$dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{3-\sin^2\mu}{1+\sin^2\mu}\sqrt{2}\,d\mu = \frac{4\sqrt{2}\,d\mu}{1+\sin^2\mu} - \sqrt{2}\,d\mu,$$

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\,t = 4\arctang(\sqrt{2}\tang\mu) - \mu\sqrt{2}$$
$$= 4\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\varphi\right) - \sqrt{2}\arcsin\left(\tang\frac{1}{2}\varphi\right).$$

Le temps d'une demi-oscillation s'obtient en faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\mu = \frac{\pi}{2}$,

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

La tension correspondant à une position quelconque du fil est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale du poids; or $\rho = PM$, et nous avons trouvé l'expression de v^2; on en déduit

$$N = m\left(\frac{v^2}{\rho} + g\cos\varphi\right) = mg\,\frac{4\cos\varphi + 3\cos^2\varphi}{1+2\cos\varphi}.$$

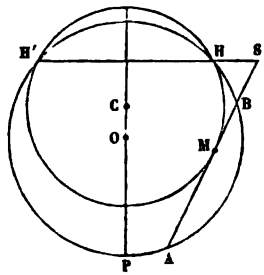
Cette tension est d'abord $\frac{7}{3}mg$ et diminue jusqu'à zéro.

138. *Deux points pesants se meuvent sur un cercle vertical dans des conditions telles, que leurs vitesses au point le plus bas sont égales; montrer que la corde qui joint les positions simultanées des deux pendules enveloppe un cercle ayant pour axe radical avec le cercle donné l'horizontale mesurant la hauteur d'où il faudrait faire tomber les mobiles pour leur donner leurs vitesses réelles.*

(JACOBI.)

Soient (*fig.* 21) A et B deux positions simultanées des mobiles, A′, B′ des positions infiniment voisines, P le point le plus bas du cercle, $\sqrt{2gh}$ les vitesses en ce point, HH′ l'horizontale située à la hauteur h au-dessus : les carrés des

Fig. 21.



vitesses sont entre eux comme les distances de A et B à HH′ ou comme AS : BS, S étant le point de rencontre de AB et de HH′. D'ailleurs la similitude des triangles A A′M, BB′M montre que le point M, où AB touche son enveloppe, partage la corde dans le rapport de AA′ à BB′, c'est-à-dire des vitesses correspondantes ; donc

$$\frac{SA}{SB} = \frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}^2} = \frac{(SA - SM)^2}{(SM - SB)^2}.$$

Développons et réduisons ; nous pourrons diviser par AB et écrire

$$\overline{SM}^2 = SA \times SB.$$

Le cercle qui passe en M, H et H′, ou qui admet avec le cercle donné HH′ pour axe radical, est donc tangent à AB ; quand cette droite se déplace infiniment peu, le cercle qui la touche et passe en H et H′ vient à une distance de M qui est du second ordre infinitésimal au moins : c'est dire qu'il

se confond avec le premier et constitue l'enveloppe de la corde AB. Pour construire ce cercle, il sera nécessaire de connaître h et une position particulière de AB.

La propriété que je viens d'établir est l'interprétation mécanique d'une forme que Jacobi a donnée à l'intégrale de l'équation d'Euler; on sait que cette équation peut s'écrire

$$(\alpha) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}.$$

Jacobi prend deux cercles dont les centres sont O et C, les rayons R et r; il considère une tangente mobile AB au second cercle et remarque que, si l'on désigne par $2R\varphi$ et $2R\psi$ les arcs PA, PB interceptés sur le premier cercle par la tangente variable à partir de l'extrémité P du diamètre commun, les variations des angles φ et ψ satisfont à une équation de la forme (α). En effet, d'après une remarque faite dans la démonstration géométrique, si M est le point de contact de AB avec le cercle C, et si $OC = a$, nous aurons

$$\frac{2R\,d\varphi}{2R\,d\psi} = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{MC}^2}}{\sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{MC}^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\varphi - r^2}}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\psi - r^2}}.$$

Je remplace $\cos 2\varphi$ par $1 - 2\sin^2\varphi$, $\cos 2\psi$ par $1 - 2\sin^2\psi$, et, en divisant les deux radicaux par $\sqrt{(R+a)^2 - r^2}$, je trouve précisément entre $d\varphi$ et $d\psi$ une relation de la forme (α), avec la valeur du carré du module,

$$(\beta) \qquad e^2 = \frac{4aR}{(a+R)^2 - r^2}.$$

Toute équation entre φ et ψ, exprimant la propriété de la corde AB, sera l'intégrale générale de l'équation (α) si elle renferme une arbitraire; ainsi prenons l'équation de

AB et écrivons que sa distance à C est r

$$(\gamma) \qquad a\cos(\psi+\varphi)+\mathrm{R}\cos(\psi-\varphi)=r:$$

c'est l'intégrale cherchée. Nous n'avons, en réalité, que deux paramètres, $\frac{r}{\mathrm{R}}$ et $\frac{a}{\mathrm{R}}$; l'équation (β) détermine l'un d'eux, mais il en reste dans l'intégrale précédente un tout à fait arbitraire.

Revenons à nos pendules, que je suppose en A et B; en P, leur vitesse était $\sqrt{2gh}$, et l'équation des forces vives prend la même forme pour les deux :

$$4\mathrm{R}^2\frac{d\varphi^2}{dt^2}-2gh=2g\mathrm{R}(\cos 2\varphi-1);$$

d'où

$$\frac{\sqrt{2gh}}{2\mathrm{R}}dt=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{2\mathrm{R}}{h}\sin^2\varphi}}=\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{2\mathrm{R}}{h}\sin^2\psi}};$$

φ et ψ sont liés par une équation de la forme (α); donc la droite AB enveloppe un cercle analogue à celui que Jacobi a considéré; on a

$$(\delta) \qquad \frac{2\mathrm{R}}{h}=\frac{4a\mathrm{R}}{(a+\mathrm{R})^2-r^2}.$$

On obtient une seconde relation entre a et r en considérant l'instant où A et B sont sur une même horizontale; on peut regarder φ comme égal à $-\alpha$ et $\psi=\alpha$, et l'on a évidemment

$$\mathrm{R}\cos 2\alpha=r-a,$$

comme l'indique aussi l'équation (γ). Si donc $2\mathrm{T}$ est l'intervalle entre les époques du passage des deux mobiles en P, il est clair qu'il faudra un temps T à l'un d'eux pour parcourir un arc $2\mathrm{R}\alpha$ à partir de P, et α sera déterminé

par l'équation

$$\frac{\sqrt{2gh}}{2R}T = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2R}{h}\sin^2\varphi}},$$

et l'on pourra adjoindre à (δ), pour déterminer z et a,

$$r - a = R\left(\cos^2 \mathrm{am}\,\frac{T\sqrt{2gh}}{2R} - \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{T\sqrt{2gh}}{2R}\right).$$

Supposons $h > 2R$, le mouvement des pendules sera continu. Soit T le temps nécessaire pour parcourir tout le cercle; si, à des intervalles de temps $\frac{T}{n}$, on lance n mobiles du point P avec la vitesse $\sqrt{2gh}$, ces mobiles forment les sommets d'un polygone dont les côtés enveloppent toujours un même cercle; d'où ce théorème, dû au général Poncelet: *Si deux cercles sont tels qu'on puisse construire un polygone inscrit dans l'un et circonscrit à l'autre, il existera une infinité de polygones ayant la même propriété.*

Le temps d'une petite oscillation est donné par les formules précédentes. Soit 2θ l'angle maximum du pendule avec la verticale, on aura

$$h = 2R\sin^2\theta,$$

et, si l'on pose $\sin\varphi = \sin\theta \sin u$, il viendra

$$\sin\theta\sqrt{\frac{g}{R}}\,dt = \frac{\sin\theta\,du}{\sqrt{1 - \sin^2\theta\sin^2 u}},$$

$$dt\sqrt{\frac{g}{R}} = du\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\sin^2 u + \ldots\right),$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\theta + \ldots\right].$$

Cas où il y a des résistances de milieux et de frottement.

Les résistances du milieu, étant des fonctions de la vitesse, n'empêchent pas l'équation du travail, $d.v^2 = \mathrm{P}ds$, de donner la loi du mouvement sur la courbe; seulement, comme P dépend de v, l'intégrale du premier ordre ne se trouve plus à l'aide d'une simple quadrature; on a une équation différentielle à intégrer. S'il y a une force de frottement proportionnelle à la pression normale, il faut calculer cette pression, résultante de la force centrifuge et de la composante normale des forces extérieures; en la reportant dans l'équation du travail, on est encore ramené à une équation différentielle en v^2.

139. *Un point pesant est lancé avec une vitesse horizontale v_0, à partir du sommet d'une cycloïde dépolie dont la base est horizontale et la convexité tournée vers le haut; le plan de la courbe est vertical. Mouvement du mobile; point où il quitte la courbe en le supposant posé au-dessus.*

En prenant pour axes la tangente au sommet et l'axe de la cycloïde, les coordonnées d'un de ses points ont la forme connue

$$x = a(u + \sin u), \quad y = a(1 - \cos u).$$

On sait que la tangente fait avec l'axe des x l'angle $\frac{u}{2}$, et que

$$ds = 2a\cos\frac{1}{2}u\,du, \quad \rho = 4a\cos\frac{1}{2}u.$$

Soit N la réaction normale de la courbe dirigée vers le haut, $f\mathrm{N}$ sera la réaction tangentielle, et, en faisant la masse du mobile égale à l'unité, nous aurons, comme dans les cas précédents, les deux équations du mouvement

$$\text{(I)} \qquad d\frac{1}{2}v^2 = \left(g\sin\frac{u}{2} - f\mathrm{N}\right)ds, \quad \frac{v^2}{\rho} = g\cos\frac{u}{2} - \mathrm{N}.$$

Éliminons N,

$$\frac{1}{2}\frac{d.v^2}{ds} - f\frac{v^2}{\rho} = g\left(\sin\frac{1}{2}u - f\cos\frac{1}{2}u\right)$$

ou

$$\frac{d.v^2}{du} - fv^2 = 2ag[\sin u - f(1+\cos u)].$$

L'intégrale de cette équation linéaire est donnée par une formule générale

$$v^2 = e^{fu}\left[v_0^2 + 2ag\int_0^u (\sin u - f - f\cos u)e^{-fu}du\right];$$

mais

$$\int e^{-fu}\cos u\,du = \frac{\sin u - f\cos u}{1+f^2}e^{-fu},$$

$$\int e^{-fu}\sin u\,du = -\frac{\cos u + f\sin u}{1+f^2}e^{-fu};$$

donc

$$v^2 = \left(v_0^2 - \frac{4gaf^2}{1+f^2}\right)e^{fu} + 2ag\left[1 - \frac{(1-f^2)\cos u + 2f\sin u}{1+f^2}\right].$$

En posant $f = \operatorname{tang}\varphi$, cette expression prend une forme remarquable

$$\text{(II)}\quad v^2 = (v_0^2 - 4ag\sin^2\varphi)e^{u\operatorname{tang}\varphi} + 4ag\sin^2\left(\varphi - \frac{1}{2}u\right).$$

Avant de discuter cette formule, je rappelle que nos équations (I) sont établies en supposant la réaction de la courbe dirigée vers l'extérieur, et $N > 0$; si N devient négatif, quand le mobile reposera simplement sur la courbe, il la quittera, et quand il ne pourra s'échapper, comme une bille enfermée dans un tube cycloïdal, il faudra écrire la première équation (I)

$$\text{(I bis)}\qquad d\frac{1}{2}v^2 = \left(g\sin\frac{1}{2}u + fN\right)ds,$$

et la formule (II) ne sera plus exacte. Or nous avons

$$N = g\cos\frac{1}{2}u - \frac{v^2}{\rho};$$

la formule (II) s'applique seulement tant que

$$v^2 < g\rho\cos\frac{1}{2}u < 4ag\cos^2\frac{1}{2}u.$$

Il faut que v_0^2 soit $< 4ag$, sinon le mobile quitterait tout de suite la courbe. La formule (II) commence par être applicable tant qu'on a

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{aligned} &(v_0^2 - 4ag\sin^2\varphi)\,e^{u\tan\varphi} + 4ag\sin^2\left(\varphi - \frac{1}{2}u\right) \\ &\qquad\qquad - 4ag\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}u\right) < 0. \end{aligned}\right.$$

Distinguons deux cas selon le signe de $v_0^2 - 4ag\sin^2\varphi$: s'il est positif, la formule (II) montre que v^2 ne s'annule pas; mais l'inégalité (III) cesse d'être satisfaite quand u dépasse une certaine valeur moindre que π; alors le mobile s'échappe s'il en est libre, ou sinon il faut modifier les équations du mouvement comme il est dit (I *bis*).

Soit $v_0^2 - 4ag\sin^2\varphi < 0$; la formule (II) montre que v^2 s'annule pour une valeur de u moindre que 2φ, car le second membre, positif pour $u = 0$, est négatif pour $\frac{1}{2}u = \varphi$; mais le deuxième terme du premier membre de la formule (III) est moindre que le troisième, à cause de $\varphi < \frac{\pi}{2}$; l'inégalité sera toujours vérifiée; le mobile restera sur la courbe jusqu'à ce que v^2 devienne nul, et l'on arrivera à un repos indéfini.

Soit $v_0^2 - 4ag\sin^2\varphi = 0$. Le mobile s'arrête pour $u = 2\varphi$, sans que l'inégalité (III) cesse d'être vérifiée; mais le point de repos est une position d'équilibre instable; u peut dé-

passer la valeur 2φ sans que v devienne imaginaire; la vitesse est toujours donnée par la formule (II), du moins jusqu'à $u = \varphi + \frac{\pi}{2}$, valeur pour laquelle N est nul, et le mouvement change de nature. On peut exprimer t en fonction de u; car, avec la valeur actuelle de v_0^2,

$$v = 2a\cos\frac{1}{2}u\frac{du}{dt} = \pm 2\sqrt{ag}\sin\left(\varphi - \frac{1}{2}u\right).$$

On met le signe + ou — selon que le mobile est au-dessus ou au-dessous du point d'arrêt. Prenons la première hypothèse;

$$dt\sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{\cos\frac{1}{2}u\,du}{\sin(\varphi - \frac{1}{2}u)} = \frac{\cos[\varphi - (\varphi - \frac{1}{2}u)]}{\sin(\varphi - \frac{1}{2}u)}du.$$

Développant et intégrant,

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = 2\cos\varphi\,\mathrm{L}\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \frac{1}{2}u)} + u\sin\varphi.$$

Il faudra un temps infini pour arriver au point d'arrêt.

Le cas de $f = 0$ se déduit aisément de nos formules ou se traite directement.

140. *Mouvement d'un point pesant sur une hélice dépolie, tracée sur un cylindre droit vertical, de rayon* R; *la tangente à l'hélice fait l'angle α avec l'horizon.*

Nous ne connaissons pas la direction de la réaction normale N de la courbe; nous savons seulement qu'elle est dans le plan normal, et nous désignerons par β l'angle qu'elle fait avec la normale principale; celle-ci n'est autre, on le sait, que la normale au cylindre. Supposons la masse du mobile M égale à l'unité, son point de départ sur l'axe des x, et sa vitesse initiale v_0 dirigée vers le bas; les arcs descendants seront comptés comme positifs. Écrivons les

composantes de l'accélération suivant la tangente, la normale principale et la binormale,

$$(1)\quad \frac{d\frac{1}{2}v^2}{ds} = g\sin\alpha - f\mathrm{N},\quad \frac{v^2}{\rho} = \mathrm{N}\cos\beta,\quad g\cos\alpha - \mathrm{N}\sin\beta = 0.$$

Comme $\rho = \frac{\mathrm{R}}{\cos^2\alpha}$, on en tire

$$\tang\beta = \frac{g\mathrm{R}}{v^2\cos\alpha},\quad \mathrm{N}^2 = g^2\cos^2\alpha + \frac{v^4\cos^4\alpha}{\mathrm{R}^2},$$

$$\frac{d\frac{1}{2}v^2}{ds} = g\sin\alpha - f\cos\alpha\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{\mathrm{R}^2}\cos^2\alpha}$$

ou

$$(2)\qquad \frac{d.v^2}{g\mathrm{R}\tang\alpha - f\sqrt{g^2\mathrm{R}^2 + v^4\cos^2\alpha}} = \frac{2ds\cos\alpha}{\mathrm{R}}.$$

Pour intégrer, je pose $\sqrt{g^2\mathrm{R}^2 + v^4\cos^2\alpha} = g\mathrm{R} + uv^2\cos\alpha$, et j'obtiens

$$v^2 = \frac{2g\mathrm{R}u}{(1-u^2)\cos\alpha},$$

$$(3)\qquad \frac{2ds\cos^2\alpha}{\mathrm{R}} = \frac{2(1+u^2)du}{(1-u^2)[\tang\alpha - f - (\tang\alpha + f)u^2]}.$$

La définition de u montre qu'il est compris entre zéro et 1, et l'expression de v^2 en fonction de u prouve que ces deux variables augmentent ou diminuent ensemble. Lorsque f est $>\tang\alpha$, l'équation (3) montre que du est toujours négatif, ds étant >0; u diminue depuis sa valeur initiale u_0, déterminée par v_0, jusqu'à zéro; alors v est aussi nul et M s'arrête. Au contraire, si $\tang\alpha > f$, le mobile ne s'arrête plus. Soit $h = \sqrt{\frac{\tang\alpha - f}{\tang\alpha + f}}$, la valeur de v^2 correspondante à $u = h$ sera

$$k^2 = \frac{g\mathrm{R}}{f\cos\alpha}\sqrt{\tang^2\alpha - f^2}.$$

Lorsque u_0 sera $< h$, du sera d'abord > 0; u augmentera jusqu'à h, et la forme de la différentielle prouve qu'il n'atteindra cette limite que pour $s = \infty$; si $u_0 > h$, u diminue jusqu'à h, qu'il atteint seulement à l'infini. Enfin, si $u_0 = h$, le mouvement sera uniforme avec la vitesse constante k.

On peut trouver la valeur de u en fonction de s : il faut, dans l'équation (3), remplacer le coefficient de du par deux fractions simples relativement à u^2 :

$$\frac{2f\,ds\cos^2\alpha}{\mathrm{R}} = \frac{2\tang\alpha\,du}{\tang\alpha - f - (\tang\alpha + f)u^2} - \frac{2\,du}{1-u^2}.$$

Dans le cas où f est $> \tang\alpha$, on a pour intégrale

$$\frac{2fs\cos^2\alpha}{\mathrm{R}} = \mathrm{L}\frac{(1+u_0)(1-u)}{(1-u_0)(1+u)} + \frac{2\tang\alpha}{\sqrt{f^2-\tang^2\alpha}}\arctang\frac{(u_0-u)\sqrt{f^2-\tang^2\alpha}}{f-\tang\alpha+(f+\tang\alpha)uu_0}.$$

Pour avoir l'arc parcouru jusqu'à ce que le mobile s'arrête, il suffit de faire dans cette formule $u = 0$. Lorsque f est $< \tang\alpha$, l'intégrale ne renferme que des logarithmes; elle est compliquée et ne pourra conduire à la valeur explicite de s en fonction de t; mais on peut prouver que la courbe qui représente la loi des espaces en fonction du temps a une asymptote : ce sera un nouveau cas où l'équation différentielle d'une courbe ou d'un mouvement peut suffire pour en étudier les propriétés. Prenons égales les longueurs qui représentent l'unité d'espace et de temps. Puisque, pour $s = \infty$, $\lim\frac{ds}{dt} = k$, k sera le coefficient angulaire de l'asymptote; l'ordonnée à l'origine sera

$$\delta = \lim(s - kt) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{k}{v}\right)ds = \int_{v_0}^{k}(v-k)\frac{ds}{d\frac{1}{2}v^2}\,dv;$$

mais l'équation (2) peut s'écrire, en nous rappelant la

valeur de k^2,

$$\frac{ds}{d\frac{1}{2}v^2} = \frac{R}{\cos\alpha}\,\frac{gR\tang\alpha + f\sqrt{g^2R^2 + v^4\cos^2\alpha}}{f^2\cos^2\alpha\left(k^4 - v^4\right)};$$

d'où

$$\delta = -\int_{v_0}^{k}\left(gR\tang\alpha + f\sqrt{g^2R^2 + v^4\cos^2\alpha}\right)$$
$$\times\frac{R\,dv}{f^2\cos^3\alpha\left(k^3 + k^2v + kv^2 + v^3\right)}.$$

Il est donc fini et déterminé.

L'hypothèse de $f = \tang\alpha$ ne donne pas beaucoup de simplification; on trouve que v diminue toujours jusqu'à zéro, valeur qu'il n'atteint qu'avec s infini.

Le mouvement ascendant se traiterait absolument de la même façon : on compterait les arcs montants comme positifs et l'on n'aurait qu'à changer g en $-g$; il y a toujours arrêt; et il n'est pas moins évident que le mouvement ascendant et le mouvement descendant ne peuvent pas être compris dans une même formule.

Détermination de la courbe par les propriétés données du mouvement.

On peut demander sur quelle courbe un point, sollicité par des forces connues, doit être assujetti à rester pour que son mouvement satisfasse à des conditions données. Il faut donner deux conditions relatives à la courbe ou au mouvement; car on aura ainsi deux relations qui, avec les trois équations du mouvement et la condition de perpendicularité de la tangente à la courbe et de sa réaction, permettent de trouver en fonction du temps les coordonnées du mobile et les composantes de la réaction. En général, on écrira les équations du mouvement comme nous l'avons fait dans le

cas précédent, et l'élimination de la réaction et du temps fera connaître la courbe.

141. *Déterminer dans un plan vertical une courbe telle qu'un point pesant, assujetti à la suivre, exerce une pression dont le rapport avec la composante normale du poids soit une constante* λ; *cas où l'on peut intégrer jusqu'à la fin.* (Licence, 1865, 1871.)

Je prends pour origine le point de départ, l'axe des x étant horizontal, l'axe des y dans le sens de la pesanteur; je désigne par $\sqrt{2gh}$ la vitesse initiale et par N la réaction de la courbe, comptée comme positive quand elle agit dans le sens du rayon de courbure. Si la masse du mobile est égale à l'unité, on a

$$v^2 = 2g(h+y), \quad \frac{v^2}{\rho} = \mathrm{N} \pm g\frac{dx}{ds}.$$

On mettra le signe + ou le signe — selon que la courbe tournera sa convexité vers le haut ou vers le bas : dans le premier cas, la pression exercée sur la courbe, égale à $\lambda g\frac{dx}{ds}$, sera dirigée vers le centre de courbure, en sorte que N devra être représenté par $-\lambda g\frac{dx}{ds}$; dans le second cas, la pression, étant encore vers le bas, sera opposée au centre de courbure, et N, dans le sens de ce rayon, sera $\lambda g\frac{dx}{ds}$; donc

$$\frac{v^2}{\rho} = \mp(\lambda - 1)g\frac{dx}{ds}.$$

Remplaçons v^2 par sa valeur tirée de l'équation des forces vives, et $\lambda - 1$ par n,

$$2g(h+y) = \mp ng\rho\frac{dx}{ds};$$

mais, en faisant $\frac{dy}{dx} = p$ et supposant d'abord dx de même signe que ds, j'ai

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \rho = \pm (1+p^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{p\,dp}.$$

L'équation de la courbe est donc, en divisant par g,

$$2(h+y) = \frac{-n\,dy}{p\,dp}(1+p^2).$$

Intégrant et désignant par c la constante $h(1+p_0^2)^{\frac{1}{n}}$,

$$(1) \qquad (1+p^2)(h+y)^n = c^n, \quad dx = \pm \frac{(h+y)^{\frac{n}{2}} dy}{\sqrt{c^n - (h+y)^n}}.$$

On ne sait intégrer cette différentielle binôme que lorsque $\frac{n+2}{2n}$ ou $\frac{n+2}{2n} - \frac{1}{2}$ sera entier; ces deux cas sont compris dans la formule $n = \frac{2}{\mu}$, μ étant entier. Voyons quelques valeurs simples de μ.

Soit $\mu = -2$: alors $n = -1$, $\lambda = 0$; l'équation (1) devient

$$dx = \pm \frac{dy\sqrt{c}}{\sqrt{h+y-c}}, \quad 4c(h+y-c) = [x - 2\sqrt{c(h-c)}]^2.$$

C'est une parabole à axe vertical que le mobile suivra librement, en sorte que la courbe, ne réagissant pas, n'éprouvera aucune pression.

Soient $\mu = -1$, $n = -2$, $\lambda = -1$; la pression sur la courbe est égale et opposée à la composante normale du poids; l'équation (1) devient

$$dx = \pm \frac{c\,dy}{\sqrt{(y+h)^2 - c^2}}, \quad x = \pm c\,\mathrm{L}\,\frac{y+h+\sqrt{(y+h)^2-c^2}}{h+\sqrt{h^2-c^2}}.$$

C'est une chaînette, car on déduit de l'équation précédente

$$y+h=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{c}}+e^{\frac{x_0-x}{c}}\right),\quad x_0=\mp c\,\mathrm{L}\frac{c}{h+\sqrt{h^2-c^2}}.$$

La loi du mouvement sur la chaînette se déduit de l'équation des forces vives; on a

$$2g(h+y)=v^2=\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=\frac{(y+h)^2}{(y+h)^2-c^2}\frac{dy^2}{dt^2},$$

$$dt\sqrt{2g}=\frac{dy\sqrt{y+h}}{\sqrt{(y+h)^2-c^2}}.$$

On sera conduit à une intégrale elliptique de deuxième espèce; mais on voit que y grandit indéfiniment avec t.

Soient $\mu=1$, $n=2$, $\lambda=3$; la pression est triple de la composante normale du poids; l'équation (1) nous donne

$$dx=\frac{\pm(h+y)dy}{\sqrt{c^2-(h+y)^2}},\quad (x-c)^2+(y+h)^2=c^2.$$

C'est un cercle dont le mobile parcourt la moitié inférieure.

Soient $\mu=2$, $n=1$, $\lambda=2$; la pression double de la composante du poids

$$dx=dy\sqrt{\frac{h+y}{c-h-y}}.$$

La courbe est une cycloïde tournant sa convexité vers le bas; la base est sur l'horizontale $y=-h$, et le diamètre du cercle générateur est c; quant au mouvement sur la cycloïde, il est bien connu. Dans toutes les courbes brachistochrones, la pression est double de la composante normale des forces extérieures lorsque l'intégrale des forces vives existe.

Enfin, si l'on fait μ infini, on a

$$n=0,\quad \lambda=1;$$

le mobile doit rester sur une droite, et son mouvement est uniformément varié.

142. *Déterminer dans un plan vertical une courbe telle qu'un point pesant, obligé de la suivre et ayant primitivement une vitesse horizontale* $\sqrt{2gh}$, *exerce une pression constante. En déduire la courbe sur laquelle il faut faire enrouler le fil qui soutient un pendule simple restant dans un plan vertical pour que la tension soit constante.*

(Agrégation, 1841.)

Je prends pour axe des x l'horizontale du point de départ O, pour axe des y la verticale montante. Je désigne par α l'angle de la tangente avec l'axe des x, et par ng la réaction normale, comptée positivement quand elle sera dirigée vers le centre de courbure; enfin je fais la masse du mobile égale à l'unité. Le théorème des forces vives et l'expression de l'accélération centripète nous donnent

$$(1) \qquad v^2 = 2g(h-y), \quad \frac{v^2}{\rho} = ng \pm g\cos\alpha.$$

Supposons que la trajectoire doive d'abord être concave vers le haut, il faudra prendre le signe $-$; en effet, tant que $\cos\alpha$ est > 0 et que la courbure ne change pas de sens, la composante normale de la pesanteur est en sens contraire du rayon de courbure; elle devient de même sens que lui quand $\cos\alpha < 0$; mais cela fait précisément que, dans l'accélération centripète, elle donne toujours $-g\cos\alpha$. On conclut des équations (1)

$$n - \cos\alpha = 2\frac{h-y}{\rho} = 2(h-y)\frac{\sin\alpha\, d\alpha}{dy}.$$

Il est évident que n est > 1; les variables se séparent, et l'on a, en intégrant,

$$(h-y)(n-\cos\alpha)^2 = h(n-1)^2, \quad y = h - \left(\frac{n-1}{n-\cos\alpha}\right)^2 h;$$

d'où

$$dy = 2(n-1)^2 h \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{(n-\cos\alpha)^3}, \quad dx = 2(n-1)^2 h \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{(n-\cos\alpha)^3}.$$

On peut intégrer la valeur de dx en prenant pour variable $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha$; mais, sans effectuer ce long calcul, on peut se rendre compte de la forme de la courbe. Quand α varie de zéro à $\frac{\pi}{2}$, x et y augmentent régulièrement; pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la tangente est verticale; ensuite y continue à croître, mais x décroît jusqu'à ce que α soit égal à π; au point correspondant A, la tangente est horizontale,

$$y = h\left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right],$$

x a une certaine valeur a; puis, α continuant à croître, la trajectoire est l'arc symétrique de l'arc OA par rapport à la verticale de A, et le mobile revient toucher l'axe des x à une distance $2a$ de l'origine; puis tout se reproduit comme d'abord. Sans calculer la valeur générale de x, il est aisé d'avoir a. On a, en effet,

$$a = 2(n-1)^2 h \int_0^\pi \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{(n-\cos\alpha)^3}.$$

Or

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{n-\cos\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Différentions par rapport à n,

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{(n-\cos\alpha)^2} = n\pi(n^2-1)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\left(1-\frac{\cos\alpha}{n}\right)^2} = \pi\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{3}{2}};$$

différentions par rapport à $\frac{1}{n}$, puis divisons tout par n^3,

$$\int_0^\pi \frac{2\cos\alpha\, d\alpha}{(n-\cos\alpha)^3} = 3n\pi(n^2-1)^{-\frac{5}{2}}, \quad a = \frac{3n\pi h}{(n+1)^2\sqrt{n^2-1}}.$$

La courbe sur laquelle on doit faire enrouler le fil d'un pendule pour que la tension soit constante n'est autre que la développée de la précédente. Soient x_1, y_1 les coordonnées du point correspondant au point x, y; on a

$$y_1 = y + \rho\cos\alpha = y + 2\frac{h-y}{n-\cos\alpha}\cos\alpha$$
$$= h\left[1 + \frac{3\cos\alpha - n}{(n-\cos\alpha)^3}(n-1)^2\right],$$

d'où

$$dy_1 = -6(n-1)^2 h\frac{\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha}{(n-\cos\alpha)^4}, \quad dx_1 = 6h(n-1)^2\frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{(n-\cos\alpha)^4}.$$

On a d'abord un point O_1, correspondant à O, où la tangente est verticale; puis y_1 diminue jusqu'à $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pour augmenter quand α varie de $\frac{\pi}{2}$ à π; quant à x_1, il croît toujours; il y a un point de rebroussement A_1, correspondant à A, avec tangente verticale; puis la courbe forme une suite indéfinie de festons égaux. Il est clair que l'arc O_1A_1 peut seul servir à l'enroulement du fil pendulaire.

Supposons qu'au point O la courbe doive passer au-dessous de sa tangente, c'est-à-dire que α diminue à partir de zéro; on devra prendre

$$\frac{v^2}{\rho} = ng + g\cos\alpha \quad \text{et} \quad \rho = -\frac{dy}{\sin\alpha\, dx}.$$

Des calculs analogues à ceux du premier cas nous donnent

$$n + \cos\alpha = 2(y-h)\sin\alpha\frac{d\alpha}{dy}, \quad y = h - h\left(\frac{n+1}{n+\cos\alpha}\right)^2.$$

La constante n est seulement assujettie à être > -1. Si on la prend > 1, y reste fini, on a la même courbe que dans le premier cas; toutefois l'origine en est le point le plus haut, au lieu d'être le point le plus bas. Lorsque n est compris entre 1 et -1, on peut le représenter par $-\cos\beta$, et si β est l'angle compris entre zéro et $-\pi$, dont le cosinus soit $-n$, on voit que, pour $\alpha = \beta$, y et aussi x sont infinis; la direction asymptotique fait l'angle β avec l'horizontale, mais l'asymptote est rejetée à l'infini; en effet son ordonnée à l'origine est

$$\lim(y - x\tang\beta) = \int_0^\beta \left(1 - \frac{\tang\beta}{\tang\alpha}\right)\frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha$$

$$= \frac{(n+1)^2 h}{2n}\int_0^\beta \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\,d\alpha}{\sin^2\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\sin^2\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}.$$

Comme la quantité sous le signe $\int$, multipliée par $(\beta-\alpha)^2$, reste finie pour $\alpha = \beta$, l'intégrale est infinie.

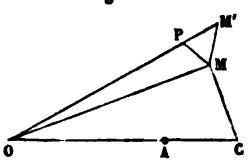
Pour $n = 0$, on a

$$x^2 = -4hy;$$

pour $n = 1$, on trouve l'axe des x.

143. *Trouver une courbe plane telle qu'un point obligé de la suivre, et partant d'un point donné* O (*fig.* 22) *de*

Fig. 22.



cette courbe, sous l'action d'un point A *qui l'attire proportionnellement à la distance, arrive en un point quelconque* M *de la courbe dans le même temps que s'il s'était mû sur la droite* AM. (Ossian Bonnet.)

Soient M, M′ deux points de la courbe infiniment voisins; le mobile doit parcourir les arcs OM, OM′ dans le même temps que les cordes OM, OM′. Soit P le point où arrive le mobile qui suit la corde OM′ à l'instant où celui qui suit la courbe passe en M, tous deux étant partis ensemble de O; nos deux mobiles doivent parcourir dans le même temps, l'un la droite PM′, l'autre l'arc MM′. Comme le théorème des forces vives a lieu, les vitesses en P et en M diffèrent infiniment peu; il faut donc $PM' = \text{arc}MM'$; le triangle PM′M est isoscèle et $M' = \pi - 2M'PM$.

D'autre part, il est aisé de démontrer que, si l'on considère des mobiles, partant ensemble du point O, attirés vers le point A et suivant des droites issues de O, le lieu de leurs positions simultanées ou courbe synchrone est un cercle dont le diamètre OC est dirigé suivant OA; les points O, P, M, C sont donc sur un cercle, $M'PM = OCM = \frac{\pi}{2} - \theta$ en prenant OA pour axe polaire; il en résulte

$$M' = 2\theta, \quad \frac{rd\theta}{dr} = \text{tang}\, 2\theta, \quad r^2 = c^2 \sin 2\theta.$$

La courbe demandée est une lemniscate de Bernoulli, angente à OA, et dont le paramètre est quelconque.

144. Des tautochrones. — *Trouver sur une surface donnée une courbe sur laquelle un point, sollicité par des forces connues, doit se mouvoir pour qu'il arrive en un point* A *de cette courbe dans un temps constant, quel que soit le point d'où il part sans vitesse initiale.*

Le mouvement d'un point sur une courbe est déterminé par la composante tangentielle de la force motrice, comme le mouvement sur une droite l'est par la force agissant suivant cette droite. La recherche des tautochrones se ramène à celle de la force qui doit agir sur un point assujetti à rester

sur une droite pour qu'il arrive à un point donné A de la droite dans un temps constant. On a trouvé que, s'il n'y a pas de résistance de milieu, la force doit être une attraction proportionnelle à la distance MA; donc, sur une tautochrone, la force tangentielle en un point quelconque M est proportionnelle à l'arc AM. On a une équation différentielle qui, avec la connaissance de la surface sur laquelle doit se trouver la tautochrone, suffit à la déterminer. Le point A est une position d'équilibre; autrement il ne faudrait qu'un temps très-court pour y arriver en partant d'une position infiniment voisine.

Cherchons dans un plan la tautochrone pour un mobile attiré vers un point O du plan par une force inversement proportionnelle au carré de la distance. Je prends O pour pôle, OA pour axe polaire; le cosinus de l'angle que la force dirigée suivant le rayon vecteur fait avec la tangente à la courbe est $-\frac{dr}{ds}$; on a donc, pour l'équation de la tautochrone,

$$-\frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{ds} = -ns, \quad ns^2 = 2\mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) = \frac{2\mu(r-a)}{ra},$$

$$ds = \sqrt{\frac{2\mu}{na}\,\frac{r}{r-a}}\,\frac{a\,dr}{2r^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

$$d\theta^2 = \frac{\mu a - 2nr^3(r-a)}{2nr^5(r-a)}\,dr^2;$$

r doit rester compris entre a et une valeur $r' > a$; pour $r = a$, la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur; pour $r = r'$, elle se confond avec lui et il y a rebroussement, en sorte que la courbe ressemble à une hypocycloïde. Le temps que le mobile met pour arriver en A est $\frac{\pi}{2}\sqrt{n}$.

Nous avons trouvé que, lorsqu'un mobile se meut en ligne droite dans un milieu dont la résistance est kv^2, pour qu'il arrive au point A de cette droite dans un temps con-

stant, il doit être attiré vers le point A par une force qui, à la distance s, est

$$F = \frac{1}{\lambda^2 k}(e^{ks} - 1),$$

le temps de la chute étant $\frac{\pi}{2}\lambda$. Donc, pour qu'un point assujetti à se mouvoir sur une courbe dans un milieu résistant arrive en un point A de cette courbe dans un temps constant, il faut que la composante tangentielle de la force extérieure ait une valeur telle que F. Supposons le mobile sollicité simplement par la pesanteur et la courbe dans un plan vertical; prenons pour axe des x la tangente au point le plus bas, pour axe des y la verticale ascendante; nous aurons en chaque point de la tautochrone

$$g\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\lambda^2 k}(e^{ks} - 1), \quad y = \frac{1}{g\lambda^2 k^2}(e^{ks} - ks - 1).$$

Comme $\frac{dy}{ds}$ doit être compris entre -1 et $+1$, s a des limites; il faut

$$e^{ks} < 1 + gk\lambda^2,$$

ce qui donne, du côté des x positifs, un point d'arrêt à tangente verticale. Si l'on donne à s des valeurs négatives, on pourra aller jusqu'à $-\infty$ quand $\lambda^2 gk > 1$; il y aura une branche infinie au-dessus de OX avec des abscisses négatives. Si, au contraire, $\lambda^2 gk < 1$, s ne pourra aller à $-\infty$, et l'on aura un second point d'arrêt. Quant au mouvement sur ces courbes, il est donné par l'équation du travail

$$d\frac{1}{2}v^2 = -ds\left[\frac{1}{\lambda^2 k}(e^{ks} - 1) - kv^2\right],$$

$$v^2 = \frac{e^{2ks}}{k^2\lambda^2}[(1 - e^{-k\alpha})^2 - (1 - e^{-ks})^2] = \frac{ds^2}{dt^2},$$

α étant la valeur initiale de s. Une nouvelle intégration

donne

$$1 - e^{-ks} = (1 - e^{-ka}) \cos \frac{t}{\lambda}.$$

Le mobile descend pendant un temps égal à $\frac{\pi}{2}\lambda$ et remonte pendant un temps égal, et l'arc négatif s_1 qu'il décrit est donné par l'équation où l'on fait $t = \pi\lambda$. Pour le mouvement ultérieur, il faut changer le signe de kv^2 dans l'équation du travail, et la courbe n'est pas tautochrone du côté des arcs négatifs.

145. Cas particulier de la brachistochrone. — *La brachistochrone est la courbe que doit suivre un point sollicité par des forces connues pour arriver d'un point à un autre dans un temps minimum.*

On peut éviter l'emploi du calcul des variations quand la courbe cherchée doit être dans un plan avec la force extérieure et qu'il existe une fonction des forces, c'est-à-dire une fonction $\varphi(x, y)$, telle que les composantes de la force soient

$$X = \frac{d\varphi}{dx}, \quad Y = \frac{d\varphi}{dy}.$$

Le théorème des forces vives donne, dans ce cas,

$$v^2 = 2\varphi,$$

en supposant la constante des forces vives contenue dans cette fonction φ; de plus, la force qui sollicite un corps placé aux différents points d'une courbe $\varphi = \text{const.}$ est normale à cette courbe, dite *courbe de niveau.*

Nous résoudrons d'abord un problème d'Analyse. Étant donnés deux points A et B qui se trouvent dans deux régions du plan séparées par la courbe C, quel chemin doit suivre un mobile pour aller de A en B dans un temps minimum, sachant que, dans la région où se trouve A, le

mobile aura la vitesse v, dans l'autre région la vitesse v'? Soient x_1, y_1, x_2, y_2 les coordonnées de A et B, x, y celles du point M où la ligne parcourue rencontre C; il suffit d'égaler à zéro la différentielle du temps nécessaire à parcourir le chemin AMB, ce qui donne

$$\frac{1}{v}\,\frac{(x-x_1)\,dx+(y-y_1)\,dy}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}=\frac{1}{v'}\,\frac{(x_2-x)\,dx+(y_2-y)\,dy}{\sqrt{(x-x_2)+(y-y_2)^2}}.$$

Cela exprime que les cosinus des angles que la tangente à C au point M fait avec AM et avec MB sont proportionnels aux vitesses dans les deux régions; or ces cosinus sont les sinus de ce qu'on appelle les *angles d'incidence* et *de transmission*.

Cela posé, imaginons une série de courbes de niveau très-rapprochées, et cherchons à déterminer une ligne polygonale joignant deux points donnés P et Q, ayant un sommet sur chaque courbe de niveau qu'elle traverse, et telle que ce soit la ligne brisée qu'il faut suivre pour aller de P en Q dans un temps minimum; on admet que chaque côté soit parcouru avec la vitesse qu'un mobile, partant de P sans vitesse initiale et soumis aux forces données, aurait sur la surface de niveau où se termine le côté considéré. Soient M un sommet du polygone situé sur une courbe C, A et B deux points infiniment voisins de part et d'autre de M, i et $i+di$ les angles de AM et MB avec la normale en M, v et $v+dv$ les vitesses avec lesquelles AM et MB sont parcourus. On doit avoir

$$\frac{\sin i}{v}=\frac{\sin(i+di)}{v+dv}=\frac{\cos i\,di}{dv}.$$

Si maintenant nous supposons que les courbes de niveau soient infiniment rapprochées, le polygone deviendra une courbe; la loi suivant laquelle le mobile la parcourra ne sera autre que celle qui résulte de l'action des forces don-

nées, et nous aurons la brachistochrone. Or l'équation de condition donne

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\cos i\, di}{dv}, \quad \frac{dv}{dt}\frac{\sin i}{v^2} = \frac{\cos i\, di}{v\, dt};$$

mais, la force motrice F étant normale à la courbe de niveau, i est l'angle de F avec la brachistochrone; alors $\frac{dv}{dt}$ est $\frac{F}{m}\cos i$; d'ailleurs $v\,dt$ est l'arc de courbe et di l'angle de contingence; la condition devient

$$F \sin i = m\frac{v^2}{\rho}.$$

La force centripète est égale à la projection de la force extérieure sur la normale; mais il suffit de faire la figure pour voir que c'est sur la normale portée en sens contraire du rayon de courbure; autrement dit, la pression exercée sur la brachistochrone est double de la composante normale de la force F. Cette propriété caractéristique donne, dans tous les cas, la courbe cherchée.

Dans le cas où les courbes de niveau seraient des droites parallèles, comme $i + di$ serait l'angle d'incidence pour la courbe qui suit celle que nous avons considérée, on peut dire que $\frac{\sin i}{v}$ est constant, ce qui donne une équation différentielle du premier ordre, tandis que la propriété précédente donnait une équation du second ordre. Pour un point pesant, on a, en prenant au point de départ $y = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{c}, \quad y = \frac{gs^2}{2c^2},$$

ce qui caractérise une cycloïde où la tangente au point de départ est verticale.

Soit à déterminer la brachistochrone pour un point attiré vers un centre fixe O par une force inversement proportionnelle au carré de la distance. Désignons par a la distance initiale et par $\frac{\mu}{r^2}$ l'attraction à la distance r; le carré de la vitesse sera généralement $2\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)$; nous aurons donc

$$\frac{\mu}{r^2}\sin i = 2\mu\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{\rho}.$$

Si la distance du pôle à la tangente est p, on aura

$$\sin i = \frac{p}{r}, \quad \rho = -\frac{r\,dr}{dp}; \quad \text{d'où} \quad -\frac{p}{r^3} = 2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)\frac{dp}{r\,dr};$$

donc, c étant une constante,

$$-2\frac{dp}{p} = \frac{a\,dr}{r(a-r)} = dr\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a-r}\right), \quad p^2 = c^2\frac{a-r}{r}.$$

Au point de départ $p = 0$, la courbe touche le rayon vecteur; d'ailleurs

$$\frac{p^2}{r^2} = \frac{r^2 d\theta^2}{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{c^2(a-r)}{r^3}, \quad d\theta^2 = \frac{c^2(a-r)\,dr^2}{r^2\left[r^3 - c^2(a-r)\right]}.$$

La courbe présente encore des festons analogues à ceux d'une hypocycloïde, mais elle est d'ordre plus transcendant. Les constantes se déterminent à l'aide des deux points extrêmes qui sont donnés.

(*Pour les Exercices, voir le Chapitre suivant.*)

MOUVEMENT SUR UNE SURFACE FIXE.

146. Un point assujetti à rester sur une surface peut être traité comme un point libre, à condition d'ajouter aux forces extérieures la réaction de la surface; cette réaction est normale quand la surface est polie; s'il y a frottement, elle est dans le plan qui passe par la normale et la tangente à la trajectoire, et fait avec la normale un angle égal à l'angle de frottement. Supposons la surface polie et les coordonnées rectangulaires; on aura des équations de la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \frac{N}{\Delta}\frac{df}{dx}, \ldots, \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

Quand N sera positif, c'est que l'action de la surface sera dirigée vers la région extérieure à la surface, celle pour laquelle $f(x, y, z) > 0$.

Les trois équations du mouvement, jointes à $f = 0$, font connaître x, y, z, N en fonction du temps. Il sera bon de chercher si l'on peut appliquer quelques-uns des théorèmes généraux, comme celui des forces vives ou des aires; enfin, dans certains cas, on définira la position du mobile sur la surface par deux coordonnées curvilignes, en fonction desquelles on transformera les équations du mouvement.

La force centripète est la résultante de la réaction normale et de la projection des forces extérieures sur le plan normal à la trajectoire; autrement dit, la pression suppor-

tée par la surface est la résultante de cette projection et de la force centrifuge : elle est égale à la projection des forces extérieures sur la normale à la surface, augmentée de $m\frac{v^2}{\rho}\cos\theta$, θ étant l'angle de la normale avec le plan osculateur. Cette dernière projection est, d'après le théorème de Meunier, égale au quotient de la force vive par le rayon de courbure de la section normale à la surface qui passe par la vitesse. La pression N ne dépend donc pas directement de la position du plan osculateur.

147. *Mouvement d'un point pesant obligé de rester sur un cylindre droit vertical et attiré vers un centre* A *par une force proportionnelle à la distance.* (Licence, 1874.)

Je prends pour axe des z l'axe du cylindre et pour axe des x une horizontale passant par A; on a pour l'équation de la surface

$$x^2+y^2=R^2, \quad x\,dx+y\,dy=0.$$

Faisons la masse du mobile M égale à l'unité, $OA=a$, et appelons μ^2 l'attraction à l'unité de distance; les équations générales du mouvement nous donnent

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=-\mu^2(x-a)+N\dfrac{x}{R}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\mu^2y+\dfrac{Ny}{R}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=-g-\mu^2z, \end{cases}$$

Ajoutons les deux premières multipliées respectivement par $2dx$, $2dy$,

$$2dx\frac{d^2x}{dt^2}+2dy\frac{d^2y}{dt^2}=2\mu^2a\,dx, \quad \frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=2\mu^2ax+C.$$

Posons $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, et désignons par ω et α les valeurs initiales de $\frac{d\theta}{dt}$ et de θ; cette intégrale peut s'écrire

$$(2) \qquad R\frac{d\theta^2}{dt^2} = R\omega^2 + 2\mu^2 a(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Quant à la troisième équation (1), elle s'intègre séparément :

$$(3) \qquad z = \left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)\cos\mu t + \frac{1}{\mu}\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 \sin\mu t - \frac{g}{\mu^2}.$$

La projection de M sur l'axe des z fait des oscillations dont la durée est $\frac{2\pi}{\mu}$ au-dessus et au-dessous du point dont l'ordonnée est $-\frac{g}{\mu^2}$. L'équation (2) prouve que le rayon vecteur de la projection de M se meut par rapport à OA, comme la tige d'un pendule de longueur $\frac{gR}{\mu^2 a}$ par rapport à la verticale; le mouvement sera alternatif ou continu selon que

$$R\omega^2 - 2\mu^2 a(1 + \cos\alpha) \lessgtr 0.$$

Dans le second cas, le temps d'une révolution est

$$\int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{R}(2\mu^2 a\cos\theta + R\omega^2 - 2\mu^2 a\cos\alpha)^{-\frac{1}{2}};$$

s'il est commensurable avec $\frac{2\pi}{\mu}$, la trajectoire sera fermée; mais elle ne peut être plane, car ce serait une ellipse, et θ devenant une fonction connue de z s'exprimerait comme lui par des fonctions élémentaires de t; or c'est incompatible avec la forme de l'équation (2) qui exige une intégrale elliptique.

Quand $a = 0$, on peut appliquer le théorème des aires

sur le plan xy; d'ailleurs l'équation (3) donne

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \theta = \omega t,$$

et, en prenant pour origine du temps une époque où $dz = 0$, (3) devient

$$z = \left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)\cos\mu t - \frac{g}{\mu^2};$$

si $\mu = \omega$, la trajectoire est plane.

Pour calculer N, j'ajoute les deux premières équations (1) multipliées respectivement par x et y, et, comme

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

je tire

$$RN = x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \mu^2(R^2 - ax);$$

mais

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0, \quad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 0;$$

donc

$$\begin{aligned} RN &= -\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) + \mu^2(R^2 - ax) \\ &= -R^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + \mu^2(R^2 - aR\cos\theta). \end{aligned}$$

Remplaçant $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ par sa valeur (2) :

$$N = \mu^2(R + 2a\cos\alpha - 3a\cos\theta) - R\omega^2.$$

Cette force diminue avec $\cos\theta$; il suffit de donner à cette variable ses valeurs extrêmes pour reconnaître si N peut s'annuler.

148. *Mouvement d'un point assujetti à rester sur un cône droit et attiré vers l'axe par une force qui lui est*

perpendiculaire et proportionnelle à la distance du mobile à l'axe. Cas où la vitesse initiale est perpendiculaire à l'axe et le demi-angle du cône égal à 30 *degrés.* (Licence, 1869.)

Il est facile de résoudre ce problème à l'aide des équations du mouvement sur une surface; mais on y arrive plus rapidement par une considération souvent utile dans les questions sur le cône. Définissons la position d'un point M sur le cône par sa distance r au sommet, et par l'angle ω que la génératrice sur laquelle il se trouve ferait avec une génératrice fixe si l'on développait la surface sur un plan. Soient ψ l'angle des plans méridiens passant par les deux génératrices considérées, θ le demi-angle au sommet du cône; la distance de M à l'axe est $r\sin\theta$, et l'on a

$$\omega = \psi \sin\theta.$$

Le mobile n'étant sollicité que par la réaction N de la surface et l'attraction de l'axe $\mu^2 r \sin\theta$, qui toutes deux rencontrent l'axe du cône, le théorème des aires a lieu pour la projection sur un plan perpendiculaire

$$r^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = r^2 \sin\theta \frac{d\omega}{dt} = C.$$

L'équation des forces vives est intégrable, et donne, la masse de M étant 1,

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2} = v_0^2 + \mu^2(r_0^2 - r^2)\sin^2\theta.$$

Les deux équations entre r et ω sont celles du mouvement d'un point attiré vers un centre O par une force $\mu^2 r \sin^2\theta$, r et ω étant les coordonnées polaires; on sait qu'un pareil point décrit une ellipse dont O est le centre. Si donc on développe le cône sur un plan, la trajectoire du mobile proposé aura précisément pour transformée cette ellipse, ce

qui en définit la nature dans l'espace; le mouvement du point sur la trajectoire est tel que l'aire décrite par les rayons correspondants de la transformée croisse proportionnellement au temps. On détermine l'ellipse, puisqu'on en connaît un diamètre OM_0, la tangente à son extrémité qui fait avec OM_0 l'angle de v_0 avec r_0; enfin v_0 est égal au produit de $\mu \sin\theta$ et du diamètre conjugué de OM_0; on aura les axes $2a$, $2b$ et leur direction.

La projection de la trajectoire sur un plan normal à l'axe est, ρ étant le rayon vecteur,

$$\frac{\sin^2\theta}{\rho^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2(\psi\sin\theta) + \frac{1}{b^2}\sin^2(\psi\sin\theta);$$

elle est transcendante quand $\sin\theta$ est incommensurable; pour $\theta = 30^\circ$, c'est une courbe du quatrième ordre.

Soient, en un point de la trajectoire, α l'angle de la génératrice avec la tangente, R le rayon de courbure de la section menée par cette tangente et la normale au cône; la pression N est (146) $\frac{v^2}{R}$ diminuée de l'attraction estimée suivant la normale au cône, $\mu^2 r \sin\theta\cos\theta$. La formule d'Euler sur la courbure des surfaces donne

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2\alpha}{r\tang\theta};$$

donc

$$N = \frac{v^2\sin^2\alpha}{r\tang\theta} - \mu^2 r\sin\theta\cos\theta = \frac{C^2\cos\theta}{r^3\sin^3\theta} - \mu^2 r\sin\theta\cos\theta.$$

149. *Étudier le mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde de révolution dont l'axe est vertical et la convexité tournée vers le bas; discussion générale.* (Licence, 1861, 1872.)

Partons cette fois des équations du mouvement sur les

surfaces. On peut écrire l'équation du paraboloïde

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2pz = 0;$$

et, si la masse du mobile M est l'unité, les équations du mouvement deviendront

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{Nx}{\Delta}, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{Ny}{\Delta}, \quad \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g - \dfrac{Np}{\Delta}, \\ \Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + p^2}. \end{cases}$$

Ajoutant les trois premières multipliées respectivement par $2dx$, $2dy$, $2dz$, et tenant compte de l'équation (1), on a l'intégrale des forces vives

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = v_0^2 + 2g(z_0 - z).$$

Si l'on multiplie la première équation (2) par $-y$, la deuxième par x, et qu'on les ajoute, on a

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

C'est l'intégrale des aires appliquée au mouvement de la projection sur le plan XY, et cette équation pouvait être écrite à l'avance, puisque les deux forces qui agissent sur M, la pesanteur et la réaction de la surface, ont un moment nul par rapport à l'axe des z.

La nature de la surface et la forme des intégrales premières conduisent à prendre des coordonnées semi-polaires r, θ et z. Appelons a la valeur initiale de r, et ε l'angle de la vitesse initiale v_0 avec la tangente au parallèle, les intégrales des aires et des forces vives deviennent

$$(3) \quad \frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} = v_0^2 + 2g(z_0 - z), \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = c = av_0\cos\varepsilon;$$

de plus l'équation de la surface donne

$$r^2 = 2pz, \quad r\,dr = p\,dz.$$

Éliminons r et θ entre les équations (3), faisons $v_0^2 = 2gh$, et tenons compte de ce que $a^2 = 2pz_0$, nous trouverons

$$(4) \qquad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{4g}{2z+p}\left[-z^2 + (z_0 + h)z - hz_0 \cos^2\varepsilon\right].$$

z doit rester compris entre deux limites égales à

$$\frac{z_0 + h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(z_0 - h)^2 + 4z_0 h \sin^2\varepsilon}.$$

Pour que ces limites se confondent, il faut la double condition $z_0 = h$, $\varepsilon = 0$; dans ce cas, le mobile parcourra uniformément un parallèle de la surface avec la vitesse $\sqrt{2gz_0}$; comme la longueur du parallèle est $2\pi\sqrt{2pz_0}$, le temps de la révolution sera $2\pi\sqrt{\frac{p}{g}}$; il est le même pour tous les parallèles [1].

---

[1] Sur une surface de révolution quelconque à axe vertical, on peut donner à un mobile pesant une vitesse horizontale v_0, telle qu'il reste sur le parallèle où il est d'abord; il faut et il suffit que la résultante de la force centrifuge et de la pesanteur soit normale à la surface. Soient r le rayon du parallèle, γ l'angle de la normale avec la verticale; la condition est

$$g\cos\gamma = \frac{v_0^2}{r}\sin\gamma;$$

le temps de la révolution sera

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}\tang\gamma}.$$

Pour que ce temps soit le même pour tous les parallèles, il faut que $r\tang\gamma$ soit constant; or, en appelant dr et dz les variations correspondant à un petit arc de méridienne,

$$\tang\gamma = \frac{dr}{dz}, \quad r\,dr = c\,dz;$$

la méridienne est nécessairement parabolique.

Dans le cas général, le mobile monte jusqu'à une certaine hauteur β, puis redescend jusqu'à une hauteur plus faible α pour remonter à la hauteur β pendant un temps égal à celui de la descente; il exécute des oscillations périodiques entre deux parallèles de la surface. Avant d'achever l'étude de ces oscillations, je calculerai la réaction N de la surface. Ajoutons les trois premières équations (2) multipliées respectivement par x, y, $-p$; on en déduit

$$N\Delta = x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} - p\frac{d^2z}{dt^2} - gp;$$

mais, en différentiant deux fois l'équation (1), on trouve

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} - p\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} = \frac{dz^2}{dt^2} - v^2.$$

Le second membre est donné par nos formules précédentes; substituant dans N et réduisant, on trouve

$$N = -\frac{g}{\sqrt{p(2z+p)^3}}\left[p^2 + 2p(h+z_0) + 2hz_0\cos^2\varepsilon\right].$$

Comme elle est toujours négative, il en résulte que le mobile appuie toujours sur le côté concave de la surface.

Revenons à l'étude du mouvement. Nous ne restreignons pas la généralité du problème en prenant pour origine du temps l'époque où z a sa valeur minimum α, le maximum étant $\beta = h = \frac{v_0^2}{2g}$; l'équation (4) donne

$$(5) \qquad dt = \pm\frac{dz}{2}\sqrt{\frac{2z+p}{g(z-\alpha)(\beta-z)}}.$$

On prend le signe $+$ jusqu'à ce que z atteigne β, puis le signe $-$ quand z décroît, et ainsi de suite; le temps d'une demi-oscillation est

$$T = \frac{1}{2\sqrt{g}}\int_\alpha^\beta \frac{dz\sqrt{2z+p}}{\sqrt{(z-\alpha)(\beta-z)}}.$$

Posons $z = \alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u$, nous aurons des intégrales de forme connue

$$dt = \sqrt{\frac{2\beta + p}{g}}\, du \sqrt{1 - \frac{2\beta - 2\alpha}{2\beta + p} \cos^2 u},$$

$$T = \sqrt{\frac{2\beta + p}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \sqrt{1 - \frac{2\beta - 2\alpha}{2\beta + p} \cos^2 u}.$$

Pour avoir la projection de la trajectoire sur XOY, je remplace dans l'équation (5) z par $\frac{r^2}{2p}$, dz par $\frac{r\,dr}{p}$ et dt par $\frac{r^2 d\theta}{c^2} = \frac{r^2 d\theta}{a v_0} = \frac{r^2 d\theta}{\sqrt{2p\alpha}\sqrt{2g\beta}}$; il vient

$$(6) \qquad d\theta = \pm 2 \frac{dr}{r} \frac{\sqrt{\alpha\beta(p^2 + r^2)}}{\sqrt{(r^2 - 2p\alpha)(2p\beta - r^2)}}.$$

Nous avons, u étant la même variable que tout à l'heure,

$$r^2 = 2p(\alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u),$$

$$d\theta = \pm du \sqrt{\frac{\alpha\beta}{p}} \frac{\sqrt{p + 2\alpha \cos^2 u + 2\beta \sin^2 u}}{\alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u};$$

r oscille entre $\sqrt{2p\alpha}$ et $\sqrt{2p\beta}$; l'angle de deux rayons maximum et minimum qui se suivent est supérieur à $\frac{\pi}{2}$, car c'est

$$\sqrt{\frac{\alpha\beta}{p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{p + 2\alpha \cos^2 u + 2\beta \sin^2 u}}{\alpha \cos^2 u + \beta \sin^2 u}\, du$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{1 + \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tang}^2 u} \frac{du}{\cos^2 u} > \frac{\pi}{2}.$$

Nous retrouvons le même théorème que M. Puiseux a démontré, au tome VII du *Journal de Liouville*, sur le pendule sphérique; la différence d'azimut de deux plans de hauteur maximum et minimum est $> \frac{\pi}{2}$; mais la démonstration est compliquée dans le cas du pendule sphérique (¹).

Lorsque β est très-voisin de α, on voit que l'angle des deux rayons vecteurs a pour limite $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{p+2\alpha}{p}}$.

Les petites oscillations s'étudient très-facilement sur le paraboloïde. Je fais $2p\alpha = a^2$, $2p\beta = b^2$ dans l'équation (6); puis, dans l'équation (5), je remplace z par la variable r, et j'introduis les mêmes paramètres a et b; on

---

(¹) Voici, sauf quelques modifications, la démonstration que M. Puiseux donne de cet important théorème. Faisons le rayon de la sphère égal à 1, appelons θ l'angle du pendule avec la verticale, φ l'azimut du pendule, et supposons qu'à l'instant initial on ait $\theta = \alpha$, $\varphi = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$. Les équations des aires et des forces vives donnent

$$\sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = \omega \sin^2\alpha, \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} = \omega^2 \sin^2\alpha + 2g(\cos\theta - \cos\alpha);$$

d'où

$$d\varphi = \frac{\pm \omega \sin^2\alpha \, d\theta}{\sin\theta \sqrt{(\cos\theta - \cos\alpha)[2g\sin^2\theta - \omega^2\sin^2\alpha(\cos\theta + \cos\alpha)]}}.$$

La quantité entre crochets s'annule pour une valeur de θ, β, que je suppose $< \alpha$; on a

$$2g\sin^2\beta = \omega^2\sin^2\alpha(\cos\beta + \cos\alpha), \quad \frac{2g}{\cos\beta + \cos\alpha} = \frac{\omega^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta};$$

d'où

$$d\varphi = \frac{-\sin\alpha \sin\beta \, d\theta}{\sin\theta \sqrt{(\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\beta - \cos\theta)}\sqrt{1 + \cos\alpha\cos\beta + \cos\theta(\cos\alpha + \cos\beta)}}.$$

Comme $\cos\theta$ est $< \cos\beta$, β étant le minimum de θ, si l'on remplace dans le second radical $\cos\theta$ par $\cos\beta$, on diminuera $d\varphi$, et l'on aura une limt

trouve sans peine

$$d\theta = \frac{ab\,dr}{r}\,\frac{\left(1+\frac{r^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(r^2-a^2)(b^2-r^2)}}$$

$$= \frac{ab\,dr}{r\sqrt{(r^2-a^2)(b^2-r^2)}} + \frac{ab}{2p^2}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2-a^2)(b^2-r^2)}} + \ldots;$$

d'où

$$(7)\qquad 2\theta = \arccos\frac{\frac{2}{r^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}} + \frac{ab}{2p^2}\arccos\frac{a^2+b^2-2r^2}{b^2-a^2}.$$

L'équation (5) donne

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{pg}}\,\frac{\sqrt{p^2+r^2}}{\sqrt{(r^2-a^2)(b^2-r^2)}}.$$

Si l'on se borne à la partie principale en négligeant r^2 à

---

de l'angle des plans qui donnent $\theta = \alpha$ ou $\theta = \beta$, savoir :

$$\varphi_1 > \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{(\cos\theta-\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\theta)}}.$$

En posant $\cos\theta = \cos\alpha\cos^2 u + \cos\beta\sin^2 u$, l'intégrale définie devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\,du}{1-(\cos\alpha\cos^2 u+\cos\beta\sin^2 u)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta};$$

d'où

$$\varphi_1 > \frac{\pi\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}} > \pi\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{1+\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha}{1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta}};$$

mais $1+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta$ est visiblement $< 2(1+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$, donc $\varphi_1 > \frac{\pi}{2}$.

côté de p^2, on a

$$t\sqrt{\frac{g}{p}} = \arccos\frac{a^2+b^2-2r^2}{b^2-a^2}.$$

Ainsi qu'il convient dans une méthode d'approximation, on remplacera le deuxième terme du second membre de l'équation (7) par sa partie principale, et l'on aura

$$2\theta - \frac{abt}{2p^2}\sqrt{\frac{g}{p}} = \arccos\frac{\frac{2}{r^2}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}};$$

d'où

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\left(\theta - \frac{abt}{4p^2}\sqrt{\frac{g}{p}}\right) + \frac{1}{b^2}\sin^2\left(\theta - \frac{abt}{4p^2}\sqrt{\frac{g}{p}}\right).$$

Dans une première approximation, la projection du mobile décrit une petite ellipse dont le centre est à l'origine; une nouvelle approximation exprime que cette ellipse n'est pas fixe, mais qu'elle tourne autour de son centre, dans le même sens que M, avec la vitesse angulaire $\frac{ab}{4p^2}\sqrt{\frac{g}{p}}$. Il serait facile, en développant quelques termes de dt, d'avoir le temps que le mobile met pour passer d'une position à une autre; mais la forme d'intégrale elliptique que nous avons trouvée serait plus convenable pour cet objet.

Le cas où la vitesse initiale serait dirigée suivant la tangente au méridien et où le mobile ne sortirait pas de ce méridien se rapporte au mouvement sur une courbe; il se déduirait des calculs précédents en y faisant c^2 et α égaux à zéro. Au lieu de m'y arrêter, je préfère donner l'équation de la tautochrone sur le paraboloïde; on a, comme il a été dit pour toute tautochrone,

$$\frac{dz}{ds} = \frac{s}{c}, \quad s^2 = 2c(z-z_0), \quad ds = \frac{dz\sqrt{c}}{\sqrt{2(z-z_0)}}.$$

Remplaçons ds par sa valeur, éliminons z et faisons $2pz_0 = a^2$, nous aurons

$$d\theta = \frac{dr}{pr}\left[\frac{a^2p^2 + (pc + a^2 - p^2)r^2 - r^4}{r^2 - a^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

La courbe forme une suite de festons dont les parties les plus basses correspondent à $r = a$, les rebroussements à la valeur qui annule le numérateur de dr. Pour $a = 0$, en faisant $cp - p^2 = h^2$, on a

$$d\theta = \frac{dr}{pr}\sqrt{h^2 - r^2}, \quad p\theta = h\,\mathrm{L}\,\frac{r}{h + \sqrt{h^2 - r^2}} + \sqrt{h^2 - r^2},$$

en supposant $\theta = 0$ pour $r = h$; en ce point la courbe touche la méridienne, et elle revient au pôle en tournant indéfiniment autour de lui.

150. *Déterminer toutes les surfaces telles qu'un corps pesant, abandonné sans vitesse initiale en un quelconque de leurs points et obligé de rester sur la surface, glisse toujours le long d'une ligne de plus grande pente.*

Posons, selon l'usage, pour un déplacement sur la surface,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy.$$

Les équations du mouvement sont, en désignant le temps par θ, puisque t vient d'être pris dans un autre sens,

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{\mathrm{N}p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{\mathrm{N}q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = -g - \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Des deux premières on tire

$$(1) \qquad q\frac{d^2z}{d\theta^2} - p\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0;$$

mais, la trajectoire devant être une ligne de plus grande pente sur laquelle

$$(2) \qquad q\,dx - p\,dy = 0,$$

on a, en divisant par $d\theta$ et différentiant,

$$q\frac{dx}{d\theta} - p\frac{dy}{d\theta} = 0, \quad q\frac{d^2x}{d\theta^2} - p\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{dp}{d\theta}\frac{dy}{d\theta} - \frac{dq}{d\theta}\frac{dx}{d\theta}.$$

L'équation (1) devient

$$dp\,dy - dq\,dx = 0, \quad (r-t)\,dx\,dy + s(dy^2 - dx^2) = 0;$$

et, si l'on tient compte de l'équation (2),

$$(3) \qquad (r-t)pq + s(q^2 - p^2) = 0.$$

Cette équation, ayant lieu pour tous les points de la surface cherchée, est son équation aux dérivées partielles. On aura une intégrale du premier ordre en l'écrivant

$$\frac{rp+sq}{p} = \frac{ps+qt}{q} \quad \text{ou} \quad \frac{\dfrac{d(p^2+q^2)}{dx}}{\dfrac{dz}{dx}} = \frac{\dfrac{d(p^2+q^2)}{dy}}{\dfrac{dz}{dy}};$$

or c'est un théorème général que, si deux fonctions des mêmes variables ont leurs dérivées partielles proportionnelles, l'une de ces quantités est fonction de l'autre; donc

$$1 + p^2 + q^2 = \varphi(z).$$

Tout le long d'une section horizontale quelconque, la normale à la surface fait un angle constant avec la verticale; il s'ensuit, d'après un théorème de Joachimstahl, que ces

sections sont des lignes de courbure; mais nous le déduirons de l'équation qui détermine ces lignes ou plutôt leur projection sur le plan des xy :

$$[(1+q^2)s-pqt]dy^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]dx\,dy \\ -[(1+p^2)s-pqr]dx^2=0.$$

Si l'on y remplace s par sa valeur tirée de l'équation (3) et si l'on divise par $(1+q^2)r-(1+p^2)t$, on a

$$pq\,dy^2+(p^2-q^2)dx\,dy-pq\,dx^2=0;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{p}{q} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{q}{p}.$$

Le premier système, ou $p\,dx+q\,dy=0$, comprend les lignes de niveau; l'autre système est formé, comme l'indique l'équation (2), des lignes de plus grande pente. Je dis que chacune de ces lignes est contenue dans un plan vertical, ainsi que les normales, à la surface aux divers points de la ligne considérée. En effet, au point M d'une ligne de pente, la tangente MT à cette ligne et la normale à la surface sont dans un même plan vertical, comme étant toutes deux perpendiculaires sur la tangente à la ligne de niveau en M; au point infiniment voisin, la tangente M'T' et la normale M'N' sont aussi dans un plan vertical; mais, si celui-ci était distinct du premier, il ferait avec lui un angle infiniment petit du premier ordre, et leur intersection serait verticale; or les lignes MT, MN du premier plan coupent les lignes M'T', M'N' du second, sauf des quantités du troisième ordre, et les deux points de rencontre ne sont pas sur une verticale; donc c'est un seul et même plan qui contient les tangentes à la ligne de pente et les normales à la surface. J'ajoute que ces lignes de pente sont superposables, puisque l'angle de leur tangente avec l'horizon, égal à l'angle de la normale à la surface avec la ver-

ticale, est donné par une fonction commune de z; on peut donc écrire $dx = \psi'(z)dz$, $x = \psi(z) + c$, x et z étant des coordonnées dans le plan de l'une d'elles; l'équation est la même pour toutes; les éléments correspondants sont à la même hauteur. La surface peut être engendrée par une courbe plane quelconque dont le plan se déplace en restant vertical; en considérant le cylindre enveloppe du plan, on peut obtenir le déplacement de la courbe en enroulant son plan sur le cylindre. Les surfaces de révolution, les surfaces canaux à directrice horizontale, les cylindres horizontaux sont des cas particuliers de nos surfaces. Quant à la loi du mouvement, elle est la même que pour un point pesant sur une courbe donnée dans un plan vertical.

151. *Lignes géodésiques sur les surfaces de révolution et sur l'ellipsoïde.*

Lorsqu'un point assujetti à rester sur une surface fixe n'est soumis qu'à des forces dirigées suivant la tangente à sa trajectoire, comme des frottements ou des résistances de milieux, l'accélération centripète n'est produite que par la réaction de la surface, en sorte que le plan osculateur est constamment normal à la surface. Cette propriété caractérise les lignes géodésiques, lignes de longueur minimum, du moins entre certaines limites; mais le point de vue auquel nous nous plaçons donne un moyen de trouver ces lignes comme trajectoires d'un point libre de toute action extérieure. Les équations générales du mouvement deviennent, dans ce cas particulier,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{N}{\Delta}\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{N}{\Delta}\frac{df}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{N}{\Delta}\frac{df}{dz};$$

on en tire

$$v^2 = \text{const.},$$

et, si l'on peut former une autre équation indépendante

de N, on n'aura qu'à éliminer t pour avoir une équation différentielle de la trajectoire.

Soit le point placé sur une surface de révolution

$$x^2 + y^2 - \varphi(z) = 0,$$

et faisons $\frac{N}{\Delta} = \lambda$; les équations deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda y, \quad 2\frac{d^2z}{dt^2} = -\lambda\varphi'(z).$$

On en tire les équations des forces vives et des aires en coordonnées semi-polaires

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}{dt^2} = h^2, \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = c^2 = nh.$$

Éliminant dt,

$$(r^4 - n^2r^2)\,d\theta^2 = n^2 dr^2\left(1 + \frac{dz^2}{dr^2}\right).$$

Telle est l'équation des lignes géodésiques. Si l'on appelle μ l'angle que leur tangente fait avec la tangente au méridien du point de contact, on a

$$\tang^2\mu = \frac{r^2 d\theta^2}{dr^2 + dz^2} = \frac{n^2}{r^2 - n^2}.$$

Cette tangente est infinie pour $r = n$, et ne peut devenir nulle que pour $r = \infty$. Sur un ellipsoïde aplati, d'axes $2a$ et $2b$, l'équation des lignes géodésiques devient

$$d\theta^2 = \frac{n^2 dr^2[a^4 - (a^2 - b^2)r^2]}{r^2(r^2 - n^2)(a^2 - r^2)}.$$

On peut supposer que r parte de la valeur n; la courbe est tangente au parallèle, elle traverse l'équateur pour $r = a$; l'angle avec le méridien est alors minimum, puis r redescend jusqu'à la valeur n pour croître ensuite; quant à θ, il

augmente sans cesse; la courbe oscille entre deux parallèles équidistants de l'équateur.

Sur le paraboloïde, r augmente constamment de n à ∞.

Soit donné l'ellipsoïde à trois axes inégaux

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Nous supposons $a>b>c$; les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\lambda\frac{x}{a^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\lambda\frac{y}{b^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\lambda\frac{z}{c^2}.$$

Ajoutons ces équations multipliées respectivement par $\frac{1}{a^2}\frac{dx}{dt}$, $\frac{1}{b^2}\frac{dy}{dt}$, $\frac{1}{c^2}\frac{dz}{dt}$:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{b^2}\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{c^2}\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\\ &\quad=\lambda\left(\frac{x}{a^4}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{b^4}\frac{dy}{dt}+\frac{z}{c^4}\frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}\right.$$

Multiplions, au contraire, par $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $\frac{z}{c^2}$, et ajoutons

$$\frac{x}{a^2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{z}{c^2}\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\lambda;$$

mais, en différentiant deux fois l'équation (1), on a

$$\frac{x}{a^2}\frac{d^2x}{dt^2}+\ldots=-\left(\frac{1}{a^2}\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{1}{b^2}\frac{dy^2}{dt^2}+\ldots\right);$$

l'équation précédente devient

$$-\left(\frac{1}{a^2}\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{1}{b^2}\frac{dy^2}{dt^2}+\ldots\right)=\lambda\left(\frac{x^2}{a^4}+\ldots\right).$$

Éliminons λ entre cette équation et l'équation (2),

$$\frac{\frac{1}{a^2}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{b^2}\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\ldots}{\frac{1}{a^2}\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{1}{b^2}\frac{dy^2}{dt^2}+\ldots}+\frac{\frac{x}{a^4}\frac{dx}{dt}+\frac{y}{b^4}\frac{dy}{dt}+\ldots}{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=0.$$

Les deux fractions sont des différentielles exactes, et l'on a l'intégrale

$$\left(\frac{1}{a^2}\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{1}{b^2}\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{1}{c^2}\frac{dz^2}{dt^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)=k^2.$$

On a aussi l'intégrale des forces vives

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}=h^2,$$

de sorte qu'il suffit d'éliminer dt entre ces dernières équations pour avoir l'équation différentielle des lignes géodésiques

$$(3)\quad \left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c_4}\right)=\frac{k^2}{h^2}(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Cette équation ne renfermerait que x et y si l'on tirait z et dz de l'équation de l'ellipsoïde; mais on ne peut séparer les variables. Pour être ramené aux quadratures, il faut recourir aux coordonnées elliptiques. Considérons les deux surfaces homofocales à l'ellipsoïde (1)

$$(4)\qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,$$

$$(5)\qquad \frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1.$$

Si l'on donne à λ toutes les valeurs depuis c^2 jusqu'à b^2, on a des hyperboloïdes à une nappe homofocaux à l'ellipsoïde, et qui le coupent, on le sait, suivant des lignes de

courbure ; pour $\lambda = c^2$, l'hyperboloïde se réduit au plan des xy, et à celui des zx pour $\lambda = b^2$; les intersections avec l'ellipsoïde se projettent sur le plan des xy suivant des ellipses concentriques, dont la dernière, pour $\lambda = b^2$, se réduit à la droite qui joint les projections des ombilics. Donnons, au contraire, à μ toutes les valeurs depuis b^2 jusqu'à a^2, l'équation (5) représentera des hyperboloïdes à deux nappes dont l'intersection avec l'ellipsoïde se projette suivant des hyperboles ayant leur axe transverse suivant OX; pour $\mu = a^2$, cette hyperbole se réduit à une droite double dirigée suivant OY. Dans l'espace, ces intersections forment le second système de lignes de courbure de l'ellipsoïde. On obtient ainsi sur la surface deux séries de lignes orthogonales qui forment un système de coordonnées définies par les valeurs de λ et de μ. Il est d'ailleurs aisé de repasser de ces coordonnées aux coordonnées ordinaires : il suffit de résoudre les équations (1), (4) et (5) (Binet a donné un procédé élégant qu'on trouve exposé dans l'*Algèbre* de M. Bertrand); on trouve

$$x^2 = \frac{a^2(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{b^2(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{c^2(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Il suffit de substituer ces quantités et les différentielles dx, dy, dz dans l'équation (3) pour obtenir l'équation différentielle de la trajectoire en coordonnées elliptiques.

Un calcul direct, que des considérations de symétrie peuvent abréger, donne

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\lambda\mu}{a^2b^2c^2}.$$

On a encore

$$dx = \frac{a[(\mu - a^2)d\lambda + (\lambda - a^2)d\mu]}{2\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\sqrt{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}}, \quad \ldots,$$

d'où

$$4ds^2 = \frac{\lambda(\lambda-\mu)d\lambda^2}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)} + \frac{\mu(\mu-\lambda)d\mu^2}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)},$$

$$4\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right)$$
$$= \frac{(\lambda-\mu)d\lambda^2}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)} + \frac{(\mu-\lambda)d\mu^2}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}.$$

Il suffit de substituer ces valeurs dans l'équation (3) pour avoir sa transformée en coordonnées elliptiques. On pourra diviser par $\mu - \lambda$ qui n'est pas nul en général, autrement λ et μ seraient égaux à b^2 qui les sépare, et la trajectoire serait l'ellipse qui a pour axes le plus grand et le plus petit de l'ellipsoïde. L'équation des lignes géodésiques sera, en posant $n^2h^2 = a^2b^2c^2k^2$,

$$(6) \quad \frac{\lambda d\lambda^2}{(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)(\lambda-n^2)} = \frac{\mu d\mu^2}{(\mu-a^2)(\mu-b^2)(\mu-c^2)(\mu-n^2)}.$$

Comme λ est compris entre b^2 et c^2, μ entre a^2 et b^2, la constante n^2 doit donner des signes contraires à $\lambda - n^2$ et $\mu - n^2$; on a nécessairement $\mu > n^2 > \lambda$; n^2 se déduit d'ailleurs de l'équation (3), connaissant la position et la vitesse initiales. Si $n^2 < b^2$, λ devra varier entre n^2 et c^2, μ entre a^2 et b^2; la ligne géodésique sera comprise entre les deux lignes de courbure données par l'hyperboloïde à une nappe répondant à $\lambda = n^2$. Si, au contraire, $n^2 > b^2$, λ variera entre b^2 et c^2, μ entre a^2 et n^2; la ligne restera entre les deux branches de la ligne de courbure située sur l'hyperboloïde à deux nappes pour lequel $\mu = n^2$. Si $n^2 = c^2$, λ sera toujours égal à c^2, et la ligne géodésique sera l'ellipse prin-

cipale située dans le plan des xy; si $n^2 = a^2$, ce sera l'ellipse du plan des yz. Le cas de $n^2 = b^2$ est remarquable; les intégrales ultra-elliptiques se réduisent à des intégrales elliptiques; mais surtout, comme λ finira par s'approcher de b^2, l'intégrale du terme en $d\lambda$ croîtra indéfiniment; il devra en être de même de celle en $d\mu$, et par conséquent μ tendra aussi vers b^2, et la ligne géodésique passera par un ombilic, puis elle ira à l'ombilic diamétralement opposé, et ainsi de suite. Le mouvement sera, dans tous les cas, uniforme, et, en tenant compte de (6), on trouve

$$2ds = d\lambda\sqrt{\frac{\lambda(n^2-\lambda)}{(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)}} + d\mu\sqrt{\frac{\mu(n^2-\mu)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}};$$

le temps s'exprime par deux intégrales ultra-elliptiques.

EXERCICES.

Mouvement d'un point assujetti à rester sur une parabole $y^2 = 2px$ et sollicité par une force dont les composantes sont

$$X = p\left(c^2 - \sqrt{\frac{p}{2x+p}}\right), \quad Y = \frac{py}{\sqrt{p^2+y^2}};$$

la vitesse au sommet est pc. (Fuhrmann.)

Dans la gorge d'une poulie dont le plan est vertical, on a enroulé un fil dont une extrémité pend librement et se termine par une molécule pesante; on imprime à ce poids une vitesse horizontale dans le plan de la poulie, et l'on demande son mouvement : cas des petites oscillations. (Vieille.)

Déterminer dans un plan vertical une courbe sur laquelle doit glisser un point pesant pour qu'il descende de hauteurs égales dans des temps égaux; la tangente au point de départ est verticale. Si le mobile tombe d'une hauteur β dans l'unité de temps, la courbe a pour équation $9\beta^2x^2 = 8gy^3$. (P. Jullien.)

Un point matériel est attiré vers un centre O avec une force proportionnelle à la distance, et sa vitesse initiale est dirigée vers le point O; sur quelle courbe doit-on l'obliger à se mouvoir pour que sa distance au point O décroisse uniformément? La courbe a une équation intégrable et est asymptote au point O.

Déterminer dans un plan les courbes tautochrones pour un mobile attiré vers un point du plan avec une intensité proportionnelle à la distance. La courbe peut être une hypocycloïde ou une droite, ou une spirale logarithmique, ou une spirale formée de deux branches symétriques, s'éloignant indéfiniment du centre d'attraction. (P. Jullien.)

Déterminer la brachistochrone pour un point attiré vers un centre fixe en raison directe de la distance. On peut employer le procédé élémentaire que j'ai indiqué pour un cas semblable, et l'on trouve une hypocycloïde. (Euler.)

Déterminer dans un plan vertical une courbe sur laquelle doit se mouvoir un point pesant pour que la pression soit proportionnelle à la puissance n de sa distance à une certaine horizontale. On arrive à une différentielle binôme intégrable quand n est l'inverse d'un entier. (Varignon.)

On a une ellipse dont le grand axe $2a$ est vertical; un point pesant placé dans l'intérieur, à l'extrémité du petit axe, est lancé verticalement avec une certaine vitesse v_0; déterminer v_0 de sorte que le mobile, après avoir quitté l'ellipse, décrive une parabole qui passe au centre. On aura le point où le mobile quitte l'ellipse en écrivant que la pression y est nulle; on trouve

$$v_0^2 = \frac{8a^2 + b^2}{3a\sqrt{3}}\, g. \qquad \text{(P. Jullien.)}$$

Mouvement d'un point pesant sur une cycloïde située dans un plan vertical et dont le sommet est au point le plus bas; on suppose que l'air exerce une résistance proportionnelle à la vitesse. La cycloïde est encore ici tautochrone. Pour de petites oscillations, le temps d'une double oscillation est à peu près le même

que dans le vide, mais les arcs d'écart décroissent en progression géométrique.

On laisse glisser des corps pesants sur différentes droites issues d'un même point, l'air exerçant une résistance proportionnelle au carré de la vitesse; quel est le lieu des points sur les différentes droites où les mobiles ont une vitesse commune?

Déterminer dans un plan vertical une courbe AMB, telle qu'un mobile pesant, lancé du point A avec une vitesse convenable et soumis à une résistance proportionnelle au carré de sa vitesse, atteigne un point quelconque M avec une vitesse égale à celle qu'il aurait en tombant verticalement dans le même milieu d'une hauteur verticale égale à l'arc MB. L'équation de la courbe, en plaçant l'origine en A, est de la forme

$$k(x+s) = 1 - e^{-2ks}. \qquad \text{(W. Walton.)}$$

Trouver les lignes géodésiques sur un héliçoïde droit à plan directeur, ou surface de la vis à filet carré.

On peut écrire l'équation de l'héliçoïde

$$z = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}, \quad \text{ou} \quad z = a\theta,$$

en prenant des coordonnées semi-polaires. On trouve aisément

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = 0 = r\frac{d^2r}{dt^2} - r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}, \quad \frac{dr^2}{dt^2} + (a^2+r^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = h^2,$$

d'où

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{r}{a^2+r^2}\left(h^2 - \frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

On peut intégrer :

$$\left(h^2 - \frac{dr^2}{dt^2}\right)(a^2+r^2) = c^2;$$

il suffit d'éliminer dt pour avoir l'équation différentielle des projections sur xy.

Mouvement d'un point pesant assujetti à rester dans un tore dont l'axe est vertical, la vitesse initiale étant tangente au parallèle inférieur; cas où cette vitesse est petite. On trouve que le point n'arrive jamais à la partie où les courbures sont de sens contraire.

Un point lié à un point fixe par une tige sans masse est attiré vers un centre éloigné; les petites oscillations ont une durée proportionnelle à la distance du centre attractif; loi de l'attraction.

MOUVEMENT RELATIF.

Accélération dans un mouvement composé.

152. Étant donnés le mouvement d'un point M par rapport à un système S et le mouvement de S par rapport à un système fixe, la Cinématique permet de trouver l'accélération absolue de M. M. Bouquet a exposé pour cette recherche une méthode que je résume sommairement, parce qu'elle a l'avantage d'être fondée sur la considération la plus naturelle, celle des vitesses. Je négligerai tout de suite les infiniment petits d'ordre supérieur à ceux que je considère, et, pour exprimer qu'une droite AC est la résultante de AB et de BC, j'emploie la notation adoptée par quelques géomètres :

$$(AC) \equiv (AB) + (BC).$$

Soient v, v_r, v_e les vitesses absolue, relative et d'entraînement de M, γ, γ_r, γ_e les accélérations de même nom pour l'époque t; si v' est la vitesse à l'époque $t' = t + dt$, nous écrirons avec notre notation, et en négligeant ce qui disparaît à la limite, $(v') \equiv (v) + (\gamma dt)$.

Soient A, B les points de S avec lesquels M coïncide aux époques t et $t + dt$; on peut regarder le mouvement élémentaire de S comme formé d'une translation et d'une rotation autour d'un axe AI; soient ω la vitesse de cette rotation, α l'angle ABI. Menons AE et AR égales et parallèles

à v_e et v_r, $(v) \equiv (AE) + (AR)$; quant à v', ce sera la résultante de la vitesse relative v'_r à l'époque t', représentée par AR′, et d'une vitesse d'entraînement AE′, qui est la vitesse absolue à l'époque t', non plus de A, mais de B; donc

$$(v') \equiv (v) + (\gamma dt) \equiv (AE') + (AR').$$

AE′ est la résultante de la vitesse AE″ de A à l'époque t', et de la vitesse que donne à B la rotation autour de AI; mais la distance de B à l'axe est $AB \sin\alpha = v_r dt \sin\alpha$, cette seconde vitesse E″E′ est égale à $\omega v_r dt \sin\alpha$ et perpendiculaire au plan ABI, à droite de AB, par rapport à AI; donc

$$(AE') \equiv (AE'') + (E''E') \equiv (AE) + (\gamma_e dt) + (\omega v_r dt \sin\alpha).$$

Quant à RR′, ce n'est pas $\gamma_r dt$, parce que, pendant le temps dt, la rotation autour de AI a amené AR dans une position AR″, et l'observateur, entraîné avec S, juge que l'accélération de M, c'est-à-dire son accélération relative, est $\frac{R''R'}{dt}$; mais, comme la distance de R à AI est $v_r \sin\alpha$, l'arc RR″ sera précisément égal et parallèle à E″E′; donc on aura

$$(AR') \equiv (AR'') + (R''R') \equiv (AR) + (\gamma_r dt) + (\omega v_r dt \sin\alpha).$$

Remplaçons, dans l'expression de (v'), AR′ et AE′ par leurs composantes, et supprimons (v) dans le premier membre et, dans le second, sa valeur $(AR) + (AE)$; tout devient divisible par dt, et l'on a

$$(A) \qquad (\gamma) \equiv (\gamma_e) + (\gamma_r) + (2\omega v_r \sin\alpha).$$

L'accélération totale est la résultante des accélérations d'entraînement et relative, et d'une accélération complémentaire perpendiculaire au plan de l'axe instantané et de la vitesse relative, et dirigée à droite de cette vitesse.

Ce théorème, dû à Coriolis, donne aisément les composantes de l'accélération en coordonnées polaires. Supposons qu'un mobile M parcoure un rayon vecteur pendant que ce rayon tourne dans un plan autour du pôle O; l'accélération relative est $\frac{d^2r}{dt^2}$, dirigée suivant OM; l'accélération d'entraînement a une composante $-r\frac{d\theta^2}{dt^2}$ suivant OM, et une autre $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ perpendiculaire; l'accélération complémentaire est, dans le plan du mouvement, perpendiculaire à OM et égale à $2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}$. On connaîtra donc les deux composantes de γ suivant OM et sa perpendiculaire,

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}, \quad r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}r^2\frac{d\theta}{dt}.$$

En faisant tourner le plan considéré autour de la droite qu'on prenait d'abord pour axe polaire, on aura le mouvement dans l'espace, et le lecteur retrouvera, par l'application du théorème de Coriolis, les composantes de l'accélération en coordonnées polaires.

L'égalité (A) peut se mettre sous la forme

$$(B) \qquad (\gamma_r) \equiv (\gamma) - (\gamma_e) - (2\omega v_r \sin\alpha).$$

L'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et de l'accélération centrifuge composée; celle-ci est égale à $2\omega v_r \sin\alpha$, perpendiculaire à l'axe instantané passant par le mobile et à la vitesse relative, mais dirigée à gauche de la vitesse relative pour un observateur placé dans le sens de l'axe de rotation; autrement, l'observateur dirigé suivant cette accélération, le sens positif allant des pieds à la tête, verrait la vitesse relative à gauche de l'axe de rotation.

Pour calculer les composantes de l'accélération centrifuge composée suivant trois axes rectangulaires faisant partie de S, je rappelle le problème de Géométrie qui consiste à chercher les cosinus directeurs λ, μ, ν d'une droite perpendiculaire à deux autres dont les cosinus directeurs sont a, b, c, a', b', c', et qui font entre elles l'angle α. On doit avoir

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0, \quad a'\lambda + b'\mu + c'\nu = 0;$$

on en déduit une suite de rapports égaux

$$\frac{\lambda}{bc' - cb'} = \frac{\mu}{ca' - ac'} = \frac{\nu}{ab' - ba'} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\Sigma(bc' - cb')^2}} = \frac{\pm 1}{\sin\alpha}.$$

Si l'on ne prend la perpendiculaire que d'un côté du plan des deux droites, de telle manière que l'observateur dirigé suivant cette demi-droite voie, par exemple, (a, b, c) à sa gauche, (a', b', c') à sa droite, on peut choisir le signe convenable; ce signe reste le même, quelle que soit la position des trois demi-droites par rapport aux axes, car les trois fractions ne sauraient changer de signe à la fois. Faisons coïncider la droite a, b, c avec OX, la droite λ, μ, ν avec OZ; la droite a', b', c' sera dans le plan XOY et fera un angle aigu avec OY; alors $\nu = 1$, $a = 1$, $b' > 0$, $b = 0$; donc $\frac{\nu}{ab' - ba'}$ est positif, et il faut le signe $+$. Pour nous

$$a = \frac{1}{v_r}\frac{dx}{dt}, \quad b = \frac{1}{v_r}\frac{dy}{dt}, \quad \ldots, \quad a' = \frac{p}{\omega}, \quad b' = \frac{q}{\omega}, \quad c' = \frac{r}{\omega};$$

donc

$$\lambda = \frac{1}{\omega v_r \sin\alpha}\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right), \quad \ldots.$$

Les composantes cherchées s'obtiennent en multipliant ces cosinus par $2\omega v_r \sin\alpha$; ce sont

$$2\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right), \quad 2\left(p\frac{dz}{dt} - r\frac{dx}{dt}\right), \quad 2\left(q\frac{dx}{dt} - p\frac{dy}{dt}\right).$$

Question dynamique.

153. Considérons un mobile de masse m et dont les coordonnées relatives soient x, y, z; multiplions par m l'égalité (B) du Chapitre précédent; $m\gamma_r$ est la force qui donnerait à une masse m un mouvement absolu identique au mouvement relatif de M; $m\gamma$ est la force véritable qui sollicite M, et $m\gamma_e$ est la force qui donnerait à une masse m l'accélération que possède le point A de S qui coïncide avec M; prise en sens contraire, on peut l'appeler *force d'inertie d'entraînement*. Le mouvement relatif est identique au mouvement absolu que produirait la force effective à laquelle on adjoindrait la force d'inertie d'entraînement, et la force centrifuge composée, produit de la masse par l'accélération de même nom. Ces deux dernières forces sont fictives et sont dites *forces apparentes;* leur introduction ramène toute question de mouvement ou d'équilibre relatif à une question de mouvement et d'équilibre absolu. Soient X, Y, Z les composantes de la force réelle, X_1, Y_1, Z_1 celles de la force d'inertie d'entraînement; les équations du mouvement relatif sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1 + 2m\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right)$$

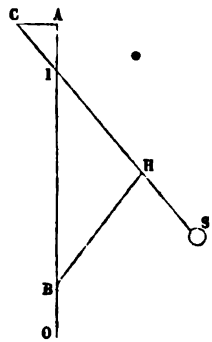
et deux autres données par permutation tournante.

On remarque que la force centrifuge composée disparaît dans trois cas : quand il y a équilibre relatif, quand le mouvement d'entraînement de S est une simple translation, enfin quand la vitesse relative est parallèle à l'axe de la rotation instantanée. Quand elle existe, son travail est nul, et elle n'intervient pas dans l'équation des forces vives.

154. *Équilibre du régulateur à boules quand on néglige la masse des tiges.*

L'appareil consiste essentiellement en un arbre vertical OA (*fig.* 23) tournant avec une vitesse uniforme ω, et portant une tige horizontale AC, à l'extrémité de laquelle est articulée la barre CS qui porte l'une des boules;

Fig. 23



cette droite doit rester dans le plan mobile OAC. En un point H est articulée une seconde tige dont l'autre extrémité B glisse sur l'axe OA et est soumise en B à une force verticale F provenant des organes que le régulateur est chargé de soulever. Soient $AC = a$, $CS = l$, $CH = c$, $BH = h$, $BIS = \theta$, $ABH = \varphi$, m la masse d'une boule. La tige HI exerce sur CS une force dont les composantes sont X parallèle à AC, Y à AB.

La seule force apparente à introduire est la force d'inertie d'entraînement, ici force centrifuge; la résultante des forces centrifuges sur les molécules de la boule est la même que si la masse était concentrée au centre : elle serait appliquée au centre de percussion de la sphère par rapport à OI, mais je néglige l'écart de ce point avec le centre de la boule. On égalera à zéro la somme des moments par rapport à I de cette force centrifuge, du poids de la sphère et de l

force appliquée en H, ce qui donne

$$ml[g\sin\theta - (l\sin\theta - a)\omega^2\cos\theta] + c(Y\sin\theta + X\cos\theta) = 0.$$

Écrivons que la somme des projections verticales des forces agissant sur BH est nulle, ainsi que celle de leurs moments par rapport à B :

$$Y - F = 0, \quad X\cos\varphi - Y\sin\varphi = 0.$$

Éliminant X et Y, on a, pour l'équation d'équilibre,

$$(1) \quad ml[g\sin\theta - (l\sin\theta - a)\omega^2\cos\theta] + cF\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\cos\varphi} = 0.$$

Pour avoir une autre équation entre θ et φ, je projette le contour ACHB sur une horizontale

$$(2) \qquad a - c\sin\theta + h\sin\varphi = 0.$$

L'influence de la masse des tiges sera faible, parce que leur poids et la force centrifuge qu'on leur applique agissent en sens contraire pour faire varier θ et se neutralisent en partie. La résolution rigoureuse du système (1) et (2) n'en reste pas moins très-compliquée; mais on négligera d'abord a et F, et l'on aura une première valeur approchée $\cos\theta_1 = \frac{g}{\omega^2 l}$; on emploiera ensuite la méthode des approximations successives.

L'appareil est ordinairement disposé de manière que φ diffère peu de θ; supposons-les égaux, et par suite

$$\frac{\sin(\theta+\varphi)}{\cos\varphi} = 2\sin\theta,$$

et posons $2Fc = ml\gamma$; l'équation (1) devient

$$(3) \qquad (g+\gamma)\sin\theta - (l\sin\theta - a)\omega^2\cos\theta = 0.$$

Faisons varier ω^2 de $\delta\omega^2$, et calculons la variation de θ,

$$[(g+\gamma)\cos\theta + (l\sin\theta - a)\omega^2\sin\theta - l\omega^2\cos^2\theta]\delta\theta$$
$$= (l\sin\theta - a)\cos\theta\,\delta\omega^2.$$

Substituons à $g+\gamma$ sa valeur tirée de (3), et calculons $\delta\theta$,

$$\delta\theta = \frac{(l\sin\theta - a)\sin\theta\cos\theta\,\delta\omega^2}{\omega^2(l\sin^3\theta - a)}.$$

La sensibilité de l'appareil sera excessive si le dénominateur est nul, $a = l\sin^3\theta$; dans ce cas, C sera le centre de courbure au point S d'une parabole qui aurait OA pour axe; car le rayon de courbure est de la forme $\frac{p}{\cos^2\theta}$, et l'ordonnée du centre de courbure $-\frac{\gamma^3}{p^2} = -p\tang^3\theta = -\rho\sin^3\theta$, ce qui est la relation entre AC et SC.

155. *Mouvement d'un point pesant placé dans un tube droit qui tourne uniformément autour d'un axe horizontal; pression sur le tube.* (Agrégation, 1850.)

Prenons l'axe de rotation pour axe des x, la perpendiculaire commune à cette droite et au tube pour axe des z, et une perpendiculaire aux deux autres pour axe des y. Soient a la plus courte distance OA, φ l'angle du tube avec OX, r la distance AM du mobile au point où le tube coupe OZ, m la masse de M, ω la vitesse angulaire avec laquelle le système des axes et du tube tourne autour de OX. Si l'on commence à compter le temps à partir du moment où OA est en sens contraire de la pesanteur, le poids du mobile aura pour composantes

$$X = 0, \quad Y = -mg\sin\omega t, \quad Z = -mg\cos\omega t.$$

Les composantes de la force d'inertie d'entraînement sont

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = m\omega^2 y = m\omega^2 r\sin\varphi, \quad Z_1 = ma\omega^2;$$

enfin la force centrifuge composée sera parallèle à l'axe des z, égale à $2m\omega\frac{dr}{dt}\sin\varphi$, et, en supposant φ aigu et positif, du même sens que OZ quand $\frac{dr}{dt} < 0$. On pourra décomposer Y et Y_1 en deux forces, les unes suivant l'axe du tube, les autres perpendiculaires; les deux premières sont les seules forces tangentielles et ont pour somme $(Y + Y_1)\sin\varphi$.

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\omega^2 r\sin^2\varphi - mg\sin\omega t\sin\varphi;$$

c'est une équation linéaire à second membre, dont l'intégrale est

$$r = Ae^{\omega t\sin\varphi} + Be^{-\omega t\sin\varphi} + \frac{g\sin\varphi}{\omega^2(1+\sin^2\varphi)}\sin\omega t.$$

On détermine A et B par les valeurs initiales de r et de $\frac{dr}{dt}$,

$$A + B = r_0, \quad (A - B)\omega\sin\varphi + \frac{g\sin\varphi}{\omega(1+\sin^2\varphi)} = r'_0.$$

En général A est différent de zéro, et le mouvement finit par avoir lieu toujours dans le même sens et avec une vitesse de plus en plus grande. Si A et B étaient nuls, ce qui exigerait

$$r_0 = 0, \quad r'_0 = \frac{g\sin\varphi}{\omega(1+\sin^2\varphi)},$$

le mouvement serait simplement oscillatoire.

La pression exercée sur le tube est égale à la somme des composantes, normales au tube, de la pesanteur et des forces apparentes; sa projection sur OZ est

$$m\omega^2 a - mg\cos\omega t - 2m\omega\frac{dr}{dt}\sin\varphi;$$

sa projection sur le plan des xy et dans le sens de la normale au tube, située du côté des x positifs, est

$$mg \sin\omega t \cos\varphi - m\omega^2 r \sin\varphi \cos\varphi.$$

Si A est différent de zéro, ces projections augmentent indéfiniment avec le temps.

Il est remarquable que le mouvement relatif ne dépende point de a; la force centrifuge augmente avec cette quantité, mais non pas sa projection sur l'axe du tube. En supposant $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on aura le cas d'un tube qui décrit un plan vertical en tournant autour d'un point du plan; il n'y a pas de simplification essentielle.

156. *Mouvement d'un point pesant assujetti à rester sur un plan incliné qui tourne avec une vitesse constante* ω *autour d'une verticale.*

Je prends pour axe des z l'axe de rotation, pour origine le point où cette droite perce le plan, pour axes des x et des y deux horizontales, la première située dans le plan. Soient i l'inclinaison constante de la surface sur l'horizon, N sa réaction comptée positivement au-dessus du plan, 1 la masse du mobile M; il suffit d'écrire les équations générales du mouvement relatif

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x + 2\omega \frac{dy}{dt},$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y - N \sin i - 2\omega \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = N \cos i - g.$$

Si l'on remplace z par $y \operatorname{tang} i$ et qu'on élimine N entre les équations (2), on a une équation qui, avec (1), indique comment se meut la projection horizontale de M

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 y \cos^2 i - g \sin i \cos i - 2\omega \frac{dx}{dt} \cos^2 i.$$

Pour intégrer les équations simultanées (1), (3), on pose

$$x = e^{rt}, \quad y = \lambda e^{rt} + \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tang} i,$$

r et λ étant des constantes qui vérifieront les équations

$$r^2 = \omega^2 + 2r\omega\lambda, \quad \lambda r^2 = \lambda\omega^2 \cos^2 i - 2r\omega \cos^2 i.$$

On en tire

$$(4) \quad \lambda = \frac{r^2 - \omega^2}{2r\omega} \quad \text{et} \quad r^4 - (1 - 3\cos^2 i) r^2\omega^2 + \omega^4 \cos^2 i = 0.$$

Cette équation admet quatre racines, deux à deux égales et de signes contraires; r^2 sera réel quand $\cos^2 i$ sera $< \frac{1}{9}$; les signes que prennent dans ce cas les coefficients de (4) prouvent que les deux valeurs de r^2 sont > 0, et les quatre de r réelles. Les intégrales du mouvement ont la forme

$$(5) \quad \begin{cases} x = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t} + A' e^{-\alpha t} + B' e^{-\beta t}, \\ y = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tang} i + A \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha\omega} e^{\alpha t} + \ldots. \end{cases}$$

En général x et y augmentent indéfiniment, à moins que A et B ne soient nuls; faisons dans les équations précédentes et leurs dérivées A, B et t nuls :

$$x_0 = A' + B', \quad y_0 = \frac{g \operatorname{tang} i}{\omega^2} + A' \frac{\alpha^2 - \omega^2}{2\alpha\omega} + B' \frac{\beta^2 - \omega^2}{2\beta\omega},$$

$$x'_0 = -A'\alpha - B'\beta, \quad y'_0 = A' \frac{\omega^2 - \alpha^2}{2\omega} + B' \frac{\omega^2 - \beta^2}{2\omega}.$$

En éliminant A' et B' entre ces quatre équations, on aura deux conditions auxquelles doivent satisfaire les données initiales du problème pour produire ce mouvement

particulier; le mobile tendra vers le point du plan

$$\left(x = 0,\ y = \frac{1}{\omega^2} g \operatorname{tang} i\right),$$

qui serait d'ailleurs une position d'équilibre relatif.

Quand $\cos^2 i > \frac{1}{9}$, les racines de l'équation (4) sont imaginaires, et les intégrales du mouvement deviennent, avec des constantes réelles,

$$(6)\quad \begin{cases} x = e^{\alpha t}(\mathrm{A}\cos\beta t + \mathrm{B}\sin\beta t) + e^{-\alpha t}(\mathrm{A}'\cos\beta t + \mathrm{B}'\sin\beta t), \\ y = \dfrac{e^{\alpha t}}{2\omega}\left[\left(\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta - \omega^2\dfrac{\mathrm{A}\alpha - \mathrm{B}\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\cos\beta t \right. \\ \qquad\qquad \left. + \left(\mathrm{B}\alpha - \mathrm{A}\beta - \omega^2\dfrac{\mathrm{B}\alpha + \mathrm{A}\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)\sin\beta t\right] + \ldots. \end{cases}$$

En général A et B ne sont pas nuls, et, pour des valeurs très-grandes de t, les parties principales de x et y sont de la forme

$$x = ae^{\alpha t}\cos(\beta t + h),\quad y = a'e^{\alpha t}\cos(\beta t + h');$$

elles définissent un mouvement en spirale : le rayon vecteur augmente à l'infini, et l'angle polaire croît de 2π dans le temps $\frac{2\pi}{\beta}$. Si A et B sont nuls, le mobile tend vers une position limite, définie comme dans le premier cas, mais il n'y arrive qu'après une infinité de circonvolutions.

Le cas de $\cos^2 i = \frac{1}{9}$ se déduirait des formules (5) par la méthode que d'Alembert applique à l'intégrale d'une équation linéaire dans le cas où l'équation caractéristique a des racines égales. On peut aussi faire tendre dans les formules (6) β vers zéro, $\cos\beta t$ vers 1, $\sin\beta t$ vers βt, et poser

$B\beta = C$, $B'\beta = C'$; on trouve à la limite, α étant $\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$x = (A + Ct)e^{\alpha t} + (A' + C't)e^{-\alpha t},$$

$$y = \frac{g}{\omega^2}\operatorname{tang} i + \left[A\alpha + C - \frac{\omega^2}{\alpha^2}(A\alpha - C) + C\frac{\alpha^2 - \omega^2}{\alpha}t\right]\frac{e^{\alpha t}}{2\omega}$$
$$+ (C' - A'\alpha + \ldots)\frac{e^{-\alpha t}}{2\omega}.$$

Le rayon vecteur augmente, en général, à l'infini, mais sa direction tend vers une limite déterminée.

Le cas où $i = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire où le plan contient l'axe de rotation, doit se traiter à l'aide des équations (1) et (2); comme y et ses dérivées sont évidemment nuls, elles se réduisent au système très-simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x, \quad N = -2\omega\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Les intégrales sont, en tenant compte des circonstances initiales,

$$x = \frac{\omega x_0 + x'_0}{2\omega}e^{\omega t} + \frac{\omega x_0 - x'_0}{2\omega}e^{-\omega t}, \quad z = z_0 + z'_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

La trajectoire relative a une branche infinie dont la tangente tend vers l'horizontalité, mais elle n'a pas d'asymptote.

157. *Un point matériel libre* M *est attiré vers un point* O *d'un plan horizontal par une force fonction de la distance* $F = \varphi(r)$; *il se meut de manière à se trouver constamment sur une spirale logarithmique* S *qui aurait son pôle en* O *et tournerait autour avec une vitesse uniforme* ω. *Déterminer la loi de la force* F *et la nature de la trajectoire.* (Licence, 1874.)

Il est naturel de traiter ce problème comme une question de mouvement relatif, bien qu'il soit possible et même plus court d'employer d'autres considérations. Si nous imaginons un plan horizontal qui tourne autour de O avec la vitesse ω, nous savons que la trajectoire relative est la spirale

$$r = ae^{\theta \cot \mu}.$$

L'axe polaire est le rayon vecteur initial OA, dont la longueur est a; et μ, $< \frac{\pi}{2}$, désigne l'angle sous lequel la courbe coupe ses rayons vecteurs. Supposons que la rotation ω ait lieu dans le sens où croît θ et que la masse de M soit l'unité; les forces apparentes sont $\omega^2 r$, dirigée suivant OM, et $2\omega \frac{ds}{dt}$, perpendiculaire à la tangente, de manière à faire avec OM l'angle $\frac{\pi}{2} - \mu$. Écrivons les composantes de l'accélération suivant OM et suivant sa perpendiculaire :

$$(1) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2 r - \varphi(r) + 2\omega \sin\mu \frac{ds}{dt},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dt} r^2 \frac{d\theta}{dt} = -2\omega \cos\mu \frac{ds}{dt};$$

mais $ds \cos\mu = dr$, et (2) devient

$$d.r^2 \frac{d\theta}{dt} = -2\omega r dr, \quad r^2\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega\right) = c;$$

c'est l'équation des aires par rapport à des axes fixes. Si l'on y remplace $r d\theta$ par $\operatorname{tang}\mu\, dr$, on en déduit

$$(3) \quad \begin{cases} r \operatorname{tang}\mu \dfrac{dr}{dt} + \omega r^2 = c, \quad \dfrac{dr}{dt} = \left(\dfrac{c}{r} - \omega r\right)\cot\mu. \\ \dfrac{d^2 r}{dt^2} = -\cot\mu\left(\dfrac{c}{r^2} + \omega\right)\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\cot^2\mu}{r}\left(\omega^2 r^2 - \dfrac{c^2}{r^2}\right). \end{cases}$$

L'équation (1) donne, en tenant compte de ce qui précède,

$$\varphi(r) = \omega^2 r + \cot^2\mu\left(\frac{c^2}{r^3} - \omega^2 r\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{c}{r} - \omega r\right)^2 + 2\omega\left(\frac{c}{r} - \omega r\right)$$

$$= \frac{c^2}{\sin^2\mu}\frac{1}{r^3} - \omega^2 r\cot^2\mu.$$

L'action du point O se compose d'une répulsion en raison inverse du cube de la distance et d'une attraction proportionnelle à cette distance.

La loi du mouvement s'obtient en intégrant (3), où les variables se séparent :

$$2\omega t\cot\mu = \mathrm{L}\frac{c - a^2\omega}{c - r^2\omega}.$$

Pour avoir la trajectoire absolue, en y représentant par φ l'angle polaire, écrivons

$$\omega t = \varphi - \theta = \varphi - \operatorname{tang}\mu\,\mathrm{L}\frac{r}{a},$$

d'où

$$(4)\quad 2\varphi\cot\mu - \mathrm{L}\frac{r^2}{a^2} = \mathrm{L}\frac{c - a^2\omega}{c - r^2\omega},\quad r^2 = \frac{a^2 c}{a^2\omega + (c - a^2\omega)e^{-2\varphi\cot\mu}}.$$

L'équation (3) montre que, si h est la valeur initiale de $\frac{dr}{dt}$,

$$c = ah\operatorname{tang}\mu + a^2\omega.$$

Quand $c > a^2\omega$ φ peut varier, dans la courbe (4), de $-\infty$ à $+\infty$, r croissant alors de zéro à $\sqrt{\frac{c}{\omega}}$; h étant > 0, le mobile s'éloigne de son point de départ A pour tourner indéfiniment dans un cercle dont il s'approche de plus en plus.

Quand c est compris entre zéro et $a^2\omega$, φ ne peut varier que de la valeur négative qui annule le dénominateur (4) jusqu'à $+\infty$; r décroît de ∞ jusqu'à $\sqrt{\frac{c}{\omega}}$; h étant < 0, le mobile tourne encore autour d'un cercle dont il s'approche, mais extérieurement.

Enfin, quand $c < 0$, φ peut varier de $-\infty$ jusqu'à la valeur positive qui annule le dénominateur, r allant de zéro à l'infini ; mais le mobile ne décrit que la portion de courbe qui se rapproche du pôle.

Pour $c = 0$, la trajectoire est une droite, et pour $c = a^2\omega$ c'est un cercle; mais, malgré la variété des cas examinés, nous n'avons pas le mouvement le plus général que puisse produire la force $\varphi(r)$ dans toutes les circonstances.

158. *Influence de la rotation de la Terre sur les mouvements à sa surface.*

L'effort qu'on fait pour soutenir un corps pesant ne doit détruire que l'attraction du globe diminuée de la force centrifuge correspondant à la rotation diurne, l'effet de la translation du globe étant négligeable; or la résultante de ces deux influences est cette force apparente que l'on appelle la *pesanteur*. Pour traiter les mouvements à la surface de la Terre comme des mouvements absolus, en tenant compte de la pesanteur, on n'aura plus à s'inquiéter de la force centrifuge, mais il faudra introduire la force centrifuge composée. Si l'on prend pour axe des x la tangente au méridien dirigée vers le nord, pour axe des y la tangente au parallèle vers l'est, pour axe des z la verticale montante, et si l'on appelle n la vitesse de rotation de la Terre, dont l'axe positif est dirigé vers le pôle sud, λ la latitude, les composantes de cette rotation sont $-n\cos\lambda$, zéro et $-n\sin\lambda$; or $n = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}0000729$. Les équations du mouvement

d'un point sur lequel agit une force X, Y, Z seront

$$(1)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = X - 2mn\sin\lambda\dfrac{dy}{dt}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + 2mn\left(\sin\lambda\dfrac{dx}{dt} - \cos\lambda\dfrac{dz}{dt}\right), \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = -mg + Z + 2mn\cos\lambda\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un point libre, et que X, Z, Y soient nuls; le point de départ sera à l'origine des coordonnées, et les composantes de la vitesse initiale seront a, b, c. On peut écrire immédiatement les intégrales premières des équations (1)

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a - 2ny\sin\lambda, \\ \dfrac{dy}{dt} = b + 2n(x\sin\lambda - z\cos\lambda), \\ \dfrac{dz}{dt} = c - gt + 2ny\cos\lambda. \end{cases}$$

On aurait aisément les intégrales générales de ces équations, mais elles représentent un mouvement compliqué; et, pour reconnaître l'influence de la rotation de la Terre, il vaut mieux faire des approximations successives. Supposons que le point parte sans vitesse initiale; si l'on néglige n, on tire de (2)

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Tenons compte des termes en n; en y remplaçant x, y, z par ces valeurs et intégrant, on aura pour seconde approximation

$$x = 0,\quad y = \frac{1}{3}ngt^3\cos\lambda,\quad z = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Une troisième approximation donne

$$x = -\frac{n^2}{6} g t^4 \sin\lambda \cos\lambda,$$

$$y = \frac{1}{3} n g t^3 \cos\lambda,$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{n^2}{6} g t^4 \cos^2\lambda.$$

L'effet le plus sensible est une déviation vers l'est et une plus petite vers le sud.

Quand a, b, c sont de grands nombres, la première approximation donne

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct - \frac{1}{2} g t^2;$$

Une deuxième approximation donne des résultats utiles en balistique

$$x = at - nbt^2 \sin\lambda, \quad z = ct - \frac{1}{2} g t^2 + nbt^2 \cos\lambda,$$

$$y = bt + n(a \sin\lambda - c \cos\lambda) t^2 + \frac{1}{3} n g t^3 \cos\lambda.$$

Ajoutons quelques mots sur le pendule sphérique; l'origine étant au centre, les équations du mouvement sont

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{N}{m}\frac{x}{R} - 2n \sin\lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{N}{m}\frac{y}{R} + 2n\left(\sin\lambda \frac{dx}{dt} - \cos\lambda \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g - \frac{N}{m}\frac{z}{R} + 2n \cos\lambda \frac{dy}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Multiplions par $2dx$, $2dy$, $2dz$ et ajoutons; les termes en n qui représentent le travail de la force centrifuge composée disparaissent, et l'on est conduit à l'équation des

forces vives

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z_0 - z).$$

Le pendule ne peut jamais décrire un cercle horizontal, comme c'est possible en négligeant le mouvement diurne; en effet l'équation des forces vives prouve que la vitesse serait constante. On aurait, en supposant $x = a$, $y = 0$, $z = z_0$ pour $t = 0$,

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = z_0.$$

Les deux premières équations (2) donnent

$$N = mR(\omega^2 - 2n\omega\sin\lambda),$$

et la troisième

$$N = \frac{mR}{z_0}(-g + 2na\omega\cos\lambda\cos\omega t);$$

ces valeurs sont incompatibles.

Considérons encore le pendule abandonné sans vitesse, et faisons d'abord avec la verticale un petit angle α. Soient θ l'angle du fil avec la verticale à l'époque t, ψ l'azimut du méridien du pendule. L'équation des forces vives devient

$$(3) \qquad R\frac{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2}{dt^2} = 2g(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Éliminons N entre les deux premières équations (2);

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2n\sin\lambda\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) - 2nx\cos\lambda\frac{dz}{dt};$$

on néglige le dernier terme qui contient, outre n, le facteur très-petit $\frac{dz}{dt}$, et l'on peut intégrer, ce qui donne, en introduisant θ et ψ,

$$(4) \qquad \sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = 2n\sin\lambda(\sin^2\theta - \sin^2\alpha).$$

J'élimine dt entre les équations (3) et (4) et je sépare les variables :

$$d\psi = \pm \frac{n \sin\lambda \, d\theta (\cos\theta + \cos\alpha) \sqrt{R(\cos\theta - \cos\alpha)}}{\sin\theta \sqrt{2g \sin^2\theta - n^2 R(\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\theta + \cos\alpha)^2 \sin^2\lambda}}.$$

θ ne peut surpasser α; $d\theta$ est d'abord < 0, et, comme (4) prouve que $d\psi$ est aussi négatif, on prendra d'abord le signe $+$. Pour que le dénominateur de $d\psi$ soit réel, il faut que θ reste supérieur à une valeur positive β. En développant les sinus et cosinus et se bornant aux termes principaux, on a

$$d\psi = \frac{n \sin\lambda \, d\theta}{\theta} \sqrt{\frac{R(\alpha^2 - \theta^2)}{g\theta^2 - n^2 R \alpha^2 \sin^2\lambda}}, \quad \beta = n\alpha \sqrt{\frac{R}{g}} \sin\lambda;$$

tandis que θ diminue de α à β pour revenir à α, ψ décroît de

$$2\int_\beta^\alpha \frac{n \, d\theta \sin\lambda}{\theta} \sqrt{\frac{R(\alpha^2 - \theta^2)}{g(\theta^2 - \beta^2)}} = \pi - n\pi \sin\lambda \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Au bout d'un temps double, l'azimut du pendule augmentera de $2\pi n \sin\lambda \sqrt{\frac{R}{g}}$; comme le temps d'une oscillation complète qui paraît s'effectuer dans un plan est $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, il semble que le plan d'oscillation tourne du nord vers l'est avec la vitesse $n \sin\lambda$, ce qui a été vérifié par Foucault.

EXERCICES.

Mouvement d'une petite bille enfermée dans un tube circulaire qui tourne sur un plan horizontal autour d'un point O de sa circonférence; la bille est d'abord en repos absolu, et se trouve au point diamétralement opposé à O. (WALTON.)

Mouvement d'un point posé sur un plan horizontal parfaitement

poli et attaché par un fil inextensible à un autre point qui parcourt uniformément un cercle du plan. (EULER.)

Mouvement des boules d'un régulateur quand on les a écartées de leur position d'équilibre; on suppose la tige qui porte les boules articulée en un point de l'axe de rotation, et l'on néglige sa masse ainsi que le poids à soulever par l'appareil.

Établir le théorème de Coriolis par les formules de transformation de coordonnées; montrer par cette méthode que la suraccélération absolue est la résultante de cinq autres : 1° la suraccélération relative; 2° celle d'entraînement; 3° $3\omega^2 v_r \sin\omega$, v_r perpendiculaire à v_r dans le plan de cette vitesse et de l'axe instantané; 4° $3\gamma\omega_r \sin\omega$, γ_r perpendiculaire à ω et à γ_r; 5° $3v_r\gamma_\omega \sin v_r$, γ_ω perpendiculaire à v_r et γ_ω; γ_ω désigne l'accélération angulaire (*voir* n° 113).

APPLICATION DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE AU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

La recherche du mouvement d'un système de points matériels peut toujours se ramener à la détermination du mouvement individuel de chaque partie du système : si les différents points sont libres, on connaît les forces qui sollicitent chacun d'eux, et l'on en déduit les équations différentielles de son mouvement; s'il existe des liaisons, on introduit des réactions qui en représentent les effets, et les points peuvent être traités comme des points libres; on introduit de nouvelles inconnues, mais les conditions qu'on exprime donnent un nombre correspondant d'équations, et l'on peut toujours déterminer la position des parties du système et les réactions : il n'y a jamais qu'une solution.

Dans bien des cas, il suffit d'un très-petit nombre de données pour déterminer la position d'un système, et les théorèmes généraux sur les mouvements des systèmes pourront les faire connaître : il faut, pour procéder ainsi, choisir les quantités les plus simples qui fixent la position des mobiles considérés, et les principes généraux, en nombre égal à celui des inconnues, qui peuvent s'appliquer à la question. Je rappelle ces principes.

Le centre de gravité d'un système quelconque se meut comme un point où toutes les masses seraient concentrées, et les forces extérieures appliquées, en conservant leur

grandeur et leur direction. Les forces intérieures provenant de l'action des parties du système les unes sur les autres n'influent pas sur le mouvement du centre de gravité général. Un principe équivalent au précédent consiste en ce que la dérivée par rapport au temps de la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe est égale à la somme des projections des forces extérieures; autrement, la somme des impulsions des forces projetées sur l'axe égale la variation de la somme des quantités de mouvement estimées suivant le même axe.

La somme des moments des forces extérieures par rapport à une droite est égale à la dérivée par rapport au temps de la somme des moments des quantités de mouvement. Si la première somme est toujours nulle, la somme des masses des points multipliés par la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'aire décrite par le rayon vecteur issu d'un point de l'axe croît proportionnellement au temps. Quand cela arrive pour tous les axes passant par un point, il y a un plan invariable, plan du maximum des aires, sur lequel la somme des produits considérés est maximum.

Enfin la demi-variation de la force vive du système est égale à la somme des travaux des forces qui y sont en jeu. Ici les forces intérieures peuvent intervenir; seulement leurs travaux se détruisent quand le système ne se déforme pas, et en général quand les déplacements se font conformément aux liaisons, que des corps polis glissent les uns sur les autres, etc.; mais les déformations intérieures peuvent donner des travaux : quand deux points se repoussent avec une intensité P, si leur distance augmente de dr, il y a un travail $P\,dr$; quand deux surfaces dépolies glissent l'une sur l'autre, il y a un travail élémentaire résistant égal au produit de la force de frottement par l'arc de glissement.

serait le centre de gravité de MP rectifié, arc $OA' = r'$, m' la masse de MP, l' la distance rectifiée d'un de ses points à A'. Appliquons le théorème des forces vives à un déplacement infiniment petit de MP; on a, en prenant les intégrales le long de MP,

$$d\frac{1}{2}m'v^2 = -T\,dr' + g\,d\int \varepsilon(y_0 - y)\,dl'$$
$$= -T\,dr' + \frac{gm'}{8a}d(r_0'^2 - r'^2)$$

D'après l'équation (1),

$$d.\frac{1}{2}v^2 = -\frac{gr\,dr}{4a} \quad \text{et} \quad dr = dr';$$

donc

$$\frac{m'gr}{4a} = T + \frac{m'gr'}{4a}, \quad T = m'g\frac{r - r'}{4a} = -m'g\frac{AA'}{4a}.$$

La tension est indépendante du temps et toujours négative, c'est-à-dire que la chaîne tend partout à se replier et à se raccourcir.

La pression $N\,dl$ exercée par un petit élément MM' sur le tube s'obtient en évaluant la force centripète pour cet élément; soient ρ le rayon de courbure de la cycloïde, α son angle avec la verticale; la projection de la tension en M' sur la normale en M est sensiblement égale à $T\frac{dl}{\rho}$; on aura donc

$$\varepsilon\,dl\frac{v^2}{\rho} = N\,dl - g\varepsilon\,dl\cos\alpha + T\frac{dl}{\rho}, \quad N = \frac{\varepsilon v^2 - T}{\rho} + g\varepsilon\cos\alpha.$$

N est toujours positif : c'est dire que le fil appuie toujours sur le côté concave du tube.

161. *Un fil flexible et inextensible est enroulé sur un cylindre mobile autour d'un axe horizontal, et porte à*

ses deux extrémités deux poids P *et* Q; *déterminer le mouvement du système en supposant que* P *et* Q *aient une vitesse initiale* a, *mais que les fils qui les soutiennent restent verticaux; on suppose que l'air oppose au mouvement de* P *et de* Q *une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.* (Licence, 1869.)

Soient P celle des deux masses qui descend d'abord; x la quantité dont elle est descendue au bout du temps t; p, q les masses respectives, $2m$ la masse du cylindre, R son rayon, ω sa vitesse angulaire, $\frac{v^2}{c}$ la somme des forces résistantes que l'air oppose au mouvement de P et de Q. La force vive du cylindre est $\int \omega^2 r^2 dm$, ou ω^2 multiplié par le moment d'inertie par rapport à l'axe, c'est-à-dire $2m \times \frac{1}{2} R^2 \omega^2 = m R^2 \omega^2$; mais, puisque le fil s'enroule sans glisser sur le cylindre, $R\omega$ est égale à la vitesse commune v de P et Q, et la force vive du cylindre est mv^2. Appliquons le théorème du travail à un déplacement infiniment petit du système

$$(1) \qquad d\frac{1}{2}(p+q+m)v^2 = g(p-q)\,dx - \frac{v^2}{c}\,dx,$$

Supposons $p > q$, et faisons

$$cg(p-q) = k^2, \quad p+q+m = \mu;$$

on aura

$$\frac{1}{2}\frac{c\mu\, d.v^2}{k^2 - v^2} = dx, \quad \mathrm{L}\frac{k^2 - v^2}{k^2 - a^2} = -\frac{2x}{c\mu}, \quad v^2 = k^2 + (a^2 - k^2)e^{-\frac{2x}{c\mu}}.$$

Si $a < k$, v croît constamment, pour devenir égal à k quand x est infini; si au contraire $a > k$, la vitesse décroîtra pour devenir égale à k à la limite : le mouvement aura lieu indéfiniment dans le même sens, tant du moins que le permet la longueur du fil. On peut avoir x en fonction du

temps, car la dernière équation donne évidemment

$$dt = dx\left[k^2 + (a^2 - k^2)\, e^{-\frac{2x}{c\mu}}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{kt}{c\mu} = \mathrm{L}\,\frac{ke^{\frac{x}{c\mu}} + \sqrt{k^2 e^{\frac{2x}{c\mu}} + a^2 - k^2}}{k + a},$$

$$(k + a)\, e^{\frac{kt}{c\mu}} + (k - a)\, e^{-\frac{kt}{c\mu}} = 2\, ke^{\frac{x}{c\mu}}.$$

Revenons à l'équation (1) dans le cas où $p < q$, et faisons $cg(p - q) = -k^2$; on aura, comme dans le premier cas,

$$\frac{c\mu\, d.v^2}{k^2 + v^2} = -2\, dx, \quad v^2 = (a^2 + k^2)\, e^{-\frac{2x}{c\mu}} - k^2.$$

La vitesse est d'abord égale à a, mais elle va en diminuant et s'annule quand

$$(a^2 + k^2)\, e^{-\frac{2x}{c\mu}} = k^2, \quad x = \frac{c\mu}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{a^2 + k^2}{k^2}.$$

On sépare les variables comme précédemment, et l'on trouve

$$dt = e^{\frac{x}{c\mu}}\, dx\left[a^2 + k^2 - k^2 e^{\frac{2x}{c\mu}}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{kt}{c\mu} = \arcsin\frac{ke^{\frac{x}{c\mu}}}{\sqrt{a^2 + k^2}} - \arcsin\frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}}.$$

La valeur de x pour laquelle v s'annule rend le premier terme du second membre égal à $\frac{\pi}{2}$, et l'on a pour le temps que P mettra à descendre

$$t = \frac{c\mu}{k}\arccos\frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}}.$$

A partir de ce moment, c'est Q qui descendra; on ne pourra plus employer les formules précédentes, mais la quantité dont Q descend se calcule par les formules du premier cas, en changeant p en q, et faisant $a = 0$.

Supposons en dernier lieu $p = q$; l'équation (1) devient

$$\frac{d.v^2}{v^2} = -\frac{2\,dx}{c\mu}; \quad \text{d'où} \quad v = ae^{-\frac{x}{c\mu}};$$

la vitesse diminue indéfiniment, mais elle ne s'annule que pour x infini; en remplaçant v par sa valeur, il vient

$$e^{\frac{x}{c\mu}}\,dx = a\,dt, \quad t = \frac{c\mu}{a}\left(e^{\frac{x}{c\mu}} - 1\right).$$

La tension de l'un des cordons se calcule en appliquant l'équation du travail au déplacement infiniment petit d'une des masses qui le terminent. Soit le cordon qui porte le poids P,

$$d.pv^2 = 2\,pg\,dx - 2\,\mathrm{T}\,dx - 2\frac{v^2}{c'}\,dx.$$

La valeur de T s'obtient aisément, mais n'a rien de remarquable.

162. *Un fil inextensible et sans masse passe sur deux très-petites poulies* A *et* B *situées sur une horizontale, et porte à ses extrémités deux poids égaux* P. *Au milieu de* AB *on pose sur le fil un poids* Q, *et on l'abandonne sans vitesse initiale. Quel est le mouvement du système? Cas où* Q *est beaucoup plus petit que* P.

Le poids Q tend à suivre la verticale de son point de départ, et, comme l'action du fil est symétrique par rapport à cette verticale, rien n'en fera dévier le mobile. Soient donc z la quantité dont il descend et x celle dont montent en même temps les poids P, AB $= 2a$, q la masse de Q,

p celle de P. Le théorème des forces vives donne immédiatement

$$2p\frac{dx^2}{dt^2}+q\frac{dz^2}{dt^2}=2g(qz-2px).$$

Or x est égal à l'accroissement de la distance de Q à la poulie A :

$$x=\sqrt{a^2+z^2}-a,\quad z=\sqrt{x^2+2ax},\quad dz=\frac{(x+a)dx}{\sqrt{x^2+2ax}}.$$

Remplaçons z dans l'équation des forces vives

$$(1)\quad \left[2p+q\frac{(a+x)^2}{2ax+x^2}\right]\frac{dx^2}{dt^2}=2g\left[q\sqrt{x^2+2ax}-2px\right].$$

x est d'abord >0 pour que $\sqrt{x^2+2ax}$ soit réel; mais, pour que le second membre de l'équation précédente reste positif, on doit avoir

$$(2)\qquad q^2(x^2+2ax)>4p^2x^2,\quad x(4p^2-q^2)<2aq^2.$$

Quand $2p$ est $<q$, l'inégalité est toujours satisfaite, et le mouvement se continue indéfiniment dans le même sens, et, quand x devient très-grand, on a sensiblement

$$(2p+q)\frac{dx^2}{dt^2}=2gx(q-2p);$$

c'est dire que le mouvement se rapproche du mouvement uniformément accéléré. Lorsque $2p>q$, x a une limite supérieure $\frac{2aq^2}{4p^2-q^2}$ à laquelle correspond la valeur

$$z=\frac{4apq}{4p^2-q^2}.$$

Pour étudier ce cas, il convient de transformer l'équation (1); or les inégalités (2) montrent que $\frac{x}{2a+x}$ est

compris entre zéro et $\frac{q^2}{4p^2}$. Posons donc

$$\frac{x}{2a+x}=\frac{q^2}{4p^2}u^2,\quad \frac{q}{2p}=\varepsilon,$$

d'où

$$x=\frac{2a\varepsilon^2u^2}{1-\varepsilon^2u^2},\quad 2a+x=\frac{2a}{1-\varepsilon^2u^2},\quad dx=\frac{4a\varepsilon^2u\,du}{(1-\varepsilon^2u^2)^2}.$$

Substituant dans l'équation (1), il vient, après quelques réductions,

$$\frac{1+2\varepsilon(2+\varepsilon)u^2+\varepsilon^4u^4}{(1-\varepsilon^2u^2)^3(u-u^2)}\,a\varepsilon\frac{du^2}{dt^2}=g.$$

On ne peut effectuer la quadrature, mais on reconnaît que u partant de zéro croîtra jusqu'à 1 pour décroître ensuite jusqu'à zéro, revenir à 1, et ainsi de suite : la durée de ces oscillations est constante. Si l'on néglige les termes en ε^2, on a une valeur approchée de t en x

$$dt=\sqrt{\frac{a\varepsilon}{g}}\,\frac{1+2\varepsilon u^2}{\sqrt{u-u^2}}du,$$

$$t=\sqrt{\frac{a\varepsilon}{g}}\left[\left(1+\frac{3\varepsilon}{4}\right)\arccos(1-2u)-\varepsilon\frac{2u+3}{2}\sqrt{u-u^2}\right].$$

La durée d'une demi-oscillation est

$$T=\pi\sqrt{\frac{a\varepsilon}{g}}\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon\right).$$

La tension F du cordon se trouve en appliquant le théorème des forces vives à un déplacement infiniment petit de l'un des poids P;

$$d.p\frac{dx^2}{dt^2}=2(F-pg)dx,\quad F=pg+\frac{d}{dx}\frac{1}{2}p\frac{dx^2}{dt^2}.$$

La dérivée de $\frac{dx^2}{dt^2}$ se déduit immédiatement de la valeur donnée par (1) : elle est d'ailleurs très-compliquée ; je dirai seulement qu'elle est nulle pour $x = 0$ et égale à

$$\frac{8pq^2g}{32p^3q + (4p^2 + q^2)^2},$$

quand x atteint son maximum.

163. *Une planche très-mince, de forme quelconque, est posée sur un cylindre droit horizontal sur lequel elle ne peut que rouler sans glisser; déterminer la loi de ses oscillations quand on l'écarte de sa position d'équilibre.*

On reconnaît d'abord que, dans la position d'équilibre, le centre de gravité G doit se trouver sur la génératrice de contact. En effet, le moment de la réaction du cylindre par rapport à cette droite est nul ; il en doit être de même du moment du poids ; cela exige, ou que G soit sur la génératrice, ou que la planche soit verticale. Or cette dernière position ne peut être une position d'équilibre ; car il faudrait que le coefficient de frottement sur le cylindre fût infini. Soit A le point du cylindre qui coïncide avec G dans la position d'équilibre. La planche roulant sur le cylindre sans glisser ni pivoter, le point G ne sort pas de la section droite menée par A et décrit une développante de cette section. Prenons pour axes l'horizontale et la verticale menées par le centre de cette section, et désignons par α l'angle du rayon OA avec la verticale, et par θ l'angle du même rayon avec celui qui va au point de contact variable I ; l'angle de ce rayon OI avec la verticale ascendante est $\alpha + \theta$.

Pour évaluer la force vive, cherchons celle qui correspondrait à une masse égale à la masse m de la planche ac-

cumulée en G. Le mouvement de cette planche est une rotation instantanée avec la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ autour de la génératrice I, et, comme $IA = R\theta$, la première partie de la force vive est $mR^2\theta^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$. Il faut y joindre la force vive correspondant au mouvement relatif au centre de gravité, qui est encore un mouvement de rotation; si k est le rayon de gyration de la planche par rapport à l'axe mené en G parallèlement à la génératrice I, la seconde partie de la force vive est $mk^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$. D'autre part, l'ordonnée du point G, qui fera connaître le travail de la pesanteur, s'obtient en projetant OI et IG sur la verticale :

$$y = R\cos(\theta + \alpha) + R\theta\sin(\theta + \alpha).$$

L'équation des forces vives est donc, H désignant une constante,

$$(1)\quad m(R^2\theta^2 + k^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = H - 2mgR[\cos(\theta + \alpha) + \theta\sin(\theta + \alpha)].$$

On ne peut effectuer l'intégration; mais, si l'on appelle ω la vitesse angulaire pour $\theta = 0$, il est facile de voir si la planche pourra devenir verticale. Avec cette donnée, l'équation (1) prend la forme

$$(R^2\theta^2 + k^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = k^2\omega^2 + 2gR[\cos\alpha - \cos(\theta + \alpha) - \theta\sin(\theta + \alpha)].$$

Le second membre décroît quand θ augmente de zéro à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Pour que la planche atteigne la verticale, il faut donc

$$k^2\omega^2 + 2gR\left(\cos\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \geq 0.$$

Quand cette inégalité n'est pas vérifiée, la planche s'arrête pour une valeur de θ égale à β; l'équation (1) peut s'écrire

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} (R^2\theta^2 + k^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2Rg[&\cos(\beta+\alpha) + \beta\sin(\beta+\alpha) \\ &- \cos(\theta+\alpha) - \theta\sin(\theta+\alpha)]. \end{aligned} \right.$$

Pour que le second membre reste positif, il faut que θ varie entre β et une valeur comprise entre zéro et $-\beta$, car, pour $\theta = 0$, la quantité entre crochets est > 0, comme étant plus grande que

$$\cos(\beta+\alpha) + \sin\beta\sin(\beta+\alpha) - \cos\alpha,$$

qui est $(1-\cos\beta)\cos(\beta+\alpha)$; pour $\theta = -\beta$, elle devient

$$2\beta\sin\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta < 0.$$

Il est remarquable dans tous les cas que le mouvement ne dépende pas de la forme de la planche, mais seulement de k^2. Quand β est très-petit, et par suite θ, on peut développer $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ par la formule de Taylor, et, en se bornant aux termes principaux, avoir

$$k^2\frac{d\theta^2}{dt^2} = Rg(\beta^2 - \theta^2)\cos\alpha, \quad \theta = \beta\cos\frac{t\sqrt{Rg\cos\alpha}}{k};$$

les petites oscillations sont isochrones entre elles et à celles d'un pendule de longueur $\frac{k^2}{R\cos\alpha}$. En observant le temps d'une de ces oscillations, on peut en déduire soit R, soit k.

Si l'on veut calculer la réaction normale N et la réaction tangentielle T du cylindre, on projettera sur OI et sur la tangente en I l'accélération du centre de gravité multipliée par m; ces projections sont égales aux projections correspondantes du poids mg, augmentées de N sur OI, de T sur

la tangente. A l'époque t, la vitesse de G est égale à $R\theta\frac{d\theta}{dt}$ et parallèle à OI; à l'époque $t+dt$, elle est

$$R\left(\theta\frac{d\theta}{dt}+d.\theta\frac{d\theta}{dt}\right),$$

et fait l'angle $d\theta$ avec OI. La différence entre les projections de ces vitesses, divisée par dt, donne les projections de l'accélération, et l'on trouve

$$mR\left(\frac{d\theta^2}{dt^2}+\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)=N-mg\cos(\theta+\alpha),$$

$$mR\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}=T+mg\sin(\theta+\alpha).$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ s'obtient en différentiant l'équation (2) par rapport au temps, et divisant ensuite par $2\frac{d\theta}{dt}$.

Quand on ne suppose pas le glissement absolument impossible, il faut, pour que le mouvement ait lieu comme il a été dit, que T reste $<fN$; sinon il y a glissement, et l'on a tout un autre problème à résoudre.

Mouvement du centre de gravité.

164. *Une chaîne homogène, attachée à une masse m en l'une de ses extrémités* A, *est en partie pelotonnée sur un point* B *d'un plan horizontal; on a communiqué à m une certaine vitesse* v_0, *de manière qu'une portion de la chaîne s'est déroulée; cette portion est en ligne droite et dans le prolongement de la vitesse du point* A. *On admet que la portion restante se déroule sans effort, et l'on demande le mouvement du point* A. (*Smith's prize*, 1870, *solved by professor Cayley*.)

Le mouvement cherché est évidemment rectiligne. Soient x la distance de A à B à l'époque t, v la vitesse de A, a la valeur initiale de x, μ la masse de l'unité de longueur de la chaîne, $a+b$ sa longueur totale. Puisque la chaîne se déroule sans résistance, la projection de la quantité de mouvement sur la direction AB sera constante; donc

$$(1) \qquad v(\mu x + m) = v_0(\mu a + m),$$

et, comme $v = \frac{dx}{dt}$, on intègre immédiatement

$$\mu x^2 + 2mx - \mu a^2 - 2ma = 2(\mu a + m)v_0 t.$$

Cette équation donne le temps que la chaîne met à se dérouler :

$$\frac{\mu(2ab + b^2) + 2mb}{2(\mu a + m)v_0}.$$

L'équation (1) montre que, après ce temps, la vitesse est $v_0 \frac{\mu a + m}{\mu(a+b) + m}$; la force vive correspondante est

$$v_0^2 \frac{(\mu a + m)^2}{\mu(a+b) + m} = v_0^2(\mu a + m)\left[1 - \frac{\mu b}{\mu(a+b) + m}\right].$$

Ce n'est qu'une portion de la force vive initiale; la perte est due aux petits chocs que produisaient les divers éléments de la chaîne passant d'une vitesse nulle à une vitesse finie. La chaîne, une fois déroulée, prend un mouvement uniforme.

La tension au point C, qui est à la distance c de l'extrémité A de la chaîne, se calcule en appliquant le théorème des forces vives à un petit déplacement de CA :

$$d(\mu c + m)v^2 = -2T dx, \quad T = \frac{\mu(\mu c + m)(\mu a + m)^2}{(\mu x + m)^3} v_0^2.$$

Quand toute la chaîne est déroulée, il est évident que le mouvement devient rectiligne et uniforme, la tension nulle.

165. *Une tige rigide dont la masse est négligeable porte à ses extrémités* A *et* B *deux masses égales à* m; *la masse* A *est assujettie à glisser sur une droite* PQ *parfaitement polie faisant l'angle* i *avec l'horizon. Mouvement du système en supposant sa position et sa vitesse initiales, telles que* AB *ne sorte pas du plan vertical de la droite* PQ; *pression exercée sur* PQ *et tension de* AB.

Je prends PQ pour axe des x, et pour axe des y une perpendiculaire située dans le même plan vertical et dirigée vers le bas; je pose $AB = 2a$, je désigne son milieu par C et son angle avec l'axe des y par θ; j'appelle x l'abscisse de C; quant à son ordonnée, c'est $y = a\cos\theta$.

Le centre de gravité C du système se meut comme un point de masse $2m$, auquel serait appliquée une force verticale $2mg$ et une force $-$ N parallèle à OY; les équations de son mouvement sont donc

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = g\sin i, \quad 2m\frac{d^2y}{dt^2} = 2mg\cos i - N.$$

La première s'intègre immédiatement

$$\frac{dx}{dt} = c + gt\sin i, \quad x = x_0 + ct + \frac{1}{2}gt^2\sin i.$$

La projection de C sur PQ a donc un mouvement uniformément accéléré. Quant à θ, on peut le déduire du théorème des forces vives. La force vive du système est celle qui correspond à la masse $2m$ concentrée en C, plus celle qui correspond au mouvement relatif autour de C. La seule force qui donne du travail est la pesanteur, et son travail est le même que si toute la masse était réunie en C : si donc

α et ω sont les valeurs initiales de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$, on aura

$$2m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+a^2\sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}+a^2\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)$$
$$=2m(c^2+a^2\omega^2\sin^2\alpha+a^2\omega^2)$$
$$+4mg[(x-x_0)\sin i+a(\cos\theta-\cos\alpha)\cos i].$$

Remplaçons $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur; tout ce qui dépend de la valeur de x disparaît (¹), et il vient, en divisant par $2ma$,

$$(2)\quad a(1+\sin^2\theta)\frac{d\theta^2}{dt^2}=a(1+\sin^2\alpha)\omega^2+2g\cos i(\cos\theta-\cos\alpha).$$

Posons $a(1+\sin^2\alpha)\omega^2-2g\cos i\cos\alpha=2gh\cos i$, on aura

$$(2)\qquad a\frac{d\theta^2}{dt^2}=2g\cos i\,\frac{\cos\theta+h}{1+\sin^2\theta}.$$

Nous n'avons pas eu à dire dans quel sens on comptait les valeurs positives de θ; il en résulte que le mouvement relatif autour de C est symétrique par rapport à une droite perpendiculaire à PQ, et qu'on peut supposer que θ soit d'abord croissant. La constante h est, par sa forme même, >-1; mais elle peut être $\gtrless 1$. Si $h>1$, $d\theta$ ne pourra s'annuler, en sorte que θ croîtra indéfiniment, les révolutions relatives de AB se faisant dans un temps constant. La trajectoire du point B sera une courbe sinueuse, comprise

(¹) Cette réduction pouvait se prévoir; car, si l'on cherche le mouvement relatif à deux axes dont l'un coïnciderait avec PQ, l'autre lui serait perpendiculaire et passerait par C; les forces apparentes qu'il faudrait introduire seraient deux forces $-mg\sin i$, parallèles à PQ, appliquées à A et B; mais ces forces se réuniraient en une seule $-2mg\sin i$, appliquée en C, et dont le travail détruit précisément celui de la composante de la pesanteur suivant PQ.

entre deux droites parallèles à PQ, à une distance $2a$, de part et d'autre; mais les points de rencontre de la courbe avec PQ deviennent de plus en plus espacés.

La valeur $h = 1$ ne permet pas d'intégrer l'équation (2); mais, en l'adoptant, θ croîtra jusqu'à π, pour n'y arriver qu'après un temps infini.

Quand $h < 1$, on peut le faire égal à $-\cos\beta$, et θ oscillera entre les valeurs β et $-\beta$ pendant des intervalles égaux, mais plus longs que ceux d'un pendule simple, de longueur a, oscillant entre les mêmes limites. Quand β est très-petit, on peut, dans la formule (2), négliger les termes du deuxième ordre par rapport à ceux qu'on a dans chaque membre, et, se rappelant que $h = -\cos\beta$, on a

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\beta^2 - \theta^2}} = dt\sqrt{\frac{g\cos i}{a}}, \quad t = \sqrt{\frac{a}{g\cos i}}\arcsin\frac{\theta}{\beta};$$

les oscillations très-petites se confondent avec celles du pendule de longueur $\frac{a}{\cos i}$.

On peut aller jusqu'à la limite, -1, de h. Son expression montre que cela exige une double condition, $\omega = 0$, $\alpha = 0$, c'est-à-dire que, à l'origine, AB soit perpendiculaire à PQ et animée d'une vitesse de translation parallèle à cette droite. Dans ce cas, θ doit rester constamment nul; AB est toujours perpendiculaire à PQ, et se déplace d'un mouvement uniformément accéléré.

La pression exercée sur la droite PQ est donnée par la seconde équation (1)

$$N = 2m\left(g\cos i - \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 2m\left(g\cos i + a\cos\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} + a\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

L'équation (2) donne $\frac{d\theta}{dt}$; en différentiant ses deux mem-

bres et divisant par $\frac{d\theta}{dt}$, on trouve

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\cos i\sin\theta\frac{2+\cos^2\theta+2h\cos\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}.$$

Substituant dans la valeur de N et réduisant,

$$N = 2mg\cos i\frac{\cos^2\theta+2h\cos\theta+2}{(1+\sin^2\theta)^2}.$$

Le numérateur est positif quand $\cos\theta$ l'est lui-même, puisque $h > -1$. Si on le regarde comme un trinôme du deuxième degré en $\cos\theta$, on trouve que les deux valeurs qui pourraient l'annuler ont pour produit 2; l'une au moins est inadmissible, et, pour que l'autre soit acceptable, elle doit être comprise entre zéro et -1; le numérateur doit être négatif pour $\cos\theta = -1$, ce qui donne $h > \frac{3}{2}$. C'est donc seulement quand la rotation relative autour de C est continue et assez rapide que N peut devenir négatif.

La tension F de la barre AB s'obtient en exprimant que N est la résultante du poids de A estimé suivant OY et de la composante de F suivant la même direction; on a ainsi

$$N = mg\cos i + F\cos\theta,$$

d'où

$$F = \frac{N - mg\cos i}{\cos\theta} = mg\cos i\frac{4h+6\cos\theta-\cos^3\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}.$$

Le numérateur diminue quand θ augmente; si $h < 1$, θ ne peut augmenter que jusqu'à la valeur β, dont le cosinus est $-h$; or, pour cette valeur, le numérateur est $\cos\beta(2-\cos^2\beta)$; si donc $\beta < \frac{\pi}{2}$, F est toujours positif;

quand β est $> \frac{\pi}{2}$, F devient nul et négatif. Il en sera de même quand h sera > 1, mais $< \frac{5}{4}$. En résumé, F ne peut devenir négatif que si h est compris entre zéro et $\frac{5}{4}$.

166. *Sur un plan horizontal, parfaitement poli, repose un parallélépipède rectangle; dans la section verticale médiane, on a creusé un canal de forme connue dans lequel peut glisser sans frottement une petite masse m. On suppose que le prisme soit d'abord immobile et qu'on laisse tomber m en un point connu du canal, et l'on demande le mouvement du système, en admettant que le prisme aura un mouvement de translation parallèle au plan du canal; cas où ce canal est une cycloïde convexe vers le bas, et où l'on néglige le carré du rapport de la masse m à la masse* M *du prisme.* (Licence, 1871.)

Prenons des axes coordonnés dans le plan du canal, l'origine au point de départ de m, OX horizontal, OY dans le sens de la pesanteur; les coordonnées relatives du point m sont liées par l'équation du canal $f(x, y) = 0$. Considérons, au contraire, des axes fixes qui auraient coïncidé avec les axes mobiles à l'origine du mouvement, et désignons par x_1 la quantité dont le point O du prisme s'est déplacé horizontalement; les coordonnées absolues de m sont $x + x_1$ et y. Cela posé, le problème n'a que deux inconnues, x_1, et l'une des quantités x, y ou un paramètre qui les détermine. Or le système du prisme et de m n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur et à la réaction verticale du plan fixe; le centre de gravité, d'abord immobile, restera sur une verticale, ce qui donne, après une simplification évidente,

$$(1) \qquad \mathrm{M}x_1 + m(x + x_1) = 0.$$

Le théorème des forces vives fournit la seconde équation

nécessaire

$$M\frac{dx_1^2}{dt^2}+m\left(\frac{dx_1^2}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}\right)=2mgy.$$

Il suffit de remplacer $\frac{dx_1}{dt}$ par sa valeur obtenue en différentiant (1) pour avoir une relation entre x, y et t, c'est-à-dire pour déterminer en fonction de t le lieu occupé par m dans le canal; on a ainsi

$$(2)\qquad \frac{M}{M+m}\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}=2gy.$$

Connaissant x et y en fonction de t, on a x_1 à l'aide de l'équation (1), et le problème est résolu.

Quand le tube est cycloïdal, on peut écrire

$$x=a(u-\sin u),\quad y=a(1-\cos u);$$

et, si l'on pose $m=M\varepsilon$, l'équation (2) devient

$$a\left[\frac{1}{1+\varepsilon}(1-\cos u)^2+\sin^2 u\right]\frac{du^2}{dt^2}=2g(1-\cos u).$$

Je divise par $1-\cos u$, et je sépare les variables,

$$(3)\qquad dt\sqrt{\frac{g}{a}}=\pm du\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sin^2\frac{1}{2}u}.$$

On est conduit à effectuer une intégrale elliptique de deuxième espèce; mais la forme de l'équation montre que u, qui croît d'abord, ira jusqu'à 2π, sans dépasser cette limite si le tube est formé d'une seule branche de cycloïde; du deviendra ensuite négatif, et u décroîtra jusqu'à zéro pour croître de nouveau. Le temps de ces oscillations est constant, et la moitié correspond à la descente, l'autre

moitié à la montée de m. Les coordonnées absolues de m sont

$$x + x_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) x = \frac{a}{1+\varepsilon}(u - \sin u), \quad y = a(1 - \cos u);$$

la trajectoire absolue est la cycloïde donnée, dont on aura réduit les abscisses dans le rapport de 1 à $1+\varepsilon$. Le prisme a un mouvement oscillatoire en arrière, avec une amplitude égale à $\frac{2\pi a\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

La pression exercée par m sur le prisme s'obtient en écrivant que c'est elle qui produit l'accélération horizontale du prisme. Comme elle fait, avec la partie positive de l'axe des x, l'angle $\pi - \frac{1}{2}u$, on aura

$$\begin{aligned} -\mathrm{N}\cos\frac{1}{2}u &= \mathrm{M}\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{m}{1+\varepsilon}\frac{d^2x}{dt^2} \\ &= -\frac{ma}{1+\varepsilon}\left[(1-\cos u)\frac{d^2u}{dt^2} + \sin u\frac{du^2}{dt^2}\right]; \end{aligned}$$

mais l'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{du^2}{dt^2} = \frac{g}{a(1+\varepsilon\cos^2\frac{1}{2}u)};$$

d'où

$$\frac{2}{1+\varepsilon}\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{g\varepsilon\sin\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}u}{a(1+\varepsilon\cos^2\frac{1}{2}u)^2}.$$

Substituant dans N et réduisant, on trouve une valeur essentiellement positive

$$\mathrm{N} = mg\sin\frac{1}{2}u\,\frac{2+\varepsilon+\varepsilon\cos^2\frac{1}{2}u}{(1+\varepsilon\cos^2\frac{1}{2}u)^2}.$$

Quand on néglige le carré de ε, l'équation (3) devient

intégrable :

$$(4)\quad dt\sqrt{\frac{g}{a}}=du\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\sin^2\frac{1}{2}u\right),\quad t\sqrt{\frac{g}{a}}=u-\frac{\varepsilon u}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\sin u.$$

Le temps d'une oscillation est $4\pi\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)\sqrt{\frac{a}{g}}$. L'équation (4) donne, par le retour des suites,

$$u=t\sqrt{\frac{g}{a}}+\frac{\varepsilon}{4}t\sqrt{\frac{g}{a}}-\frac{\varepsilon}{4}\sin t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

On peut dire que c'est l'expression de la loi du mouvement. Les coordonnées x, y, x_1 s'obtiennent en y remplaçant u par sa valeur et développant par la formule de Taylor suivant les puissances de ε.

Principe des aires.

167. *Étant donnés trois points matériels* A, B, C, *qui s'attirent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances, on demande de leur donner une position et des vitesses initiales telles, que les trois points restent constamment en ligne droite; quelles sont alors leurs trajectoires?* (Licence, 1858.)

Le système n'étant supposé soumis à l'action d'aucune force extérieure, son centre de gravité O se meut uniformément sur une droite, et le mouvement relatif par rapport à des axes de direction constante, menés par O, se traitera comme un mouvement absolu, sans que l'on ait à introduire des forces fictives. Dans ce mouvement relatif, le plan du maximum des aires reste invariable; or, les trois mobiles restant sur une droite qui tourne autour du point O, le plan du maximum des aires est à chaque instant celui de deux positions infiniment voisines de la droite ABC; il faut

donc que cette droite reste dans un plan fixe, que nous prendrons pour plan de coordonnées, avec O pour pôle et la position initiale de ABC pour axe.

Soient à l'époque t, r, r_1, r_2 les rayons vecteurs de A, B, C; θ leur angle polaire commun; λ, μ, ν leurs masses respectives; le principe des aires est applicable à chacun des corps séparément et donne

$$r^2 d\theta = a^2 dt, \quad r_1^2 d\theta = b^2 dt, \quad r_2^2 d\theta = c^2 dt;$$

on en déduit

$$(1) \qquad \frac{r^2}{a^2} = \frac{r_1^2}{b^2} = \frac{r_2^2}{c^2}.$$

Les rayons vecteurs conservent des rapports constants, et les trajectoires sont des courbes homothétiques. Les vitesses seront toujours parallèles et leurs rapports seront les mêmes que ceux des distances des points au centre de gravité O, c'est-à-dire qu'ils seront invariables. Il faut donc que, à l'origine, A, B, C soient en ligne droite, animés de vitesses parallèles et proportionnelles à OA, OB, OC; c'est, bien entendu, des vitesses par rapport au centre de gravité qu'il s'agit.

Mais ce n'est pas tout : si je désigne par u^2 la valeur commune des rapports (1), on aura

$$r = \pm au, \quad r_1 = \pm bu, \quad r_2 = \pm cu.$$

Pour que le point O soit le centre de gravité, il faut que les trois points ne soient pas d'un même côté par rapport à O. Supposons que A et B soient d'un même côté, C de côté opposé; on devra prendre les deux premiers signes $+$ et le troisième $-$; on pourra aussi prendre $r_2 = cu$, à condition de prendre $\theta + \pi$ pour angle polaire de C. Pour que O soit centre de gravité, il faut

$$(2) \qquad \lambda a + \mu b - \nu c = 0.$$

L'équation des aires se réduit, pour les trois corps, à

$$u^2 d\theta = dt.$$

Cherchons les composantes de l'accélération des trois corps suivant leurs rayons vecteurs : en appelant f l'attraction des unités de masse à l'unité de distance, on a pour le point A

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\frac{f\mu}{(r-r_1)^2} - \frac{f\nu}{(r+r_2)^2}$$

ou

$$a\left(\frac{d^2 u}{dt^2} - u\frac{d\theta^2}{dt^2}\right) = -\frac{f}{u^2}\left[\frac{\mu}{(a-b)^2} + \frac{\nu}{(a+c)^2}\right].$$

On aurait de même pour B et C, B étant entre A et C,

$$b\left(\frac{d^2 u}{dt^2} - u\frac{d\theta^2}{dt^2}\right) = -\frac{f}{u^2}\left[\frac{\nu}{(b+c)^2} - \frac{\lambda}{(a-b)^2}\right],$$

$$c\left(\frac{d^2 u}{dt^2} - u\frac{d\theta^2}{dt^2}\right) = -\frac{f}{u^2}\left[\frac{\lambda}{(a+c)^2} + \frac{\mu}{(b+c)^2}\right].$$

Pour que ces équations soient compatibles, on doit avoir

$$(3)\qquad \frac{\dfrac{\mu}{(a-b)^2} + \dfrac{\nu}{(a+c)^2}}{a} = \frac{\dfrac{\nu}{(b+c)^2} - \dfrac{\lambda}{(a-b)^2}}{b} = \frac{\dfrac{\lambda}{(a+c)^2} + \dfrac{\mu}{(b+c)^2}}{c}.$$

L'équation (2) est une conséquence de celles-ci; car, si l'on y remplace a, b, c par les quantités proportionnelles (3), elle est identiquement satisfaite. D'ailleurs, en tenant compte de cette équation (2), on trouve que le système (3) se réduit à une seule équation, où n'entrent pas les masses,

$$(4)\qquad \frac{a}{(b+c)^2} - \frac{b}{(a+c)^2} - \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Étant données les positions initiales des trois corps, l'é-

quation (2) permet d'en trouver le centre de gravité, et l'on peut s'assurer si la condition (4) est remplie. Dans ce cas, les trois mobiles décrivent des coniques homothétiques ayant O pour foyer commun, et les lois de leurs mouvements relatifs sont tout à fait analogues à celles du mouvement des planètes. Quant aux trajectoires absolues, ce sont des sortes d'hélices sur des cylindres à base du second degré, courbes que M. Léopold Hugo a proposé de nommer *ovhélites*.

168. *Une barre* AB, *de poids* P, *de longueur* $2a$, *homogène, s'appuie par ses deux extrémités contre un plan horizontal et un plan vertical parfaitement polis; elle est dans un plan perpendiculaire à leur intersection en* O, *et primitivement maintenue en repos. Un animal* M, *de poids* Q, *peut se mouvoir le long de cette tige, qui lui fournira une réaction longitudinale pour accélérer son mouvement. Quelle doit être la loi de ce mouvement pour que* AB, *abandonné à lui-même, ne glisse pas le long des plans qui le soutiennent? L'animal est d'abord immobile à l'extrémité supérieure* B *de la perche.* (W. Walton.)

On suppose que l'animal puisse se donner un mouvement continu. Soit x le chemin BM qu'il a parcouru, à l'époque t, sur la perche, l'angle de AB avec l'horizon étant α. Les réactions des plans d'appui se rencontrent en un point C, quatrième sommet, du rectangle formé sur AOB. La dérivée du moment de la quantité de mouvement de l'animal et de la barre par rapport au point C est égale à la somme des moments des forces agissant sur le système. Le seul point en mouvement est M; les réactions des plans ont un moment nul; l'action que M reçoit de AB est une force intérieure, et l'on a

$$\frac{Q}{g} a \sin 2\alpha \frac{d^2x}{dt^2} = aP\cos\alpha + (2a - x)\,Q\cos\alpha$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{2a\sin\alpha} = g\frac{P+2Q}{2Q\sin\alpha}.$$

Intégrons en tenant compte de ce que, pour $t = 0$, x et dx sont nuls,

$$x = \frac{P+2Q}{Q}a\left(1 - \cos t\sqrt{\frac{g}{2a\sin\alpha}}\right),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P+2Q}{Q}\sqrt{\frac{ag}{2\sin\alpha}}\sin t\sqrt{\frac{g}{2a\sin\alpha}};$$

M devra parcourir un espace $2a\frac{P+2Q}{Q}$, ce qui ne peut s'interpréter qu'en supposant à AB un prolongement rigide, mais sans masse, au delà de A. Si P est négligeable par rapport à Q, le maximum de la vitesse est environ $\sqrt{\frac{2ag}{\sin\alpha}}$; pour $a = 2^m$, $\alpha = 60°$, c'est près de 7 mètres par seconde.

La réaction longitudinale de la barre sur M se calcule en écrivant que cette force avec la composante de Q produit l'accélération de M; il en résulte

$$F = \frac{Q}{g}\frac{d^2x}{dt^2} - Q\sin\alpha = \frac{P+2Q}{2\sin\alpha}\cos t\sqrt{\frac{g}{2\sin\alpha}} - Q\sin\alpha.$$

Cette force, d'abord positive, devient bientôt négative; le travail correspondant à la descente de M est d'ailleurs négatif. Puisque la force vive est nulle au commencement et à la fin, il faut que le travail de F soit égal et de signe contraire au travail du poids Q; ce travail est donc

$$-2a(P+2Q)\sin\alpha = \int F\,dx.$$

Pour avoir la réaction verticale exercée par le plan horizontal, il suffit de prendre les moments des forces extérieures et de la quantité de mouvement par rapport au

point B; le moment de la quantité de mouvement est nul, et l'on a

$$(Pa + Qx)\cos\alpha - 2aN\cos\alpha = 0, \quad N = \frac{Pa + Qx}{2a}.$$

La réaction du plan vertical se trouve d'une manière analogue

$$N_1 = \frac{Pa + Q(2a - x)}{2a}\cot\alpha.$$

169. *Une tige homogène* AB, *de masse* μ, *de longueur* $2a$, *est assujettie à tourner autour de son milieu* O *dans un plan horizontal; sur cette tige peut glisser un anneau* M, *de masse* m, *attiré vers* O *par une force proportionnelle à la distance. Déterminer le mouvement du système, connaissant, à l'origine du temps, la vitesse angulaire de la barre* ω, *la distance* c *de* M *à* O *et la vitesse* u *de glissement de* M *sur* AB. *Cas où* $\mu = 3m$, $c = a$, $u = 0$.

(Licence, 1870.)

La position de la barre est déterminée à chaque instant par l'angle θ qu'elle fait avec sa direction initiale, et la position de M sera connue si l'on donne sa distance r au point O. Les forces extérieures sont l'attraction de O et la réaction du même point sur la barre; la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à ce point est constante, ou, si l'on veut, le théorème des aires est vérifié. Le moment de la quantité de mouvement de AB est

$$\frac{d\theta}{dt}\int r^2 d\mu = \frac{1}{3}\mu a^2 \frac{d\theta}{dt};$$

le principe des aires donne

$$(1) \qquad \left(mr^2 + \frac{1}{3}\mu a^2\right)\frac{d\theta}{dt} = \left(mc^2 + \frac{1}{3}\mu a^2\right)\omega.$$

L'équation des forces vives est aussi applicable; si l'attrac-

tion de O sur M est représentée par k^2mr, son travail est $\frac{1}{2}k^2m(c^2-r^2)$, et l'on trouve

$$m\frac{dr^2}{dt^2}+\left(mr^2+\frac{1}{3}\mu a^2\right)\frac{d\theta^2}{dt^2}-mu^2-\left(mc^2+\frac{1}{3}\mu a^2\right)\omega^2$$
$$=k^2m(c^2-r^2).$$

Éliminant $\frac{d\theta}{dt}$ entre ces deux équations et séparant les variables, on trouve

$$(2)\quad dt^2=\frac{(mr^2+\frac{1}{3}\mu a^2)\,dr^2}{\frac{1}{3}\mu a^2(u^2+k^2c^2)-\omega^2c^2(mc^2+\frac{1}{3}\mu a^2)+[m(n^2+c^2\omega^2+c^2k^2)+\frac{1}{3}\mu a^2(\omega^2-k^2)]r^2-mk^2r^4}$$

On ne pourra pas effectuer l'intégration, mais les équations (1) et (2) donnent une idée très-complète du mouvement; la première montre que $d\theta$ ne peut s'annuler ni changer de signe : la tige tourne donc toujours dans le même sens et d'autant moins vite que r^2 est plus grand. Le dénominateur de la seconde doit rester positif, et pour cela r ne doit pas devenir infini. Il y a deux cas à distinguer selon le signe de la partie indépendante de r :

$$H=\frac{1}{3}\mu a^2(u^2+k^2c^2)-\omega^2c^2\left(mc^2+\frac{1}{3}\mu a^2\right).$$

Pour $r=c$, le dénominateur $f(r)$ est égal à

$$\left(mc^2+\frac{1}{3}\mu a^2\right)u^2,\quad >0;$$

pour $r=\infty$, il est <0; il y a toujours une racine r' comprise entre c et ∞, mais, pour $r=0$, $f(r)=H$. Si donc $H<0$, il y aura une racine $r''<c$; le mobile M restera compris entre deux cercles, dont le centre est en O, et dont les rayons sont r', r''; la trajectoire sera formée d'une suite de branches superposables, allant d'un cercle à l'autre en

les touchant aux points communs. Si $H > 0$, il n'y a pas de racine entre c et 0; r à partir de r' pourra décroître jusqu'à zéro, et même prendre des valeurs négatives jusqu'à $-r'$; les branches dont se compose la trajectoire sont limitées au cercle de rayon r', et elles passent toutes à l'origine pour revenir toucher le cercle. Enfin, quand $H = 0$, r pourra croître jusqu'à r', et diminuer ensuite jusqu'à zéro, mais il n'y arrivera qu'après un temps infini, parce que le coefficient de dr contient r en facteur commun au dénominateur, ce qui rend infinie l'intégrale qui a zéro pour limite. D'ailleurs $\frac{d\theta}{dt}$ tend vers $\left(1 + \frac{3mc^2}{\mu a^2}\right)\omega$; la courbe décrite est une spirale asymptote au pôle.

Un cas très-simple est celui où $r' = r''$; et, comme ils sont généralement séparés par c, leur valeur commune est c; $f(c)$ doit être nul, ce qui exige $u = 0$; ensuite le produit des racines de $f(r) = 0$ doit être c^4; donc

$$\omega^2 c^2 \left(mc^2 + \frac{1}{3}\mu a^2\right) - \frac{1}{3}\mu a^2 k^2 c^2 = mk^2 c^4, \quad k^2 = \omega^2;$$

dans ce cas, l'anneau décrit un cercle d'un mouvement uniforme.

Cette discussion s'applique sans modification au cas particulier proposé; seulement une des racines de $f(r) = 0$ est c, ou a : nous n'avons qu'à récrire les équations (1) et (2) avec les simplifications de forme qui résultent des valeurs numériques adoptées, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2a^2\omega}{a^2 + r^2}, \quad dt = \frac{\pm dr\sqrt{a^2 + r^2}}{\sqrt{(k^2 - 2\omega^2)a^4 + 2a^2\omega^2 r^2 - k^2 r^4}}.$$

Quand $\omega = k$, la quantité sous le radical est $-k^2(r^2 - a^2)^2$; on voit que r doit toujours rester égal à a, et le lieu de M est un cercle. Si $k < \omega\sqrt{2}$, le lieu est une courbe lobée

comprise entre deux cercles concentriques de rayons a et $a\sqrt{\frac{2\omega^2}{k^2}-1}$. Les branches passent à l'origine lorsque $k > \omega\sqrt{2}$. Enfin, pour $k = \omega\sqrt{2}$, la trajectoire est une spirale dont l'équation s'obtient en éliminant dt entre les deux équations du mouvement :

$$d\theta = \frac{\pm a^2 dr\sqrt{2}}{r\sqrt{a^4 - r^4}} = \pm\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{a^2 dr}{r^3}\left(\frac{a^4}{r^4}-1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il faut prendre le signe —, parce que r ne peut que décroître à partir de a; on peut mettre l'intégrale sous l'une ou l'autre forme

$$\theta\sqrt{2} = \mathrm{L}\left(\frac{a^2}{r^2}+\sqrt{\frac{a^4}{r^4}-1}\right), \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2a^2}\left(e^{\theta\sqrt{2}}+e^{-\theta\sqrt{2}}\right).$$

Cherchons la pression N de l'anneau sur la barre dans le cas particulier, qui du reste ne diffère pas essentiellement du cas général. L'accélération du mouvement angulaire de AB est due à cette pression. Si donc on prend par rapport à O le moment de l'impulsion de cette force et celui des quantités de mouvement, on a

$$\mathrm{N}\,r\,dt = \frac{1}{3}\mu a^2 d\frac{d\theta}{dt}.$$

Mais

$$d\frac{d\theta}{dt} = -\frac{4a^2\omega r dr}{(a^2+r^2)^2} = \mp\frac{4a^2\omega r dt\sqrt{(k^2-2\omega^2)a^4+2a^2\omega^2r^2-k^2r^4}}{(a^2+r^2)^{\frac{5}{2}}};$$

donc

$$\mathrm{N} = \frac{4}{3}\frac{\mu a^4\omega}{(a^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\sqrt{(k^2-2\omega^2)\omega^4+2a^2\omega^2r^2-k^2r^4}.$$

Comme le centre de gravité de la tige est immobile, et

qu'elle n'est sollicitée que par cette pression N et la réaction du point O, cette réaction est égale et parallèle à N, mais de sens contraire.

170. *On donne un cône droit dont l'axe est vertical et le sommet en haut; un point pesant* M *assujetti à rester sur la surface convexe est attaché à un fil flexible, inextensible et sans masse qui passe dans un très-petit trou* O *au sommet du cône, pour s'enrouler sur une poulie* C *et se terminer par un poids* M'; *trouver le mouvement du système en supposant que* M' *soit d'abord immobile, et que, par suite,* M *ait une vitesse horizontale c.*

(Licence, 1872.)

Soient r la distance OM, θ l'angle dont on a tourné le plan méridien qui contient cette droite, φ le demi-angle du cône, m, m', 2μ les masses de M, M' et de C. Le point M est soumis à la pesanteur, à la réaction du cône et à la traction du fil; ces trois forces étant dans le plan méridien de M, leur moment par rapport à l'axe est nul, et le théorème des aires a lieu pour le mouvement de la projection de M sur un plan horizontal; a étant la valeur initiale de r, on a

$$r^2 \sin\varphi \frac{d\theta}{dt} = ca; \tag{1}$$

Appliquons à tout le système le théorème des forces vives; la pesanteur est la seule force extérieure ou intérieure qui donne un travail; la force vive de M est

$$mv^2 \text{ ou } m\left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \sin^2\varphi \frac{d\theta^2}{dt^2}\right),$$

celle de M' est $m'\frac{dr^2}{dt^2}$, et celle de la poulie est le produit de son moment d'inertie par le carré de sa vitesse angulaire

ω; R étant le rayon de la poulie, on a ainsi $\frac{1}{2}R^2 \times 2\mu\omega^2$; mais $R\omega$ est la vitesse d'un point de la circonférence sur laquelle s'enroule le fil, ou $\frac{dr}{dt}$. On a en définitive

$$(m+m'+\mu)\frac{dr^2}{dt^2}+mr^2\sin^2\varphi\frac{d\theta^2}{dt^2}-mc^2=2g(m\cos\varphi-m')(r-a).$$

Éliminons dt entre cette équation et (1), puis séparons les variables

$$(2)\qquad \sin\varphi d\theta=\frac{\pm acdr\sqrt{m+m'+\mu}}{r\sqrt{mc^2(r^2-a^2)+2gr^2(m\cos\varphi-m')(r-a)}}.$$

On peut intégrer quand $m\cos\varphi$ est égal à m'; on trouve

$$r=a\,\text{séc}\left(\theta\sin\varphi\sqrt{\frac{m}{m+m'+\mu}}\right).$$

Il suffit de multiplier r par $\sin\varphi$ pour avoir en fonction de θ le rayon vecteur d'un point de la projection horizontale de la trajectoire du point M; c'est une courbe dont le rayon vecteur est $a\sin\varphi$ pour $\theta=0$, et devient infini pour

$$\theta=\frac{\pi}{2\sin\varphi}\sqrt{\frac{m+m'+\mu}{m}};$$

ce lieu se déduit de la ligne droite en augmentant les angles polaires de ses divers points dans un rapport constant; il y a une asymptote à distance finie du pôle. La loi du mouvement s'obtient en remplaçant dans (2) $d\theta$ par sa valeur (1) en dt :

$$dt=\frac{\pm rdr\sqrt{m+m'+\mu}}{\sqrt{mc^2(r^2-a^2)+2g(m\cos\varphi-m')(r-a)r^2}}.$$

Dans le cas particulier que j'ai pris, on intègre et l'on

trouve

$$t = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{m+m'+\mu}{m}}\sqrt{r^2-a^2};$$

il faut un temps infini à M pour parcourir sa trajectoire; il est bien entendu qu'il sera arrêté si la longueur du fil est finie; mais cette impossibilité ne peut être prévue par nos équations, qui nous indiquent du moins l'époque où elle vient à se produire.

Revenons au cas général, et posons $r\sin\varphi = \rho$, $a\sin\varphi = \alpha$, $m+m'+\mu = \lambda$; l'équation (2) nous donnera la projection horizontale de la trajectoire; on peut l'écrire

$$(3)\quad d\theta\sqrt{\sin\varphi} = \frac{\pm\alpha c\,d\rho\sqrt{\lambda}}{\rho\sqrt{(\rho-\alpha)\left[2g(m\cos\varphi-m')\rho^2+mc^2\sin\varphi(\rho+\alpha)\right]}}.$$

Quand $m\cos\varphi - m' < 0$, la quantité entre crochets s'annule pour une valeur positive, β, de ρ et pour une valeur négative; $d\theta$ n'est réel que si ρ est compris entre α et β; la projection est donc comprise entre deux cercles ayant ces rayons, qu'elle vient toucher alternativement. Ces deux cercles se confondent et le mouvement de M est uniforme quand $g(m'-m\cos\varphi) = mc^2\alpha$. Si de l'identité

$$2g(m\cos\varphi - m')\beta^2 + mc^2\sin\varphi(\beta+\alpha) = 0$$

on tire $2g(m\cos\varphi - m')$ pour le substituer dans (3), elle prend la forme

$$\sin\varphi\, d\theta = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\frac{\alpha\beta\, d\rho}{\rho\sqrt{(\rho-\alpha)(\beta-\rho)}\sqrt{\alpha\beta+\rho(\alpha+\beta)}},$$

qu'il est aisé de ramener à la forme type des intégrales elliptiques de troisième espèce, en posant

$$\rho = \alpha\sin^2 u + \beta\cos^2 u.$$

Dans le cas où $m\cos\varphi - m' > 0$, la quantité entre crochets sous le radical (3) est positive pour toutes les valeurs positives de ρ; ce rayon vecteur doit donc être toujours $> \alpha$, et il grandit indéfiniment, mais cela exige un temps infini. Comme le coefficient de $d\rho$ a un dénominateur de l'ordre de $\rho^{\frac{1}{2}}$, l'intégrale prise de $\rho = \alpha$ à $\rho = \infty$ sera finie, et à ρ infini répond une valeur finie θ_1 de θ; j'ajoute que l'asymptote correspondante passe au pôle, car la distance de ce point à l'asymptote peut s'écrire

$$\lim \rho(\theta_1 - \theta) = \lim \frac{\theta_1 - \theta}{\frac{1}{\rho}} = \lim \frac{d\theta}{\frac{d\rho}{\rho^2}} = \lim \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}.$$

Or $\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}$ est nul pour ρ infini, puisque le numérateur est de degré inférieur au dénominateur.

Dans ce dernier cas, il peut se faire que la quantité entre crochets soit un carré parfait, on trouve alors

$$d\theta \sin\varphi = 2\alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} \frac{d\rho}{\rho(2\alpha + \rho)\sqrt{\rho - \alpha}}.$$

On peut intégrer

$$\frac{1}{2}\theta\sqrt{\frac{m}{\lambda}}\sin\varphi = \text{arc tang}\sqrt{\frac{\rho - \alpha}{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{\rho - \alpha}{3\alpha}};$$

mais cette intégrale, tout en précisant la valeur de θ qui répond à une valeur donnée de ρ, ne nous montre pas les propriétés de la courbe plus nettement que son équation différentielle.

La tension du fil ne varie pas depuis le point M jusqu'à la poulie, elle serait donnée par l'expression de l'accélération de M suivant le rayon vecteur; mais il est plus facile de la calculer en appliquant le théorème des forces vives à un petit déplacement du système formé de C et du poids

M'. Les forces extérieures qui sollicitent ce système sont la tension T du fil COM et le poids de M'; le déplacement du point d'application est pour toutes deux dr; donc

$$d(m'+\mu)\frac{dr^2}{dt^2} = 2(T - m'g)dr.$$

Mais

$$(m+m'+\mu)\frac{dr^2}{dt^2} = mc^2 - mc^2\frac{a^2}{r^2} + 2g(m\cos\varphi - m')(r-a).$$

On n'a qu'à différentier, substituer et diviser par $2dr$,

$$(m+m'+\mu)\,T = mg[(m'+\mu)\cos\varphi + m'] + m(m'+\mu)\frac{c^2a^2}{r^3}.$$

La tension du fil CM' serait moindre que $\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\mu\frac{dr^2}{dt^2}$. Quant à la pression N exercée par M sur le cône, on l'obtient en calculant la composante de la force qui sollicite M, estimée suivant la normale extérieure au cône;

$$-mr\sin\varphi\cos\varphi\frac{d\theta^2}{dt^2} = N - mg\sin\varphi,$$

$$N = m\sin\varphi\left(g - \frac{a^2c^2\cos\varphi}{r^3\sin^2\varphi}\right).$$

Ces calculs s'appliquent au cas où φ sera égal à 90 degrés, c'est-à-dire où le point M sera posé sur un plan horizontal.

171. *Mouvement d'une barre pesante et homogène* AB, *dont une extrémité* A *reste sur un plan horizontal, tandis que l'extrémité* B *suit une verticale. Il n'y a pas de frottement, et, à l'origine, la vitesse du point* B *est nulle. Cas particuliers.*

Prenons la verticale donnée pour axe des z, le sens positif étant dirigé de haut en bas, le plan horizontal pour plan XOY, et dirigeons l'axe des x vers la position initiale

de A. Soient $2a$ la longueur de la barre, C son point milieu, θ l'angle COZ, ψ l'angle du plan COZ avec ZOX ou l'azimut du plan qui contient AB. Le triangle AOB étant rectangle, la médiane CO est égale à a, et l'angle de AB avec la verticale $\pi - \theta$.

Le théorème des aires s'applique à la projection du mouvement sur OXY. Si l'on désigne par dm la masse d'un élément M sur AB, par r la distance BM, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à OZ est

$$\int_{AB} r^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} dm = \frac{4}{3} a^2 m \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt};$$

ω étant la valeur initiale de $\frac{d\psi}{dt}$ et α celle de θ, on a donc

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \omega \sin^2\alpha. \tag{1}$$

Le théorème des forces vives nous donne une seconde équation; le travail des réactions est nul, et il ne reste que celui du poids mg appliqué en C. Quant à la force vive, il est bon de la calculer comme étant la somme de celle qui correspondrait au cas de la masse concentrée au centre de gravité C, et de celle qui est représentée par le mouvement relatif autour du centre de gravité. Or, dans le temps dt, l'arc parcouru par C est $a\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2}$; le mouvement de AB autour de C est une rotation mesurée sur la sphère de rayon 1 par l'arc $\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2}$, et, le moment d'inertie par rapport à C étant $m\frac{a^2}{3}$, on a tous les éléments de l'équation des forces vives. Au commencement, $\frac{d\theta}{dt}$ est nul; donc

$$\left(ma^2 + \frac{1}{3}ma^2\right)\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2}\right) - \frac{4}{3} ma^2\omega^2 \sin^2\alpha$$
$$= 2mga(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Éliminant dt, puis $d\psi$ entre cette équation et l'équation (1), on a tour à tour une équation de la trajectoire du point C et la loi du mouvement.

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &2a\omega^2\sin^4\alpha\frac{d\theta^2}{d\psi^2}\\ &\quad=\sin^2\theta(\cos\theta-\cos\alpha)\\ &\qquad\times[3g(1-\cos^2\theta)-2a\omega^2\sin^2\alpha(\cos\alpha+\cos\theta)],\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &2a\sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}\\ &\quad=(\cos\theta-\cos\alpha)\\ &\qquad\times[3g(1-\cos^2\theta)-2a\omega^2\sin^2\alpha(\cos\alpha+\cos\theta)].\end{aligned}\right.$$

La quantité entre crochets est <0 pour $\cos\theta=1$ et >0 pour $\cos\theta=-1$; elle s'annule pour une valeur β de θ comprise entre zéro et π, et, pour que $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\theta}{d\psi}$ soient réels, il faut que θ reste compris entre α et β. L'équation (1) montre que ψ va toujours en augmentant dans le même sens; quant à θ, il part de α pour aller à β, revenir à α, et ainsi de suite; les accroissements de t et de ψ correspondant à ces oscillations sont constants.

Pour étudier les diverses valeurs de β, reprenons notre trinôme entre crochets en $\cos\theta$, et désignons-le par $f(\theta)$; on a

$$f(\alpha)=(3g-4a\omega^2\cos\alpha)\sin^2\alpha.$$

Si $f(\alpha)<0$, ce qui exige $\alpha<\frac{\pi}{2}$, on a $\beta>\alpha$; d'ailleurs

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3g-2a\omega^2\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Quand $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est >0, β est compris entre α et $\frac{\pi}{2}$; C reste sur la sphère décrite de O comme centre avec a pour rayon, entre deux petits cercles horizontaux au-dessous du plan

des xy. Quand $f(\alpha)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sont < 0, β est $> \frac{\pi}{2}$, mais inférieur à $\pi - \alpha$, car $f(\pi - \alpha)$ est toujours positif; les deux cercles entre lesquels C reste compris sont l'un au-dessous, l'autre au-dessus de XOY. La distance OA, d'abord égale à $2a \sin\alpha$, croît jusqu'à $2a$, puis décroît jusqu'à $2a \sin\beta$; ensuite elle revient à $2a$, puis à $2a \sin\alpha$, et ainsi de suite. D'ailleurs, quand le point A atteint une de ces limites, la tangente à son lieu est perpendiculaire au rayon vecteur. Quand α est $> \frac{\pi}{2}$, β est toujours inférieur à α et même à $\pi - \alpha$, et la nature du mouvement est la même que dans le dernier cas, si ce n'est que le minimum de θ est β et non plus α.

Si l'on avait $f(\alpha) = 0$, β se confondant avec α, θ devrait être constant, et AB décrirait uniformément un cône droit autour de OZ.

En tirant la valeur de $3g$ de l'identité $f(\beta) = 0$ et substituant dans l'équation (2), on peut obtenir $d\psi$ sous une forme simple et symétrique

$$d\psi = \frac{\sin\alpha \sin\beta \, d\theta}{\sin\theta \sqrt{(\cos\theta - \cos\alpha)(\cos\beta - \cos\theta)} \sqrt{\cos\theta(\cos\alpha + \cos\beta) + 1 + \cos\alpha\cos}}$$

On peut reconnaître que la différence d'azimut de deux plans pour lesquels θ atteint des valeurs extrêmes est $> \frac{\pi}{2}$. Posons $\cos\theta = \cos\alpha \cos^2 u + \cos\beta \sin^2 u$; il vient, par une simple substitution,

$$d\psi = \frac{2 \sin\alpha \sin\beta \, du}{[1 - (\cos\alpha\cos^2 u + \cos\beta\sin^2 u)^2]\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2 u + \cos^2\beta\sin^2}}$$

La différence d'azimuts cherchée s'obtient en intégrant de $u = 0$ à $u = \frac{\pi}{2}$; en supposant $\alpha < \beta$, la quantité sous

le radical est $< 1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha$, et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,du}{1 - (\cos\alpha\cos^2 u + \cos\beta\sin^2 u)} = \pi\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

donc

$$\psi_1 > \pi\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha}} > \pi\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{2 + 4\cos\alpha\cos\beta + 2\cos^2\alpha}},$$

et il est évident que la quantité sous le radical est $> \frac{1}{4}$.

Les réactions de l'axe des z et du plan des xy se calculeront en exprimant que ces forces, appliquées en C avec le poids mg, sont égales à la masse multipliée par l'accélération du point C; mais les résultats sont bien compliqués.

Cas particuliers. — Supposons $\omega = 0$, la barre ne sort pas du plan vertical XOZ; le point C reste sur un cercle vertical, et la loi de son mouvement, aussi bien que celle du mouvement de AB, est donnée par l'équation (3), qui prend la forme

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \pm dt\sqrt{\frac{3g}{2a}};$$

θ diminue de α à $-\alpha$ pour revenir à α, et ainsi de suite; OC oscille comme un pendule de longueur $\frac{2}{3}a$. Soient Z et X les réactions du plan horizontal fixe et de l'axe OZ, x et z les coordonnées de C; on aura, par le théorème du mouvement du centre de gravité,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + mg;$$

mais $x = a\sin\theta$, $z = a\cos\theta$, et l'équation du mouvement

donne

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{3g}{2a}(\cos\theta - \cos\alpha), \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{4a}\sin\theta.$$

Ces expressions permettent de calculer X et Z, et l'on trouve

$$X = \frac{mg}{4}\sin\theta(6\cos\alpha - 9\cos\theta),$$

$$Z = \frac{mg}{4}(6\cos\alpha\cos\theta - 9\cos^2\theta - 1).$$

X est toujours de signe contraire à θ et Z toujours négatif.

Un autre cas simple est celui où l'on suppose la barre non pesante : en faisant $g = 0$ dans l'équation (2), on en tire

$$\frac{\sin\alpha\, d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cot^2\theta}} = d\psi, \quad \operatorname{tang}\alpha\cot\theta = \cos\psi.$$

On en déduit que le lieu de A est une ellipse dont les axes sont $4a\sin\alpha$ et $4a$, et la surface engendrée par AB se compose de deux surfaces du quatrième degré.

172. *Deux masses m, m', posées sur un plan horizontal, sont réunies par un fil flexible, de longueur invariable l, et qui passe sur une très-petite poulie en* O; *la masse m est attirée vers* O *avec une intensité inversement proportionnelle au carré de la distance; on imprime à m, m' des vitesses connues, et l'on demande le mouvement qui en résultera; cas où la vitesse initiale de m' est nulle.*

(Licence, 1873.)

Soient r, r' les distances Om, Om'; θ, θ' les angles de ces droites avec un axe fixe; a, a' les valeurs initiales de r, r'; ω, ω' celles de $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$; u la vitesse initiale de glissement du fil sur le point fixe O. Le théorème des aires est applicable

au mouvement de chaque point en particulier :

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = a^2\omega, \quad r'^2\frac{d\theta'}{dt} = a'^2\omega';$$

on appliquera, au contraire, l'équation des forces vives au système entier, parce que le travail de la tension du fil disparaîtra, et, si l'on appelle $k^2 m$ l'attraction exercée sur m à l'unité de distance, on aura

$$m\left(\frac{dr^2}{dt^2} + r^2\frac{d\theta^2}{dt^2} - u^2 - a^2\omega^2\right)$$
$$+ m'\left(\frac{dr'^2}{dt^2} + r'^2\frac{d\theta^2}{dt^2} - u^2 - \omega'^2 a'^2\right) = 2k^2 m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Remplaçons $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$ par leurs valeurs, et r' par $l - r$; nous aurons

$$(1)\left\{\begin{aligned}(m+m')\frac{dr^2}{dt^2} &= (m+m')u^2 + ma^2\omega^2\frac{r^2-a^2}{r^2}\\ &\quad + m'\omega'^2 a'^2\frac{(l-r)^2-a'^2}{(l-r)^2} + 2k^2 m\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right).\end{aligned}\right.$$

Le second membre est positif pour $r = a$, et, si ω et ω' ne sont pas nuls, il est négatif quand r est suffisamment voisin de o ou de l; il y a donc toujours deux valeurs, α et β, comprises entre o et l, et entre lesquelles r oscille, allant de l'une à l'autre dans un temps constant. La trajectoire de m sera formée d'arcs égaux compris entre les cercles de rayons α et β, qu'elle touche alternativement; celle de m' a une forme analogue entre les cercles de rayons $l-\alpha$ et $l-\beta$. Pour que α soit égal à β, il faut que leur valeur commune soit a, ce qui exige $u = 0$, et, en outre, que $r = a$ annule la dérivée du second membre de l'équa-

tion (1); en observant que $a' = l - a$, cela donne

$$m\omega^2 a - m'\omega'^2(l - a) - k^2\frac{m}{a^2} = 0.$$

Il y a une infinité de manières de réaliser cette relation, et alors les deux points se mouvront uniformément sur deux cercles.

Si l'on suppose $\omega = 0$, le second membre de l'équation (1) est > 0 pour les valeurs de r entre 0 et a; r aura une limite supérieure moindre que l; mais, après l'avoir atteinte, il décroîtra jusqu'à zéro, et, si m peut dépasser le point O, il s'échappera, et l'on aurait à étudier le mouvement de deux points liés par un fil et dont l'un est attiré vers O, problème bien plus difficile que le proposé.

Dans le cas particulier proposé, u et ω' sont nuls. Je reprends l'équation (1), en y remplaçant dt par $\frac{r^2 dt}{a^2\omega}$:

$$(2)\quad d\theta\sqrt{\frac{m}{m+m'}} = \pm\frac{a^2\omega\, dr}{r^2\sqrt{a^2\omega^2 - 2\frac{k^2}{a} + 2\frac{k^2}{r} - \frac{a^4\omega^2}{r^2}}}.$$

Le radical s'annule pour $r = a$ et pour $r = r_1 = \frac{a^4\omega^2}{2k^2 - a^2\omega^2}$. Si $r_1 > 0$, r restera compris entre a et r_1, sinon il ira de a jusqu'à l'infini. On peut, du reste, intégrer la valeur de θ, et, en prenant les cosinus des deux membres, on trouve, pour la trajectoire de m,

$$\frac{1}{r} = \frac{k^2}{a^4\omega^2}\left[1 + \frac{a^2\omega^2 - k^2}{k^2}\cos\left(\theta\sqrt{\frac{m}{m+m'}}\right)\right].$$

Cette courbe est la transformée d'une conique ayant son foyer au pôle et où l'on aurait augmenté les angles polaires de tous les points dans le rapport de $\sqrt{m+m'}$ à $\sqrt{m}$. On trouvera la position de m en fonction du temps de la même

façon que pour le mouvement des planètes; en général cela revient à remettre dt dans l'équation (2) et à intégrer sa valeur

$$dt\sqrt{\frac{m}{m+m'}}=\frac{rdr}{\sqrt{\left(a^2\omega^2-2\frac{k^2}{a}\right)r^2+2k^2r-a^4\omega^2}}.$$

Il est entendu que, si r dépasse l, m' traverse le point O, et les conditions du problème sont tout autres.

173. *Mouvement d'une droite pesante assujettie à rester sur la surface, parfaitement polie, d'un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical.*

Notre droite coïncidera successivement avec chaque génératrice d'un même système, et sa position sera connue si l'on donne l'angle ψ de sa projection sur le plan du cercle de gorge avec un diamètre OX de ce cercle, et la distance r comprise entre le milieu M de la droite et le point C, où sa direction perce le plan. Soient a le rayon du cercle de gorge, θ l'angle des génératrices avec l'axe de la surface, qu'on prend pour axe des z; l'angle de OC avec OX est, en comptant ψ dans un sens convenable, $\frac{\pi}{2}+\psi$, et les coordonnées rectangulaires de M seront

$$(1)\qquad \begin{cases} x=r\sin\theta\cos\psi-a\sin\psi,\\ y=r\sin\theta\sin\psi+a\cos\psi,\\ z=r\cos\theta; \end{cases}$$

z et r sont positifs au-dessous du cercle de gorge.

Comme les réactions que la barre reçoit aux divers points où elle touche la surface sont dirigées suivant les normales correspondantes, leur moment par rapport à OZ est nul, et la somme des moments des quantités de mouvement est constante. Cette somme est égale au moment relatif à la

masse concentrée en M, plus celui qui correspond au mouvement relatif autour d'une verticale qui serait entraînée avec M ; la première partie est

$$m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=m\left[(a^2+r^2\sin^2\theta)\frac{d\psi}{dt}-a\sin\theta\frac{dr}{dt}\right];$$

la seconde est, en appelant mk^2 le moment d'inertie de la barre par rapport à son milieu, $mk^2\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}$; donc

$$(2)\qquad (a^2+k^2\sin^2\theta+r^2\sin^2\theta)\frac{d\psi}{dt}-a\sin\theta\frac{dr}{dt}=\mu.$$

La force vive s'évalue comme il a déjà été fait, en deux parties : l'équation du travail est

$$\sin^2\theta\frac{dr^2}{dt^2}+(a^2+r^2\sin^2\theta+k^2\sin^2\theta)\frac{d\psi^2}{dt^2}$$
$$-2a\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt}-2gr\cos\theta=h.$$

Multiplions par $a^2+(r^2+k^2)\sin^2\theta$, et retranchons membre à membre de l'équation (2) élevée au carré, on élimine $d\psi$, et il reste

$$(3)\ (r^2+k^2)\sin^4\theta\frac{dr^2}{dt^2}=(a^2+k^2\sin^2\theta+r^2\sin^2\theta)(h+2gr\cos\theta)-\mu^2.$$

Le second membre étant du troisième degré, s'annule au moins pour une valeur de r; on peut compter le temps à partir de l'instant correspondant. Désignons par r_0 et ω les valeurs correspondantes de r et de $\frac{d\psi}{dt}$, et posons, pour abréger,

$$a=c\sin\theta,\quad 2g\cos\theta=\gamma\sin^2\theta,$$

les équations (2) et (3) prennent une forme simple, en donnant à h et à μ les valeurs qui rendent les deux membres

identiques quand $t = 0$,

$$(4) \qquad (r^2 + c^2 + k^2)\frac{d\psi}{dt} - c\frac{dr}{dt} = (r_0^2 + c^2 + k^2)\omega,$$

$$(5)\ (r^2 + k^2)\frac{dr^2}{dt^2} = (r - r_0)[\gamma(r^2 + c^2 + k^2) + (r_0^2 + c^2 + k^2)\omega^2(r + r_0)].$$

Si $r_0 > 0$, le trinôme entre crochets, $f(r)$, est > 0 pour toute valeur de r supérieure à r_0; r ne peut donc varier que de r_0 à ∞ ; mais, quand $r_0 < 0$, il peut arriver que $f(r)$ s'annule pour une ou deux valeurs de r plus grandes que r_0; dans le premier cas, qui répond à $f(r_0) < 0$, ou $\gamma + 2\omega^2 r_0 < 0$, r devra varier entre r_0 et la plus petite des deux racines de $f(r) = 0$. Si les deux racines sont réelles et $> r_0$, r variera encore de r_0 à la plus petite, et la droite ne sortira pas d'une certaine zone comprise entre deux parallèles de l'hyperboloïde. Dans le cas où l'une des racines de $f(r) = 0$ est r_0, et l'autre $> r_0$, ce qui exige

$$\gamma + 2\omega^2 r_0 = 0, \quad c^2 + k^2 < 3r_0^2,$$

M et tous les points de AB décrivent uniformément des parallèles. Quand $f(r)$ ne s'annule pas pour $r > r_0$, r va de r_0 à ∞. $\frac{d\psi}{dt}$ s'obtient en remplaçant, dans (4), $\frac{dr}{dt}$ par sa valeur tirée de (5); mais, quand r est très-grand, on a sensiblement $dr = dt\sqrt{r\gamma}$, $r^2 d\psi = c\,dr$; donc ψ tend vers une limite finie, et le mouvement de M devient à peu près uniformément accéléré.

Quand $\omega = 0$, ou quand la barre part du repos, on peut intégrer (4);

$$\frac{\psi}{c}\sqrt{k^2 + c^2} = \text{arc tang}\,\frac{r}{\sqrt{c^2 + k^2}} - \text{arc tang}\,\frac{r_0}{\sqrt{c^2 + k^2}};$$

on en déduit la forme de la trajectoire de M.

EXERCICES.

Mouvement d'une barre pesante et homogène dont les extrémités doivent rester sur un cercle vertical poli; pressions exercées. L'équation des forces vives détermine l'inclinaison de la droite, et le mouvement du centre de gravité donne les réactions, qui sont normales au cercle.

Une barre pesante et homogène AB peut se mouvoir dans un plan vertical autour de l'extrémité A; l'autre extrémité s'appuie sur une face d'un prisme triangulaire dont la base repose sur le plan horizontal parfaitement poli qui contient A; le prisme ne peut se déplacer que parallèlement au plan vertical dans lequel se meut AB; mouvement qu'il prend sous la pression de la barre.

Deux points A, B sont liés par une tige sans masse mobile autour de son milieu C; chacun d'eux est attiré vers un point O avec une intensité inversement proportionnelle au cube de la distance; CO est égal à $\frac{1}{2}$ AB, et le mouvement initial est tel que la barre reste dans un plan passant par CO, mouvement du système. Le théorème des forces vives conduit à une équation intégrable. (WALTON.)

Mouvement de deux points pesants qui se repoussent avec une intensité réciproque au carré de la distance et dont les vitesses initiales sont dirigées suivant la droite qui les joint. Le centre de gravité décrit une parabole, et la droite qui joint les deux mobiles conserve une direction constante.

Un prisme triangulaire repose par sa large face sur un plan horizontal parfaitement poli, et ne peut prendre qu'un mouvement de translation perpendiculaire à ses arêtes; deux petites masses réunies par un fil qui ne sort pas d'une section droite du prisme sont posées chacune sur une des faces inclinées et abandonnées à elles-mêmes; déterminer le mouvement du système et la tension du fil.

Une aiguille AB de masse m peut tourner autour de son extrémité A dans un plan vertical; déterminer la loi suivant laquelle

un insecte de masse m doit se déplacer sur AB pour que cette aiguille puisse avoir un mouvement de rotation uniforme; l'insecte est supposé en A quand AB est horizontale. On écrit que la dérivée de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe autour duquel tourne la droite est égale à la somme des moments des poids; on tient compte de ce que la vitesse angulaire est une constante ω, et l'on arrive à une équation de la forme

$$g \sin \omega t = 2\omega^2 \left(r - a \mathrm{L} \frac{a+r}{a}\right);$$

le mouvement n'est possible que pour une demi-révolution.

(WALTON.)

Déterminer le mouvement d'un disque circulaire non homogène assujetti à rester dans un plan vertical et posé sur une horizontale de ce plan; on suppose : 1° que cette droite est parfaitement polie; 2° qu'elle soit assez rugueuse pour empêcher tout glissement. On doit chercher où se trouve à chaque instant le centre du disque et son centre de gravité; on peut appliquer le théorème des forces vives, et lui adjoindre pour le premier cas celui du mouvement du centre de gravité.

Un fil inextensible et sans masse, assujetti à rester dans un plan horizontal, s'enroule par une de ses extrémités sur un treuil vertical de masse M, puis passe sur une très-petite poulie C, et se termine par une masse m attirée vers C par une force réciproque au carré de la distance; déterminer le mouvement du système en supposant que $M = 6m$, et que la vitesse initiale de m soit moitié de celle qui conviendrait au mouvement parabolique, si l'on supprimait le fil. (Licence, 1865.) Se traite comme le problème 172.

Une droite homogène assujettie à rester sur un plan horizontal peut glisser sans frottement dans un petit anneau qui tourne lui-même et permet à la droite de prendre toutes les directions; la droite se termine à une extrémité par une masse attirée vers l'anneau, en raison inverse du carré de la distance, mouvement du système.

Un tube droit, mobile dans un plan horizontal, peut tourner autour d'un de ses points qui est fixe; le tube contient un certain nombre de petites billes qui peuvent s'y mouvoir librement; déterminer le mouvement du système, en supposant qu'on imprime au tube une certaine vitesse et que les billes y soient d'abord en repos relatif à des distances connues. En exprimant que la composante tangentielle de l'accélération pour chacun des points est nulle, on a

$$\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{1}{r_1}\frac{d^2r_1}{dt^2}=\ldots=\frac{d\theta^2}{dt^2};$$

on en conclut que les distances des billes au point fixe conservent des rapports constants, et l'on n'a plus que deux inconnues distinctes. (WALTON.)

Un tube circulaire homogène, assujetti à rester dans un plan vertical, repose sur une horizontale sur laquelle il ne peut que rouler sans glisser; il contient une petite bille pesante qui glisse à l'intérieur sans frottement; déterminer le mouvement du système quand on l'abandonne sans vitesse initiale. On peut appliquer le théorème des forces vives et celui sur les moments des quantités de mouvement par rapport au point le plus bas du tube.

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

Des moments d'inertie.

174. J'ai rappelé (159) les propriétés les plus simples des moments d'inertie; ajoutons qu'en un point quelconque d'un solide il y a trois axes principaux d'inertie perpendiculaires entre eux; en les prenant pour axes coordonnés, on a, m étant une des masses du système,

$$\Sigma myz = \Sigma mzx = \Sigma mxy = 0;$$

l'ellipsoïde central est un ellipsoïde dont les axes sont dirigés suivant les axes principaux et égaux à l'inverse de la racine carrée des moments d'inertie correspondants ou à l'inverse du rayon de gyration; le rayon de gyration par rapport à une droite passant à notre origine est l'inverse du diamètre de l'ellipsoïde qui coïncide avec elle. Soient A, B, C les moments principaux d'inertie, le moment relatif à une droite qui fait avec les axes les angles α, β, γ est

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma;$$

si k, a, b, c désignent les rayons de gyration correspondants,

$$k^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma.$$

Considérons un ellipsoïde, réciproque du premier, dont les axes soient $2a$, $2b$, $2c$; le rayon de gyration relatif à une droite passant au centre est égal à la distance du centre au

plan tangent perpendiculaire à la droite. Ce second ellipsoïde a été remarqué par Mac Cullagh.

175. *Rayon de gyration d'un arc de cercle homogène par rapport à diverses droites menées par le centre du cercle.*

Soient OX l'axe de symétrie, OY la parallèle à la corde, OZ la perpendiculaire au plan; ce seront les axes principaux, et en appelant a, b, c les rayons de gyration, 2φ l'angle au centre de l'arc donné, on aura

$$a^2 = \frac{1}{2R\varphi}\int_{-\varphi}^{\varphi} R^3 \sin^2\theta\, d\theta = R^2\,\frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{4\varphi},$$

$$b^2 = R^2\,\frac{2\varphi + \sin 2\varphi}{4\varphi}, \quad c^2 = R^2.$$

Pour un demi-cercle $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}R^2$.

Le carré du rayon de gyration relatif à la droite qui fait des angles α, β, γ avec les axes est, par conséquent,

$$K^2 = \frac{1}{2}R^2\left[1 + \cos^2\gamma + (\cos^2\beta - \cos^2\alpha)\,\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi}\right].$$

176. *Moments d'inertie de l'aire d'une ellipse autour de ses deux axes et de la normale à son plan, menée par le centre; cylindre elliptique.*

Soient α, β les demi-axes, A, B, C les moments demandés, on a

$$A = \int\int y^2 dx dy, \quad B = \int\int x^2 dx dy, \quad C = \int\int (x^2 + y^2)\, dx dy.$$

Pour calculer A, j'intègre d'abord par rapport à x, et je trouve

$$A = 2\int_{-\beta}^{\beta} \frac{\alpha}{\beta} y^2 dy \sqrt{\beta^2 - y^2}.$$

Posons $y = \beta \cos\varphi$, $dy = \beta \sin\varphi\, d\varphi$, et nous aurons

$$A = 2\alpha\beta^3 \int_0^\pi \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\alpha\beta^3 \int_0^\pi \sin^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4}\pi\alpha\beta^3.$$

On en conclut immédiatement

$$B = \frac{1}{4}\pi\alpha^3\beta, \quad C = A + B = \frac{1}{4}\pi\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2).$$

Les rayons principaux de gyration sont $\frac{1}{2}\beta, \frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Ce dernier serait le rayon de gyration d'un cylindre elliptique droit autour de son axe; quant au carré du rayon relatif au grand axe de la section moyenne du cylindre, c'est, en désignant la hauteur par $2h$,

$$\frac{1}{2\pi\alpha\beta h}\int_{-h}^{h} \pi\alpha\beta\left(\frac{1}{4}\beta^2 + z^2\right) dz = \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{3}h^2.$$

177. *Moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène par rapport à ses axes et à la diagonale du parallélépipède rectangle circonscrit.*

Je désigne par α, β, γ les demi-axes et je pose

$$h = \int\int\int x^2 dx\, dy\, dz, \quad h' = \int y^2 dm, \quad h'' = \int z^2 dm.$$

Dans h, si on laisse x constant, l'intégrale relative à y et à z est l'aire de l'ellipse suivant laquelle l'ellipsoïde est coupé par le plan parallèle au plan yz à la distance x; donc

$$h = \int_{-\alpha}^{\alpha} \pi \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2)x^2 dx = \frac{4}{15}\pi\alpha^3\beta\gamma.$$

On trouverait de même h' et h''; et, comme les moments principaux d'inertie sont $h' + h''$,..., on en déduit les

carrés des rayons de gyration

$$a^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{5}, \quad b^2 = \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{5}, \quad c^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{5}.$$

Le carré du rayon relatif à la diagonale du parallélépipède circonscrit est

$$k^2 = \Sigma \frac{a^2\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{2}{5} \frac{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Le rayon de gyration d'une sphère autour d'un diamètre est $R\sqrt{\frac{2}{5}}$.

179. *Moment d'inertie d'un triangle* ABC *par rapport à diverses droites; conséquences pour un polygone régulier, pour une pyramide régulière.*

Prenons pour origine O le centre de gravité du triangle, pour axe des x la médiane OA, dont la longueur totale est m, pour axe des y une parallèle à BC; soit θ l'angle des axes; le moment d'inertie relatif à la médiane est

$$I = \int_{-\frac{2m}{3}}^{\frac{m}{3}} dx \int y^2 \sin^2\theta\, dy$$

$$= 2\int_0^m dx' \int_0^{\frac{\alpha x}{2m}} y^2 \sin^2\theta\, dy = \frac{m\alpha^3 \sin^2\theta}{48};$$

α, β, γ sont les côtés du triangle; sa surface est $S = \frac{1}{2} m\alpha \sin\theta$; donc

$$I = \frac{1}{6} \frac{S^2}{m^2}.$$

Les moments d'inertie par rapport à OA, et, par analogie, les moments relatifs à OB et OC sont inversement propor-

tionnels aux carrés de ces droites; l'ellipsoïde central en O coupe le plan du triangle suivant une ellipse E homothétique à l'ellipse E′ circonscrite à ABC et ayant son centre en O; le rapport de similitude est $m\sqrt{\frac{6}{S^2}} : \frac{2}{3}m = \frac{3}{S}\sqrt{\frac{3}{2S}}$; le demi-diamètre de E′ parallèle à BC est $\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$; celui de E sera $\frac{3\alpha}{S\sqrt{2S}}$, et le moment d'inertie correspondant $I' = \frac{2S^2}{9\alpha^2}$.

Le moment d'inertie autour d'une perpendiculaire en O au plan du triangle sera

$$\iint (x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta)\sin\theta\, dx\, dy$$

$$= \frac{I + I'}{\sin^2\theta} = \frac{1}{2} m\alpha \sin\theta \left(\frac{\alpha^2}{24} + \frac{m^2}{18}\right) = S\,\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{36}.$$

Le carré du rayon de gyration, relatif à une normale au plan menée par A, est

$$\frac{\alpha^2}{24} + \frac{m^2}{18} + \frac{4}{9}m^2 = \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{24}\alpha^2.$$

Considérons un polygone régulier de n côtés, dont l'apothème est m, l'aire S, le côté α et le rayon du cercle circonscrit R; par le centre de ce cercle, menons deux diamètres rectangulaires OX, OY et une perpendiculaire OZ; le moment d'inertie autour de OZ est la somme des moments des triangles ayant O pour sommet :

$$C = n\frac{S}{n}\left(\frac{m^2}{2} + \frac{\alpha^2}{24}\right) = S\left(\frac{R^2}{2} - \frac{\alpha^2}{12}\right).$$

Les moments autour de OX et de OY sont

$$A = \iint y^2\, dx\, dy, \quad B = \iint x^2\, dx\, dy;$$

nous avons comme pour une aire plane quelconque $A + B = C$; ici il est clair que $A = B$; chacun vaut $\frac{1}{2}C$.

Soit maintenant une pyramide régulière dont la hauteur est h et dont la base a pour côté α, pour rayon R, pour aire S; le résultat précédent donne le moment d'inertie autour de la hauteur

$$C = \int_0^h dx \frac{Sx^4}{h^4}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{\alpha^2}{12}\right) = \frac{Sh}{10}\left(R^2 - \frac{\alpha^2}{6}\right) = \frac{3}{10}V\left(R^2 - \frac{\alpha^2}{6}\right).$$

Le moment relatif à une droite menée par le sommet perpendiculairement à l'axe se calcule en observant que cette droite est parallèle à un diamètre du cercle circonscrit à la base d'une de nos tranches, et qu'elle en est à une distance égale à celle du sommet à la section; donc

$$A = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2}\left[\frac{x^2}{h^2}\left(\frac{R^2}{4} - \frac{\alpha^2}{24}\right) + x^2\right]dx$$
$$= \frac{3}{20}V\left(4h^2 + R^2 - \frac{\alpha^2}{6}\right).$$

On en déduit les moments d'inertie des polyèdres réguliers et du cône droit.

179. *Moments d'inertie d'un tore autour de son axe ou d'un diamètre de son équateur.*

Soient R le rayon du cercle générateur, a la distance de son centre à l'axe; x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M, u sa distance au centre P du cercle générateur dans le plan duquel il est contenu, ψ l'azimut de ce plan, θ l'angle de PM avec l'axe du tore; le système de coordonnées u, ψ et θ est souvent utile quand on considère un tore, et donne

$$x = (a + u\sin\theta)\cos\psi, \quad y = (a + u\sin\theta)\sin\psi, \quad z = u\cos\theta.$$

On pourra découper le plan du cercle en petites surfaces

$u\,du\,d\theta$ qui, en tournant autour de OZ, engendrent des volumes $(a+u\sin\theta)\,u\,du\,d\theta\,d\psi$; on a pour le volume du tore

$$V=\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R}u\,du\,(a+u\sin\theta)=2\pi^2 a R^2.$$

Le moment par rapport à l'axe du tore est, en intégrant entre les mêmes limites,

$$C=\iiint(a+u\sin\theta)^3\,u\,du\,d\theta\,d\psi=2\pi^2 a R^2\left(a^2+\frac{3}{4}R^2\right).$$

Les moments autour de OX et de OY sont

$$A=\iiint(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=B=\iiint(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{A+B}{2};$$

$$A=B=\frac{1}{2}\iiint[(a+u\sin\theta)^2+2u^2\cos^2\theta](a+u\sin\theta)\,u\,du\,d\theta\,d\psi$$
$$=2\pi^2 a R^2\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{8}R^2\right).$$

180. *Condition pour qu'une droite soit axe principal d'inertie.*

Supposons qu'une droite OZ soit axe principal par rapport à l'un de ses points O; prenons deux droites OX et OY qui forment un système de coordonnées rectangulaires avec OZ, et nous devrons avoir

$$\Sigma mxz=0,\quad \Sigma myz=0.$$

Quand ces conditions ne sont pas vérifiées, on peut chercher si OZ est principale par rapport à un de ses points O'; si $OO'=h$, on aura, par analogie avec les conditions précédentes,

$$\Sigma mx(z-h)=0,\quad \Sigma m(z-h)y=0.$$

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, M

la masse totale; ces relations deviennent

$$\Sigma mxz = \mathrm{M}hx_1, \quad \Sigma myz = \mathrm{M}hy_1.$$

En écrivant que ces équations donnent la même valeur pour h, on obtient la condition demandée

$$y_1 \Sigma mxz = x_1 \Sigma myz.$$

Une droite ne peut être axe principal pour deux de ses points, sans l'être pour tous et passer au centre de gravité.

Cherchons la condition pour qu'une arête AB d'un tétraèdre soit axe principal en un de ses points. Du milieu M de l'arête opposée CD, j'abaisse MO perpendiculaire sur AB, et je prends OM pour axe des x, AB pour axe des z avec un axe des y perpendiculaire; le plan ZOX étant diamétral pour le tétraèdre, $y_1 = 0$ et l'on doit avoir $\Sigma myz = 0$. Divisons le volume du tétraèdre en petits prismes parallèles à CD; le milieu de chacun de ces prismes est dans le plan ZOX, et ses éléments ont deux à deux des y égaux et de signes contraires; si les arêtes du prisme ne sont pas perpendiculaires à OZ, les éléments dont l'y est > 0 auront un z toujours plus grand ou toujours plus petit que ceux dont l'y est < 0, et la somme ne sera pas nulle. Il faut donc et il suffit que CD soit perpendiculaire à la direction de AB.

181. *Étant donnés les axes principaux* OX, OY, OZ, *relatifs au centre de gravité et les rayons de gyration correspondants* a, b, c, *trouver le rayon de gyration pour une droite quelconque* MR *passant par un point* M; *axes principaux pour ce point; discussion et conséquences.*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de M par rapport à OXYZ, r la distance OM, α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe MR; pour une parallèle OR′ à MR, le carré du rayon de gyration serait $a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$; il suffit d'y ajouter le

carré de la distance de M à OR′, et l'on a

$$(1)\qquad k^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + r^2 - (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)^2.$$

$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1$ est la distance de l'origine au plan P, mené par M normalement à MR. Imaginons une surface homofocale à l'ellipsoïde E dont les demi-axes sont a, b, c; écrivons son équation

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1,$$

et déterminons λ de manière que cette surface soit tangente au plan P,

$$\alpha(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma(z - z_1) = 0;$$

la condition de contact s'obtient en identifiant cette équation avec celle d'un plan tangent à la surface (2), et éliminant les coordonnées du point de contact; on trouve

$$(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1)^2 = \alpha^2(a^2 - \lambda) + \beta^2(b^2 - \lambda) + \gamma^2(c^2 - \lambda),$$

λ n'a qu'une valeur λ'; il y a donc une seule surface du système (2) qui touche P, et, si l'on remplace dans (1) $\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1$ par sa valeur, il vient

$$k^2 = r^2 + \lambda'.$$

En M passent trois surfaces homofocales (2), répondant aux paramètres λ_1, λ_2, λ_3; soit $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$; à $\lambda = \lambda_1$ correspond un ellipsoïde et, pour $\lambda < \lambda_1$, (2) représente un ellipsoïde qui enferme le point M; de même, pour $\lambda > \lambda_3$, (2) représente un hyperboloïde à deux nappes et M est dans sa partie concave; donc, si λ est $< \lambda_1$ ou $> \lambda_3$, on a des surfaces auxquelles on ne peut mener de plan tangent P par M. Le minimum de k^2 est $r^2 + \lambda_1$; alors MR est normale à l'ellipsoïde homofocal de E qui passe en M; le maximum de k^2 est $r^2 + \lambda_3$ et l'axe MR du moment maxi-

mum d'inertie est la normale à l'hyperboloïde à deux nappes; ces deux normales sont deux des axes principaux pour le point M; le troisième est donc la normale à l'hyperboloïde à une nappe (2) qui y passe, et le rayon de gyration correspondant est $r^2 + \lambda_2$.

Puisque pour chaque point les axes principaux sont les normales des surfaces homofocales à E qui y passent, et que les rayons de gyration principaux sont égaux à r^2 augmenté du paramètre qui définit ces surfaces, on est ramené à discuter l'équation

$$(3) \qquad \frac{x_1^2}{a^2-\lambda} + \frac{y_1^2}{b^2-\lambda} + \frac{z_1^2}{c^2-\lambda} - 1 = 0.$$

Pour que deux des moments principaux d'inertie en M soient égaux, il faut que l'équation (3) ait une racine double; si a, b, c sont différents, cela donne trois lieux différents pour le point M; ce sont les focales de l'ellipsoïde E.

$$x_1 = 0, \quad \frac{y_1^2}{b^2-a^2} + \frac{z_1^2}{c^2-a^2} = 1, \quad \text{ellipse imaginaire;}$$

$$y_1 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2-b^2} + \frac{z_1^2}{c^2-b^2} = 1, \quad \text{hyperbole;}$$

$$z_1 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2-c^2} + \frac{y_1^2}{b^2-c^2} = 1, \quad \text{ellipse.}$$

Les trois moments principaux ne peuvent devenir égaux en certains points, que si b est égal à c ou à a. Soit $b = c$, pour que les trois racines de (3) soient égales, il faut que leur valeur commune soit b, et alors

$$y_1 = z_1 = 0, \quad x_1^2 = a^2 - b^2.$$

Pour $b = a$, on trouve deux points imaginaires.

Le lieu des points pour lequel un des rayons principaux a une valeur k s'obtient en écrivant que l'équation (3)

admet la solution $\lambda = k^2 - r^2$.

$$\frac{x^2}{a^2 - k^2 + r^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2 + r^2} + \frac{z^2}{c^2 - k^2 + r^2} - 1 = 0.$$

Si k est supérieur à a, b et c, on a la surface des ondes de l'optique; sinon on en a une variété qui est comme elle du quatrième degré, mais possède des nappes infinies.

Veut-on trouver les points pour lesquels les rayons principaux aient des valeurs données k, k', k'', on a le système d'équations

$$\frac{x^2}{r^2 + a^2 - k^2} + \frac{y^2}{r^2 + b^2 - k^2} + \frac{z^2}{r^2 + c^2 - k^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{r^2 + a^2 - k'^2} + \ldots = 1, \quad \frac{x^2}{r^2 + a^2 - k''^2} + \ldots = 1.$$

On résout ces équations par le procédé de Binet (*voir* n° 151), et l'on trouve

$$x^2 = \frac{(a^2 + r^2 - k^2)(a^2 + r^2 - k'^2)(a^2 + r^2 - k''^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \ldots$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 = -(k^2 + k'^2 + k''^2) + a^2 + b^2 + c^2 + 3r^2,$$

Cette équation fait connaître r, et les précédentes donnent ensuite x, y, z. On voit que $k^2 + k'^2 + k''^2$ doit être $> a^2 + b^2 + c^2$.

Chaque propriété des familles de surfaces homofocales donne une propriété des axes principaux, et réciproquement. Ainsi un plan quelconque est tangent à une surface du système; il est plan principal pour le point de contact et pour ce point seulement. Toute parallèle à un des axes de E est normale à celle des surfaces qui se réduit au plan des deux autres axes de E; elle est axe principal au point où elle perce ce plan. Le lieu des normales qu'on peut

mener d'un point fixe aux surfaces homofocales est un cône du deuxième degré : c'est le lieu des droites qui sont principales pour un de leurs points.

Mouvement autour d'un axe fixe.

182. Considérons un système d'axes coordonnés rectangulaires et un solide dont deux points A et B sont fixés sur l'axe des z; le solide ne peut que tourner autour de OZ, et il est soumis en A et B aux réactions des appuis dont nous désignerons les composantes par X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2. Soient a et b les z des points A et B, X, Y, Z une des forces extérieures, appliquée en x, y, z; il suffit d'écrire les théorèmes généraux sur l'accroissement des projections et des moments des quantités de mouvement du système, pour avoir six équations d'où l'on déduit le mouvement du corps et les réactions aux points fixes. Ces équations sont de la forme

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + X_1 + X_2,$$

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \Sigma (yZ - zY) - aY_1 - bY_2.$$

Soient θ l'angle dont le corps a tourné à l'époque t, ω la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, et $\omega' = \frac{d\omega}{dt}$; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité G, M la masse totale, $I = Mk^2$ le moment d'inertie autour de OZ, $\Sigma myz = \alpha$, $\Sigma mxz = \beta$; on a, en observant que chaque point décrit un cercle autour de OZ,

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \omega' y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + \omega' x, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

et les équations du mouvement donnent

$$(A)\quad \begin{cases} X_1 + X_2 + \Sigma X + M(\omega^2 x_1 + \omega' y_1) = 0, \\ Y_1 + Y_2 + \Sigma Y + M(\omega^2 y_1 - \omega' x_1) = 0, \\ Z_1 + Z_2 + \Sigma Z = 0, \\ aY_1 + bY_2 - \Sigma(yZ - zY) + \omega^2\alpha - \omega'\beta = 0, \\ aX_1 + bX_2 - \Sigma(xZ - zX) + \omega^2\beta + \omega'\alpha = 0, \\ Mk^2\omega' = \Sigma(xY - yX). \end{cases}$$

La dernière donne la loi du mouvement; les première, deuxième, quatrième et cinquième, X_1, X_2, Y_1, Y_2; la troisième donne la somme $Z_1 + Z_2$, mais Z_1 et Z_2 ne peuvent être déterminés isolément, ce qui tient à l'hypothèse d'une rigidité absolue du corps mobile.

Supposons que les forces extérieures se réduisent à un couple dont le plan soit perpendiculaire à l'axe : on a $Z_1 + Z_2 = 0$, et il est naturel d'admettre que Z_1 et Z_2 sont nuls séparément; les réactions des points d'appui sont perpendiculaires sur l'axe, et leurs composantes données par les équations

$$X_1 + X_2 + M(\omega^2 x_1 + \omega' y_1) = 0, \quad aX_1 + bX_2 + \omega^2\beta + \omega'\alpha = 0,$$
$$Y_1 + Y_2 + M(\omega^2 y_1 - \omega' x_1) = 0, \quad aY_1 + bY_2 + \omega^2\alpha - \omega'\beta = 0.$$

Pour que les deux réactions aient une résultante R, il faut et il suffit qu'elles soient parallèles; $X_1 : Y_1 :: X_2 : Y_2$; cette proportion conduit à l'égalité équivalente

$$\frac{X_1 + X_2}{Y_1 + Y_2} = \frac{aX_1 + bX_2}{aY_1 + bY_2}, \quad \frac{\omega^2 x_1 + \omega' y_1}{\omega^2 y_1 - \omega' x_1} = \frac{\omega^2\beta + \omega'\alpha}{\omega^2\alpha - \omega'\beta}.$$

Effectuant les calculs, cette dernière donne

$$(\omega^4 + \omega'^2)(\alpha y_1 - \beta x_1) = 0;$$

il faut

$$\alpha : \beta :: x_1 : y_1,$$

c'est-à-dire que l'axe fixe est axe principal pour l'un de ses points O. Supposons que l'on prenne ce point pour origine des coordonnées, α et β deviendront nuls, et les équations où ils entrent donneront

$$aX_1 + bX_2 = 0, \quad aY_1 + bY_2 = 0;$$

les moments de X_1 et de X_2, de Y_1 et de Y_2 par rapport à O étant égaux et de signes contraires, la résultante passe en ce point, et est contenue dans le plan principal conjugué à l'axe de rotation. On peut faire passer le plan des zx par le centre de gravité, y_1 est nulle, et les projections de R sont

$$X_1 + X_2 = -M\omega^2 x_1, \quad Y_1 + Y_2 = M\omega' x_1.$$

Cette force, composée avec le couple accélérateur dont le moment est $Mk^2\omega'$, donne une force unique, égale et parallèle à R, rencontrant l'axe des x en un point dont l'abscisse est $\frac{Mk^2\omega'}{Y_1 + Y_2} = \frac{k^2}{x_1}$; c'est le centre de percussion du solide relativement à l'axe fixe.

On peut demander que la réaction d'un des points fixes A soit nulle : c'est dire que l'action de l'axe se réduit à une force unique appliquée en B; l'axe doit être axe principal pour ce point. Si les deux réactions étaient nulles, l'axe serait un axe principal passant au centre de gravité : dans le premier cas, c'est un axe permanent de rotation, dans le second, un axe naturel ou spontané.

183. *Un parallélépipède rectangle homogène pesant est fixé par les extrémités* P, Q *d'une de ses arêtes, qui est verticale : quelle vitesse faudrait-il lui donner pour que le point fixe inférieur* Q *n'éprouvât aucune pression?*

Si l'on prend pour origine le milieu O de PQ, et pour axes des parallèles aux arêtes, dont je désigne les longueurs

par $2a$, $2b$, $2c$, on a $x_1 = a$, $y_1 = b$, $z_1 = 0$, $\alpha = \beta = 0$, et les équations (A) deviennent évidemment

$$\begin{aligned}
&X_1 + X_2 + M(\omega^2 a + \omega' b) = 0,\\
&Y_1 + Y_2 + M(\omega^2 b - \omega' a) = 0,\\
&Z_1 + Z_2 - Mg = 0,\\
&c(Y_1 - Y_2) + bMg = 0,\\
&c(X_1 - X_2) + Mag = 0,\\
&\omega' = 0.
\end{aligned}$$

La vitesse angulaire conserve la valeur constante ω, et si l'on veut que $X_2 = Y_2 = 0$, on déduit des équations précédentes

$$X_1 + Ma\omega^2 = Y_1 + Mb\omega^2 = cY_1 + Mbg = cX_1 + Mag = 0.$$

Pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que $c\omega^2 = g$; la réaction en P a pour composantes $-\frac{Mga}{c}$, $-\frac{Mgb}{c}$, Mg; sa direction prolongée passe au centre du parallélépipède.

184. *Déterminer la forme d'un pendule composé, assujetti à certaines conditions, de façon à rendre minimum la longueur du pendule simple synchrone.*

Étant donnée une certaine quantité de matière, on peut en former un pendule composé qui oscille aussi vite ou aussi lentement qu'on voudra; il suffit d'en former une très-longue aiguille et de la faire osciller autour d'une parallèle à son axe qui en soit très-voisine, ou d'une perpendiculaire à cet axe. Mais, si l'on impose certaines conditions à la forme du pendule, le problème de rendre minimum le pendule synchrone admet une solution finie. On sait que, si a est la distance du centre de gravité à l'axe de suspen-

sion, k le rayon de gyration autour d'une parallèle à l'axe menée par ce centre, la longueur du pendule synchrone est $l = a + \frac{k^2}{a}$; la forme du pendule étant donnée, l ne peut être minimum que si $a = k$; alors $l = 2k$, et l'on est ramené à former un corps de masse et d'espèce données, tel que son moment d'inertie, par rapport à un axe de direction donnée passant au centre de gravité, soit minimum. Il faut pour cela que, si l'on enlève ou qu'on ajoute une masse infiniment petite en des points quelconques de la surface, sans que cette surface cesse de remplir les conditions géométriques qui lui sont imposées, le moment d'inertie autour de l'axe choisi éprouve une variation infiniment petite, indépendante de l'endroit qu'on a creusé ou renforcé : sinon, en enlevant de la matière aux points les plus sensibles pour la rapporter en d'autres moins sensibles, on diminuerait le moment d'inertie, qui, par suite, n'eût pas été minimum.

Supposons que le pendule cherché doive être un cylindre droit, d'épaisseur h et de masse m, oscillant autour d'une parallèle à ses génératrices, et considérons la parallèle OX par le centre de gravité O. Si l'on veut retirer une petite quantité de matière sans altérer la forme du pendule, il faut que cette petite masse soit répartie uniformément le long d'une génératrice : pour que la diminution correspondante du moment d'inertie soit constante, il faut que toutes les génératrices soient équidistantes de l'axe; la base du cylindre sera un cercle, et l'axe de suspension passera au milieu du côté du carré inscrit.

Demandons que le pendule soit de révolution autour d'un axe qui coupe à angle droit l'axe de suspension. Soit OX la parallèle à ce second axe par le centre de gravité : la masse dm qu'on enlève doit être répartie uniformément le long d'un parallèle de la surface; si y est le rayon, x la

distance du plan du parallèle à l'axe, la variation du moment est

$$\left(z^2 + \frac{1}{2}y^2\right) dm.$$

Pour que ce soit une constante, il faut que l'équation de la surface soit

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 = c^2;$$

c'est un ellipsoïde de révolution aplati dont le volume, égal au volume donné, est $\frac{8}{3}\pi c^3$; et l'on a $k = c\sqrt{\frac{3}{5}}$.

185. *Une planche rectangulaire homogène est fixée aux extrémités* A *et* B *d'une de ses arêtes qui fait un angle i avec la verticale; mouvement de la planche quand on l'écarte de sa position d'équilibre; réaction des deux gonds.*

Je prends AB pour axe des z, son milieu O pour origine, la perpendiculaire à AB contenue dans le même plan vertical que cette droite pour axe des x et une perpendiculaire à ces deux droites pour axe des y; soient $2a = \mathrm{AB}$, $2c$ la largeur de la planche. Le poids mg est appliqué au centre de gravité G, et ses composantes sont

$$\mathrm{X} = mg\sin i, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = -mg\cos i;$$

on a évidemment

$$\alpha = \Sigma myz = 0, \quad \beta = \Sigma mxz = 0.$$

J'appelle θ l'angle du plan de la porte avec ZOX et X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 les composantes des réactions de A et de B.

Les équations générales deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} X_1 + X_2 + mg\sin i + mc(\omega^2\cos\theta + \omega'\sin\theta) = 0, \\ Y_1 + Y_2 + mc(\omega^2\sin\theta - \omega'\cos\theta) = 0, \\ Z_1 + Z_2 - mg\cos i = 0, \\ a(Y_1 - Y_2) + cmg\cos i\sin\theta = 0, \\ a(X_1 - X_2) + cmg\cos i\cos\theta = 0, \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}mc^2\omega' = -cmg\sin\theta\sin i.$$

La dernière donne, en multipliant par $\omega dt = d\theta$ et intégrant,

$$2c(\omega^2 - \omega_0^2) = 3g(\cos\theta - \cos\theta_0)\sin i.$$

Les oscillations sont isochrones à celles d'un pendule de longueur $\frac{4c}{3\sin i}$. Les premières équations (1) nous donneront X_1, X_2, Y_1, Y_2; mais, il est un peu plus simple de chercher les composantes des réactions dans le plan de la planche, parallèlement à OG, et suivant une normale à son plan; je désigne ces composantes par P_1, P_2, N_1, N_2 et je pose

$$\omega^2 = \frac{3g\sin i}{2c}(\cos\theta - h);$$

h est < -1 si la rotation est continue. On a d'ailleurs

$$P = X\cos\theta + Y\sin\theta, \quad N = Y\cos\theta - X\sin\theta;$$

si donc on ajoute la première et la deuxième équation (1), après les avoir multipliées par $\cos\theta$ et $\sin\theta$, ou par $-\sin\theta$ et $\cos\theta$, on a

$$P_1 + P_2 = -\frac{mg\sin i}{2}(5\cos\theta - 3h);$$

$$N_1 + N_2 = \frac{1}{4}mg\sin i\sin\theta.$$

Ajoutons au contraire la quatrième et la cinquième après avoir multiplié par $\frac{\sin\theta}{a}$ et $\frac{\cos\theta}{a}$, ou par $\frac{\cos\theta}{a}$ et $-\frac{\sin\theta}{a}$; on trouve

$$P_1 - P_2 = -\frac{cmg\cos i}{a}, \quad N_1 - N_2 = 0.$$

On peut ainsi calculer immédiatement les P et les N. Comme $N_1 = N_2$, sans que P_1 soit égal à P_2, les deux réactions n'ont pas de résultante, à moins que $\cos i$ ne soit nul, c'est-à-dire AB horizontal; alors

$$P_1 = P_2 = \frac{mg}{4}(3h - 5\cos\theta), \quad N_1 = N_2 = \frac{mg}{8}\sin\theta.$$

Si $\omega_0 = 0$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, h est nul et $\frac{N_1}{P_1} = -\frac{1}{10}\tang\theta$; la tangente de l'angle de la réaction avec le plan de la porte est proportionnelle à $\tang\theta$.

186. *Oscillation d'une aiguille aimantée mobile autour d'un axe horizontal qui passe par son centre de gravité* O; *influence du frottement qui s'exerce sur l'axe quand l'aiguille oscille dans le plan du méridien magnétique.*

L'influence de la Terre sur une aiguille symétrique par rapport à son centre de gravité peut être représentée par l'action de deux forces F égales, parallèles et de sens contraire, appliquées en deux points P, P′, symétriques par rapport à O; l'angle i de ces deux forces avec l'horizon est la déclinaison, et le plan vertical qui leur est parallèle est le plan du méridien magnétique. F peut être remplacée par une composante verticale $F\sin i$, et une composante horizontale $F\cos i$; si donc l'axe de l'aiguille fait l'angle α avec le méridien magnétique, $F\cos i$ se décompose en deux autres, $F\cos i\sin\alpha$, dans le plan où peut se mouvoir l'aiguille, $F\cos i\cos\alpha$ parallèle à l'axe : l'aimant sera en équilibre quand l'angle i'

de P′P avec l'horizon est tel que

$$\cot i' = \sin\alpha \cot i.$$

Écartons PP′ d'un angle θ de sa position d'équilibre; si PP′ $= 2l$, l'aimant est soumis au couple

$$2Fl\sin\theta\sqrt{\sin^2 i + \cos^2 i \sin^2\alpha};$$

en appelant mk^2 le moment d'inertie, on a

$$mk^2\omega' = -2Fl\sin\theta\sqrt{1-\cos^2 i\cos^2\alpha},$$
$$mk^2(\omega^2-\omega_0^2) = 4Fl(\cos\theta-\cos\theta_0)\sqrt{1-\cos^2 i\cos^2\alpha}.$$

L'aiguille prend un mouvement pendulaire, d'où l'on déduit l'intensité des forces F. Supposons l'aiguille assujettie à rester dans le méridien, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Soient ρ le rayon de l'axe de suspension, $2a$ la distance des points d'appui, dont le milieu est en O; je prends cet axe pour axe des z, l'axe des y étant suivant la direction d'équilibre et l'axe des x perpendiculaire aux deux autres; et je désigne par θ l'angle de OP avec OY, le sens des angles positifs étant tel que pour OX, $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Les composantes du poids sont $-mg\sin i$, $mg\cos i$ et o, tandis que F est parallèle à OY. Par raison de symétrie, les points d'appui n'ont pas à fournir de réaction parallèle à OZ; leurs actions, égales entre elles, ont pour composantes X et Y; la force de frottement en chaque point d'appui est donc $\sin\varphi\sqrt{X^2+Y^2}$. Comme $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta$ sont nuls, les troisième, quatrième et cinquième équations générales deviennent des identités, et les autres donnent

$$2X - mg\sin i = 0, \quad 2Y + mg\cos i = 0,$$
$$mk^2\omega' = -2Fl\sin\theta + 2\rho\sin\varphi\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Le signe du dernier terme est pris en supposant que θ parte d'une valeur initiale positive λ pour décroître. On tire de nos équations

$$\frac{Y}{X} = -\cot t, \quad 2\sqrt{X^2 + Y^2} = mg.$$

La réaction de chaque appui est toujours verticale et égale à la moitié du poids. L'équation du mouvement devient

$$mk^2\omega' = -2Fl\sin\theta + mg\rho\sin\varphi.$$

Pour que le mouvement naisse, il faut

$$2Fl\sin\lambda > mg\rho\sin\varphi;$$

s'il en est ainsi, intégrons en multipliant par $2\omega dt = 2d\theta$,

$$mk^2\omega^2 = 4Fl(\cos\theta - \cos\lambda) + 2mg\rho(\theta - \lambda)\sin\varphi.$$

Cette formule est applicable jusqu'à ce que θ ait atteint une valeur λ_1 pour laquelle ω s'annule. A cause de la petitesse de $\rho\sin\varphi$, λ_1 ne diffère pas beaucoup de $-\lambda$; écrivons que ω^2 s'annule pour $\theta = -\lambda + h$,

$$2Fl[\cos(\lambda - h) - \cos\lambda] - mg\rho(2\lambda - h)\sin\varphi = 0.$$

Développons $\cos(\lambda - h)$ par la formule de Taylor, et négligeons les termes du deuxième ordre :

$$2Flh\sin\lambda - 2mg\rho\lambda\sin\varphi = 0, \quad h = \frac{mg\rho\lambda\sin\varphi}{Fl\sin\lambda};$$

si λ est peu considérable, $\frac{\lambda}{\sin\lambda}$ diffère peu de 1, h est sensiblement constant, et l'on voit que l'amplitude des oscillations décroît suivant une progression arithmétique; quand le sinus de cette amplitude est devenu $< \frac{mg\rho\sin\varphi}{2Fl}$, l'aiguille s'arrête, faisant en général un petit angle avec OY.

Mouvement autour d'un point fixe.

187. Considérons un solide assujetti à tourner autour d'un point O et sollicité par des forces quelconques; le mouvement élémentaire est une rotation autour d'un axe instantané OI, et il suffirait de connaître la grandeur et la direction de la droite $OI = \omega$ qui représente cette rotation à chaque instant pour être ramené à une question de Calcul intégral. Menons trois axes rectangulaires fixes OX_1, OY_1, OZ_1; la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à OX_1 est de la forme

$$p_1 \Sigma m (y_1^2 + z_1^2) - q_1 \Sigma m x_1 y_1 - r_1 \Sigma m x_1 z_1,$$

la dérivée est égale à la somme des moments des forces extérieures, mais elle est difficile à calculer à cause des Σ qui y figurent et qui varient avec le temps. Aussi Euler a-t-il cherché les projections p, q, r de OI sur les axes principaux OX, OY, OZ relatifs au point O; ces axes sont mobiles, mais aussi il suffit de connaître leur position à un instant donné pour avoir celle du corps. Supposons les systèmes OXYZ. $OX_1Y_1Z_1$, disposés de manière que OX représente l'axe de la rotation de OY vers OZ, et ainsi de suite; Euler considère la trace OP du plan XY sur le plan X_1Y_1, et désigne par ψ l'angle dont il faut faire tourner OX_1 dans le sens positif pour l'amener sur OP, par φ l'angle dont OP doit tourner pour aller sur OX, enfin par θ l'angle du plan XY avec X_1Y_1. L'angle θ s'évalue en prenant les parties des deux plans que décrirait d'abord dans chacun d'eux une droite qui se mouvrait dans le sens positif à partir de OP; quand θ est entre o et π, c'est que la partie considérée de XY vient par rapport à X_1Y_1 du même côté que OZ_1. On a calculé (113) les relations entre p, q, r et les dérivées $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$, que

nous désignerons par φ', ψ', θ';

$$(1)\quad \begin{cases} p = \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi, \quad q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi, \\ r = \varphi' + \psi' \cos\theta. \end{cases}$$

Mais, pour trouver p, q, r en fonction de t, on me permettra de résumer une méthode très-élégante exposée dans les leçons de Bour à l'École Polytechnique. Il considère une droite OR, appelée axe du couple résultant des quantités de mouvement, et dont les projections sur OX_1, OY_1, OZ_1 sont

$$\Sigma m\left(y_1 \frac{dz_1}{dt} - z_1 \frac{dy_1}{dt}\right), \quad \Sigma m\left(z_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dz_1}{dt}\right), \ldots.$$

Transportons les forces extérieures en O, elles sont détruites, mais on obtient un couple résultant des forces extérieures, dont l'axe est une droite OG; la projection de OG sur un axe est égale à la somme des moments des forces par rapport à cet axe. Le théorème sur la variation des moments des quantités de mouvement

$$\Sigma m\left(y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right) = \text{proj}_{x_1} \text{OG}, \ldots,$$

peut s'énoncer en disant que la vitesse du point R est représentée en grandeur et en direction par OG.

Cela posé, soient A, B, C les moments d'inertie autour de OX, OY, OZ; la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à OX est $Ap, \ldots$, c'est-à-dire que les coordonnées du point R sont, à l'époque t,

$$x = Ap, \quad y = Bq, \quad z = Cr.$$

A l'instant $t + dt$, les coordonnées relatives sont

$$A(p + dp), \quad B(q + dq), \quad C(r + dr);$$

mais, par une formule connue de Cinématique, les composantes sur OX, OY, OZ de la vitesse absolue de R sont les sommes des composantes de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative, c'est-à-dire, suivant OX,

$$\frac{dx}{dt} + qz - ry = A\frac{dp}{dt} + qCr - rBq.$$

Il suffit d'égaler ces composantes aux projections de OG sur les mêmes axes ou aux sommes L, M, N des moments des forces par rapport à ces axes, pour avoir les équations d'Euler

$$(2) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr = L, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp = M, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq = N. \end{cases}$$

On remarquera que dp, par exemple, se compose de deux parties :

$$d'p = \frac{B - C}{A} qr\,dt, \quad d''p = \frac{L}{A} dt;$$

la première est celle qu'on aurait sans l'intervention des forces extérieures et en vertu de l'inertie du solide; l'autre est due aux forces extérieures qui communiquent ainsi une rotation $\delta\omega$, dont les composantes sont $\frac{L}{A}dt$, $\frac{M}{B}dt$, $\frac{N}{C}dt$. L'axe de cette rotation est dirigé suivant le diamètre OH de l'ellipsoïde central conjugué au plan du couple G; ce diamètre fait avec l'axe du couple un angle dont le cosinus est

$$\cos\theta = \frac{1}{G\delta\omega}\left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right) dt.$$

Le moment d'inertie autour de OH est

$$I = \Sigma A \left(\frac{L\,dt}{A\,\delta\omega}\right)^2 = \left(\frac{L^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{N^2}{C}\right)\frac{dt^2}{\delta\omega^2};$$

donc $\delta\omega = \frac{G\,dt}{I}\cos\theta$; la rotation communiquée par un couple pendant le temps dt est égale à l'impulsion du couple multipliée par le sinus de l'angle de son plan avec le diamètre conjugué dans l'ellipsoïde et divisée par le moment d'inertie autour du diamètre.

Les équations (1) et (2) forment un système très-complexe de six équations simultanées, car L, M, N dépendent de ψ, θ, φ. Ce système se simplifie quand deux moments A et B sont égaux. Remplaçons dans (2) p, q, r et leurs dérivées par les valeurs tirées des équations (1) :

$$A\left(\sin\varphi\,\frac{d}{dt}\psi'\sin\theta + \psi'\varphi'\cos\varphi\sin\theta + \cos\varphi\frac{d\theta'}{dt} - \theta'\varphi'\sin\varphi\right)$$
$$+ (C - A)(\varphi' + \psi'\cos\theta)(\psi'\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi) = L,$$

$$A\left(\cos\varphi\,\frac{d}{dt}\psi'\sin\theta + \ldots\right)$$
$$+ (A - C)r(\psi'\sin\theta\sin\varphi + \theta'\cos\varphi) = M,$$

$$C\left(\frac{d\varphi'}{dt} + \frac{d}{dt}\psi'\cos\theta\right) = N.$$

Ajoutons les deux premières, après les avoir multipliées respectivement d'abord par $\cos\varphi$ et $-\sin\varphi$, ensuite par $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$; la première combinaison donne au second membre $L\cos\varphi - M\sin\varphi$, la seconde $L\sin\varphi + M\cos\varphi$; ces quantités sont les projections de OG sur OP et sur une droite OQ qui lui serait perpendiculaire dans le plan XY, c'est-à-dire la somme des moments des forces par rapport à OP et OQ; désignons-les par P et Q, et nos équations

deviennent, après quelques réductions simples,

$$(3)\quad \begin{cases} A\left(\dfrac{d\theta'}{dt} - \psi'^2 \sin\theta \cos\theta\right) + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)\psi' \sin\theta = P, \\ A\left(\sin\theta \dfrac{d\psi'}{dt} + 2\theta'\psi' \cos\theta\right) - C\theta'(\varphi' + \psi' \cos\theta) = Q, \\ C\dfrac{d}{dt}(\varphi' + \psi' \cos\theta) = N. \end{cases}$$

Nous avons trois équations du second ordre, qui ont été données sous une forme équivalente par M. Resal; φ n'y entre que par sa dérivée, et les moments P, Q s'obtiennent plus aisément que L et M.

188. *Déterminer le mouvement d'un anneau homogène en supposant que son centre coïncide avec celui d'un autre anneau très-grand par rapport au premier, et dont toutes les molécules attirent celles de l'anneau mobile suivant la loi newtonienne : il n'intervient pas d'autre force, et le petit anneau est primitivement animé d'un mouvement quelconque autour de son centre immobile.*

On a vu (79) que l'action du grand anneau sur l'anneau mobile S se réduit rigoureusement à un couple dont l'axe est la ligne des nœuds, et que le moment de ce couple est approximativement

$$-\frac{3}{4} f m \mu \frac{a^2}{R^3} \sin\theta \cos\theta;$$

f étant le coefficient d'attraction, m et μ les masses du petit et du grand anneau, a et R leurs rayons, θ l'inclinaison du plan de S sur celui du grand anneau. Le centre O de S reste immobile; nous le prendrons pour origine, et le plan du grand anneau sera notre plan $X_1 Y_1$, l'axe des x_1 étant suivant la position primitive de la ligne des nœuds; nous

conservons les variables ψ, θ et φ. On a ensuite

$$A = B = \frac{1}{2} ma^2, \quad C = ma^2;$$

on pose

$$3f\mu = 2R^3\lambda,$$

et l'on peut substituer dans les équations (3); divisant par $\frac{1}{2}ma^2$, il vient

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta'}{dt} + \psi'^2 \sin\theta \cos\theta + 2\psi'\varphi' \sin\theta + \lambda \sin\theta \cos\theta = 0, \\ \sin\theta \dfrac{d\psi'}{dt} - 2\theta'\varphi' = 0, \quad \dfrac{d}{dt}(\varphi' + \psi' \cos\theta) = 0. \end{cases}$$

Je désigne par ε, ζ, η les valeurs initiales de θ', ψ' et φ', et par α celle de θ; la troisième équation (4) donne tout de suite

$$(5) \qquad \varphi' + \psi' \cos\theta = \eta + \zeta \cos\alpha = h;$$

substituons la valeur de φ' dans les deux autres équations (4)

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d\theta'}{dt} - \psi'^2 \sin\theta \cos\theta + 2h\psi' \sin\theta + \lambda \sin\theta \cos\theta = 0, \\ \sin\theta \dfrac{d\psi'}{dt} + 2\psi'\theta' \cos\theta - 2h\theta' = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie la dernière par $\sin\theta$, elle s'intègre et donne

$$(7) \qquad \psi' \sin^2\theta + 2h \cos\theta = \zeta \sin^2\alpha + 2h \cos\alpha = K.$$

Tirons-en la valeur de ψ' pour la rapporter dans (6),

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}(K - 2h\cos\theta)^2 - \frac{2h}{\sin\theta}(K - 2h\cos\theta) - \lambda \sin\theta \cos\theta.$$

En multipliant par $2\theta' dt = 2d\theta$, le second membre devient

intégrable, et, en remplaçant K par sa valeur, on a

$$(8)\quad \theta'^2 = \varepsilon^2 - \frac{(\zeta \sin^2\alpha + 2h\cos\alpha - 2h\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} - \lambda\sin^2\theta + (\zeta^2 + \lambda)\sin^2\alpha.$$

En général, θ ne doit pas atteindre zéro ni π, pour que le second membre reste positif, c'est-à-dire que le plan de l'anneau mobile ne vient jamais coïncider avec celui de l'anneau fixe. Il n'y a exception que si le terme en $\frac{1}{\sin^2\theta}$ disparaît, ce qui exige $\zeta = 0$ et $h = 0$, ou $\zeta = \eta = 0$; il faut que l'anneau n'ait reçu ni mouvement de précession ni de rotation autour de son axe de figure; alors l'équation (8) devient

$$\theta'^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} = \varepsilon^2 + \lambda(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) = \varepsilon^2 + \lambda\,\frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{2}.$$

L'équation (7) montre que dans ce cas ψ' est nul; l'anneau oscille autour de sa ligne des nœuds comme un pendule de longueur $\frac{g}{\lambda} = \frac{2R^2 g}{3f\mu}$, mais dont l'angle d'écart serait à chaque instant double de l'inclinaison du plan de S.

Cherchons les conditions pour que les valeurs entre lesquelles θ doit rester compris soient égales entre elles et, par conséquent, à α : le second membre de l'équation (8) doit s'annuler ainsi que sa dérivée pour $\theta = \alpha$; il faut d'abord que ε soit nul; puis, en se reportant à la valeur de $\frac{d\theta'}{dt}$,

$$2\zeta h - \zeta^2\cos\alpha + \lambda\cos\alpha = \zeta^2\cos\alpha + 2\eta\zeta + \lambda\cos\alpha = 0.$$

On doit donner à l'anneau un mouvement initial de précession dont la vitesse ζ est l'une des racines de l'équation précédente; ces racines sont de signe contraire à η, et ne sont réelles que si $\eta^2 > \lambda\cos^2\alpha$; mais, si η est grand, l'une des racines est très-petite en valeur absolue, l'autre très-

grande. L'équation (7) donnant pour ψ' une valeur constante, l'axe de figure décrit uniformément un cône droit autour de l'axe de l'anneau fixe.

La discussion complète des équations (7) et (8) est longue, et je me bornerai à un cas particulier intéressant, celui où ε et ζ sont nuls, tandis que η a une grande valeur. On tire des équations (7) et (8) simplifiées

$$\psi' = \frac{2\eta(\cos\alpha - \cos\theta)}{\sin^2\theta},$$

$$\theta'^2 = \frac{\lambda(\cos^2\theta - \cos^2\alpha)\sin^2\theta - 4\eta^2(\cos\theta - \cos\alpha)^2}{\sin^2\theta};$$

θ diminue à partir de α jusqu'à une valeur qui en diffère très-peu; on posera $\theta = \alpha - x$, et l'on développera par la formule de Taylor en ne gardant que les termes les plus influents; on trouve ainsi

$$\psi' = -\frac{2\eta x}{\sin\alpha}, \quad x'^2 = \lambda x \sin 2\alpha - 4\eta^2 x^2.$$

On intègre aisément la seconde, et, en résolvant par rapport à x, on a

$$x = \frac{\lambda \sin 2\alpha}{8\eta^2}(1 - \cos 2\eta t),$$

d'où

$$\psi' = -\frac{\lambda\cos\alpha}{2\eta}(1 - \cos 2\eta t), \quad \psi = -\frac{\lambda t\cos\alpha}{2\eta} + \frac{\lambda\cos\alpha}{4\eta^2}\sin 2\eta t.$$

Faisons $\frac{\lambda\cos\alpha}{4\eta^2} = n$, et nous aurons

$$\theta = \alpha - n\sin\alpha + n\sin\alpha\cos 2\eta t, \quad \psi = -2n\eta t + n\sin 2\eta t;$$

θ et ψ, qui font connaître la direction de l'axe de figure, ont une partie moyenne et une partie périodique. Sur une sphère de rayon t, le pôle moyen de l'anneau décrit un

petit cercle d'un mouvement uniforme pendant le temps $\frac{\pi}{n\eta}$; mais le pôle vrai tourne autour de ce pôle moyen, de façon que sa trajectoire relative est un petit cercle de rayon $n \sin\alpha$, et sa trajectoire absolue une épicycloïde sphérique ordinaire, car, pour $\theta = \alpha$, $\frac{\psi'}{\theta'}$ est nul, ce qui indique un rebroussement; la période de ce mouvement de nutation est $\frac{\pi}{\eta}$, beaucoup plus petite que celle de la précession moyenne. Ainsi, selon l'expression de Lagrange, le mouvement primitif du corps a transformé en mouvement de précession le mouvement oscillatoire que le couple tendait à lui imprimer.

Si l'on veut avoir la position de l'axe instantané à une époque quelconque, on recourra aux formules (1) dans lesquelles on peut faire $\varphi = 0$, car cet angle n'a apparu jusqu'ici que par sa différentielle; il vient, eu égard aux résultats précédents,

$$p = \theta' = -2n\eta \sin\alpha \sin 2\eta t,$$
$$q = \psi' \sin\theta = -2n\eta \sin\alpha (1 - \cos 2\eta t),$$
$$r = \eta.$$

L'axe instantané décrit, par rapport au système mobile formé de OP, OQ, OZ, un petit cône de révolution dont OZ est une génératrice, et dont le demi-angle au sommet est $2n\eta \sin\alpha$; cet angle est très-petit, mais beaucoup plus grand que l'angle d'écart du pôle vrai et du pôle moyen.

189. *Mouvement d'un solide de révolution pesant, animé d'une grande vitesse, autour de son axe de figure, lorsqu'un point* O *de cet axe est fixe, et qu'un autre point* B *est sollicité par une force* F *perpendiculaire à l'axe.*

Nous prenons pour origine le point fixe, pour axe des z,

une verticale montante, et les autres axes comme précédemment. Soient a la distance OA du centre de gravité à l'origine, U et V les composantes de F parallèlement à OP et OQ, et $OB = b$; P sera égal à $mga\sin\theta - bV$, Q à bU, et, d'après les formules (3), on aura

$$(E)\quad \begin{cases} A\left(\dfrac{d\theta'}{dt} - \psi'^2\sin\theta\cos\theta\right) \\ \quad + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\psi'\sin\theta = mga\sin\theta - bV, \\ A\left(\sin\theta\dfrac{d\psi'}{dt} + 2\theta'\psi'\cos\theta\right) - C\theta'(\varphi' + \psi'\cos\theta) = bU, \\ d(\varphi' + \psi'\cos\theta) = 0. \end{cases}$$

La dernière donne de suite $\varphi' + \psi'\cos\theta = h$, h étant une constante. Quand cette quantité est très-grande, ou que la vitesse autour de l'axe de figure est considérable, l'effet de la force F est singulier. Supposons qu'elle se réduise à V, ou que U soit nul, les quantités

$$Ch\theta', \quad Ch\psi'\sin\theta + bV$$

conservent des valeurs finies; θ' reste très-petit, tandis que ψ' prend une valeur finie, sensiblement proportionnelle à V et à l'inverse de h; la force qui tendrait à soulever l'axe du corps ne lui donne en réalité qu'un mouvement de précession. Au contraire, si l'on cherche à donner un mouvement de précession, en appliquant une force qui se réduise à U, les quantités $Ch\psi'$ et $Ch\theta' + bU$ restent finies; on ne réussit qu'à diminuer θ ou à relever l'axe de figure. Si l'on demandait la force nécessaire pour obtenir un mouvement de précession sans nutation, on ferait $\theta' = 0$ dans (E), et l'on en déduirait

$$bV = \sin\theta(mga + A\psi'^2\cos\theta - Ch\psi'), \quad bU = A\sin\theta\frac{d\psi'}{dt};$$

V aurait une valeur considérable, tandis que U serait fini et indépendant de la vitesse de rotation qui entre dans h.

Quand on suppose $F = 0$, et qu'on tient compte de la valeur de $\varphi' + \psi' \cos\theta$, les deux premières équations du mouvement deviennent

$$(H)\quad \begin{cases} A\left(\dfrac{d\theta'}{dt} - \psi'^2 \sin\theta \cos\theta\right) + Ch\psi' \sin\theta = mga \sin\theta, \\ A\left(\sin\theta \dfrac{d\psi'}{dt} + 2\theta'\psi' \cos\theta\right) - Ch\theta' = 0. \end{cases}$$

La seconde, multipliée par $\sin\theta$, est intégrable, et donne une intégrale de la forme

$$(H')\qquad A\psi' \sin^2\theta + Ch \cos\theta = A\zeta \sin^2\alpha + Ch \cos\alpha.$$

Multiplions-la, au contraire, par $2 \sin\theta d\psi$, et ajoutons-lui la première multipliée par $2d\theta$, on a l'intégrale des forces vives

$$(H'')\ A(\theta'^2 + \sin^2\theta\psi'^2) + 2mga\cos\theta = A(\varepsilon^2 + \zeta^2 \sin^2\alpha) + 2mga\cos\alpha.$$

Ces deux équations donneront le mouvement dans le cas le plus général; on peut en déduire les conditions pour que θ conserve une valeur α; mais celles-ci résultent plus simplement des équations (H); la seconde donne $d\psi' = 0$, $\psi' = \zeta$, et la première

$$A \cos\alpha\zeta^2 - Ch\zeta + mga = 0;$$

il y a deux vitesses de précession correspondantes, l'une grande, l'autre petite.

Supposons le corps animé seulement à l'origine d'un mouvement de rotation autour de son axe; on fera $\varepsilon = \zeta = 0$ dans (H') et (H''), et, si l'on élimine dt entre elles, on trouve

$$\frac{d\psi^2}{d\theta^2} = \frac{C^2h^2(\cos\alpha - \cos\theta)}{\sin^2\theta[2mgAa\sin^2\theta - C^2h^2(\cos\alpha - \cos\theta)]}.$$

La fonction entre crochets, positive pour $\theta = 0$, négative pour $\theta = \pi$, s'annule pour une seule valeur, β, de θ comprise entre zéro et π; β est $\gtrless \alpha$ selon que a est positif ou négatif. Sur une sphère dont le centre est en O, l'axe de figure décrit une courbe comprise entre deux petits cercles, dont les distances sphériques au point le plus haut de la sphère sont les arcs α et β; la courbe est tangente au second cercle, tandis qu'elle aborde le premier par des points de rebroussement où la tangente est orthogonale au cercle. Quand h a une grande valeur, β est très-voisin de α, en sorte que, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'axe de figure décrit à peu près un plan horizontal; mais, à mesure que les résistances passives diminuent la vitesse de rotation, l'axe dévie de plus en plus de ce plan.

190. *Sur quelques propriétés du mouvement d'un solide qui tourne autour d'un point fixe sans être sollicité par aucune force extérieure; équation de l'herpoloïde.*

Je prends les axes principaux d'inertie pour axes des x, des y et des z; soient p, q, r les composantes de la vitesse angulaire ω, I le point d'intersection de l'ellipsoïde central (E) avec l'axe de cette rotation, ρ la distance OI. L'axe OG du couple des quantités de mouvement est invariable dans l'espace, mais ses projections Ap, Bq, Cr sur nos axes mobiles changent avec le temps, tout en satisfaisant à la relation

$$(1) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2;$$

le théorème de la conservation des forces vives donne en outre

$$(2) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H.$$

Poinsot a indiqué une représentation très-simple du

mouvement; le plan tangent à (E) au point I est parallèle au plan invariable, c'est-à-dire perpendiculaire à OG, et rencontre cet axe à une distance constante $\frac{\sqrt{H}}{G}$ de l'origine, ω étant égal à $\rho\sqrt{H}$. Le solide se meut de manière que l'ellipsoïde central reste toujours tangent à un plan fixe, le point de contact a une vitesse infiniment petite, mais il est le centre d'un pivotement.

Poinsot a déduit des équations (1) et (2) d'autres conséquences secondaires, faciles à établir; ainsi la somme des carrés des distances des sommets de (E) à l'axe du couple OG est constante. En effet, cette somme est

$$\frac{1}{A}\sin^2 GOX + \frac{1}{B}\sin^2 GOY + \frac{1}{C}\sin^2 GOZ$$
$$= \frac{1}{A}\left(1 - \frac{A^2p^2}{G^2}\right) + \ldots = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{H}{G^2}.$$

On aurait encore une somme constante en multipliant le carré de chaque distance par le moment d'inertie correspondant.

Le plan tangent à (E) au point I, étant perpendiculaire à OG et à une distance $\frac{\sqrt{H}}{G}$ de l'origine, a pour équation

$$Apx + Bqy + Crz = \sqrt{H};$$

la somme des inverses des carrés des longueurs qu'il intercepte sur les axes à partir de l'origine est $\frac{G^2}{H}$; si l'on multiplie ces carrés respectivement par A, B, C, la somme des inverses devient égale à 1.

Considérons l'ellipsoïde réciproque dont les axes sont égaux aux rayons de gyration principaux; ce sera la figure polaire réciproque de E par rapport à une sphère de rayon

$\frac{1}{\sqrt{m}}$, m étant la masse du solide; le point G′ où il est coupé par l'axe du couple des quantités de mouvement est le pôle du plan tangent en I à E; OG′ est égale à la longueur constante $G\sqrt{\frac{m}{H}}$. Que l'on projette les axes a, b, c de l'ellipsoïde réciproque sur le plan invariable, la somme des aires décrites par les projections de ces droites croîtra proportionnellement au temps. En effet, en vertu des rotations $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$, a décrit dans les plans XOZ et XOY les aires $\frac{1}{2}a^2 q\,dt$, $\frac{1}{2}a^2 r\,dt$; la somme de leurs projections sur le plan invariable est

$$\frac{1}{2}a^2 dt\left(\frac{Bq}{G}q + \frac{Cr}{G}r\right) = \frac{dt}{2mG}\left[A(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - A^2p^2\right].$$

et la somme des trois projections donne

$$\frac{dt}{2Gm}\left[H(A+B+C) - G^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{H}{G}(a^2+b^2+c^2) - \frac{G}{m}\right]dt.$$

Poinsot a donné une image très-nette du mouvement en disant que le cône S, lieu des droites OI prises dans le corps, roule sans glisser sur le cône S_1, lieu des droites de l'espace absolu qui coïncident successivement avec OI. La directrice de S est une courbe U, lieu des points I de l'ellipsoïde dont le plan tangent est à une distance donnée du centre; soit K l'inverse du carré de cette distance, les équations de la poloïde U seront

$$(3) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \quad A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = K.$$

L'équation de S s'obtient en combinant les précédentes

$$A(A-K)x^2 + B(B-K)y^2 + C(C-K)z^2 = 0.$$

Soit $A > B > C$; lorsque $K = A$ ou $K = C$, le cône se

réduit à une droite et la poloïde à un point; les axes majeur et mineur de l'ellipsoïde central sont axes permanents de rotation; si $K = B$, S devient un système de deux plans réels et la poloïde se compose de deux ellipses passant par l'axe moyen; cet axe peut être un axe permanent de rotation, mais, avec les mêmes valeurs de H et G, il peut arriver que le point I se déplace tout le long d'une des ellipses. Ces courbes partagent la surface de l'ellipsoïde en quatre fuseaux tels que, pour une valeur de K quelconque, la poloïde se compose de deux ovales renfermés à l'intérieur de deux de ces fuseaux opposés par le sommet, en sorte que le point I reste dans celui de ces espaces où il s'est trouvé à l'origine; la poloïde est symétrique par rapport aux trois plans principaux, et se projette sur eux suivant des coniques. K est toujours compris entre A et C; selon qu'il sera $\gtrless B$, la poloïde sera dans l'un ou l'autre couple de fuseaux opposés.

Dans l'espace absolu, le lieu de I est une courbe plane U_1, appelée *herpoloïde,* directrice du cône S_1. Soient P le plan sur lequel roule l'ellipsoïde central, T le point où il rencontre OG, ρ la longueur de OI, ds l'arc infiniment petit dont I se déplace pendant le temps dt, soit sur U, soit sur U_1; ρ et ds sont les mêmes pour les deux courbes; la relation qui les lie dans la poloïde sera une équation différentielle de l'herpoloïde. Écrivons

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2;$$

cette équation, jointe aux équations (3), détermine x, y, z en fonction de ρ :

$$x^2 = \frac{BC\rho^2 + K - B - C}{(A - B)(A - C)}, \quad y^2 = \frac{CA\rho^2 + K - C - A}{(B - C)(B - A)} \quad ,\ldots.$$

Prenant la racine, différentiant et élevant au carré, on

trouve

$$dx^2 = \frac{B^2C^2\rho^2 d\rho^2}{(A-B)(A-C)(BC\rho^2+K-B-C)} \cdots.$$

En ajoutant les trois quantités analogues, on aurait ds^2 en fonction de ρ et $d\rho$; or, si dans P on prend T pour pôle, si l'on fait $TI = u$, et qu'on appelle θ l'angle de TI avec une droite fixe, on aura

$$(4) \qquad ds^2 = du^2 + u^2 d\theta^2, \quad \rho^2 = u^2 + \frac{1}{K}, \quad \rho d\rho = u du;$$

l'équation qui donne ds^2 deviendra, en éliminant ds et ρ, une équation différentielle entre u et θ, conduisant à une intégrale elliptique. Sans effectuer la quadrature, on voit que, l'herpoloïde étant le lieu des points où P est touché par une orbe de la poloïde qui roule sur lui, cette orbe étant formée de quatre parties superposables, et ρ devenant tour à tour maximum et minimum aux sommets qui séparent ces parties, u est en même temps minimum ou maximum, et l'herpoloïde se compose d'arcs égaux, compris entre deux cercles dont le centre est en T, et que la courbe vient toucher alternativement.

Pour $K = A$ ou $K = C$, l'herpoloïde se réduit à un point; mais, pour $K = B$, c'est une courbe dont l'équation peut être explicitée. Les valeurs de $dx^2, \ldots$ se réduisent aux suivantes :

$$dx^2 = \frac{CB^2\rho^2 d\rho^2}{(A-B)(A-C)(B\rho^2-1)},$$

$$dy^2 = \frac{A^2C^2\rho^2 d\rho^2}{(B-A)(B-C)(AC\rho^2+B-A-C)},$$

$$dz^2 = \frac{AB^2\rho^2 d\rho^2}{(C-A)(C-B)(B\rho^2-1)},$$

$$ds^2 = \frac{(ABC\rho^2+B^2-AC-AB-BC)\rho^2 d\rho^2}{(B\rho^2-1)(AC\rho^2+B-A-C)}.$$

Faisons les substitutions (4), en supposant $K = B$, on obtiendra, après quelques réductions, l'équation différentielle de l'herpoloïde

$$d\theta = \frac{\pm du\sqrt{AC}}{u\sqrt{(A-B)(B-C) - ABCu^2}}.$$

Posons $(A-B)(B-C) = ABC\alpha^2$; on voit que u ne peut dépasser α, mais qu'il peut aller jusqu'à zéro; supposons $\theta = 0$ pour $u = \alpha$, l'intégrale est

$$\alpha\sqrt{B}\,\theta = L\left(\frac{\alpha}{u} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{u^2} - 1}\right), \quad \frac{2\alpha}{u} = e^{\alpha\theta\sqrt{B}} + e^{-\alpha\theta\sqrt{B}}.$$

La courbe est une spirale qui tourne indéfiniment autour du point T : quand le pôle I s'approche de ce point, la vitesse de rotation est sensiblement constante; mais, comme le cône S, réduit ici à un plan, doit rouler sur S_1, lequel se replie suivant une infinité de spires, I n'arrivera en T qu'après un temps infini.

Mouvement quelconque d'un solide.

191. On cherche d'abord le mouvement du centre de gravité, puis le mouvement relatif à des axes de direction constante dont l'origine coïncide avec ce centre; ce mouvement s'obtiendra en traitant le centre comme un point fixe, et en ne tenant compte que des forces extérieures, parce que les forces apparentes disparaissent. Veut-on, par exemple, connaître le mouvement d'un solide pesant, abandonné dans l'espace, et dont les molécules soient attirées vers un centre fixe proportionnellement à la distance (Licence, 1867), les attractions et la pesanteur ont une résultante unique appliquée au centre de gravité; rien de plus facile que de reconnaître que ce centre décrit alors une ellipse; quant au solide, il tourne autour de son centre

de gravité comme autour d'un point fixe et sans forces extérieures; ce mouvement relatif s'effectue donc suivant les règles de Poinsot.

192. *Mouvement d'un cylindre pesant homogène, abandonné sans vitesse initiale sur un plan incliné dépoli, de manière que ses génératrices restent toujours horizontales; on tient compte de la résistance au roulement.*

On peut réduire le cylindre à sa section médiane par rapport à laquelle tout est symétrique; les réactions du plan pourront être remplacées par une force dont la composante normale est N, et la composante tangentielle H, dirigée dans le sens montant. La résistance au roulement se traduit par ce fait que la réaction N s'exerce à une petite distance δ en avant du point de contact géométrique, et qu'elle a, par rapport à l'axe du cylindre, un moment $-N\delta$, en vertu duquel elle tend à diminuer la vitesse de rotation. Soient i l'angle du plan avec l'horizon, m la masse du cylindre, a son rayon, $f = \tang\varphi$ le coefficient de frottement, x la longueur parcourue parallèlement au plan par le centre de gravité, θ l'angle dont le cylindre a tourné autour de son axe, cette rotation constituant le mouvement relatif; on a l'équation du mouvement du centre de gravité et celle du mouvement autour de l'axe :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin i - H, \quad \frac{1}{2}ma^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = Ha - N\delta.$$

D'ailleurs, N est égal à $mg\cos i$, puisque le centre de gravité ne se déplace pas dans le sens de la normale au plan. Pour qu'il y ait roulement, il faut à la fois

$$(1) \qquad mg\sin i > H, \quad aH > N\delta > \delta mg\cos i.$$

Comme la limite extrême de H est $fmg\cos i$, pour que la

seconde inégalité ait lieu, il faut $f > \frac{\delta}{a}$, ce qui est le cas ordinaire dans la nature. Mais, quand $f < \frac{\delta}{a}$, il ne peut naître de mouvement de rotation; si alors $\tang i < f$, le centre de gravité restera lui-même en repos; si $\tang i > f$, on a un glissement simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin i - f\cos i), \quad x = \frac{1}{2}g(\sin i - f\cos i)t^2, \quad \theta = 0.$$

Soit maintenant $f > \frac{\delta}{a}$, pour que les deux inégalités (1) puissent être satisfaites, il faut $\tang i > \frac{\delta}{a}$; sinon il y a encore arrêt; au contraire, si cette inégalité est vérifiée, il peut y avoir roulement simple ou roulement compliqué de glissement. Pour qu'il y ait roulement simple, il faut qu'on ait

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d^2\theta}{dt^2};$$

on peut alors déduire des équations du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{3}\left(g\sin i - \frac{\delta}{a}g\cos i\right), \quad \mathrm{H} = \frac{1}{3}mg\left(\sin i + 2\frac{\delta}{a}\cos i\right).$$

Mais H doit être $< fmg\cos i$, il faut donc

$$\tang i < 3f - 2\frac{\delta}{a};$$

si cela a lieu, le centre du cylindre prend un mouvement uniformément accéléré, l'accélération étant réduite à peu près dans le rapport de 2 à 3, parce qu'une partie de la pesanteur sert à accélérer le mouvement de rotation. Quand $\tang i$ sera supérieur à $3f - 2\frac{\delta}{a}$, H sera égal à sa

limite $fmg\cos i$, et l'on aura roulement avec glissement;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g(\sin i - f\cos i), \quad a\frac{d^2\theta}{dt^2} = g\cos i\left(f - \frac{\delta}{a}\right);$$

il est remarquable que le mouvement du centre de gravité soit indépendant de δ dès qu'il y a glissement.

193. *Déterminer le mouvement d'une sphère homogène, posée sur un plan horizontal, assez rugueux pour empêcher tout glissement; les molécules de la sphère sont attirées vers un point* O *du plan avec une force proportionnelle à la distance; on néglige la résistance au roulement.* (Licence, 1874.)

Je prends le point O pour origine, le plan donné pour plan des xy, une verticale pour axe des z; soient x, y, a les coordonnées du centre S de la sphère, m sa masse; les attractions de O sur les divers points de la sphère ont une résultante appliquée en S, et dont les projections sur les axes sont $-\mu^2 mx$, $-\mu^2 my$, $-\mu^2 ma$. Au point de contact C de la sphère et du plan, la sphère éprouve une réaction dont les composantes sont X, Y, Z; on a, pour le mouvement du centre de gravité,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -m\mu^2 x + X,\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -m\mu^2 y + Y,\\ 0 &= mg + m\mu^2 a - Z.\end{aligned}\right.$$

Pour étudier le mouvement autour de S, on pourra mener par ce point des axes Sx_1, Sy_1, Sz_1 parallèles aux axes fixes, sans être obligé de prendre des axes liés au corps mobile; cela tient à ce que toute droite passant au centre d'une sphère est axe principal, et le moment d'inertie correspondant invariable. Soient p, q, r les composantes de la

rotation autour de $Sx_1 \ldots$; X, Y sont les seules forces dont le moment ne soit pas nul, et le théorème sur les moments des quantités de mouvement donne trois nouvelles équations :

$$(2) \qquad \frac{2}{5} a^2 m \frac{dp}{dt} = aY, \quad \frac{2}{5} ma^2 \frac{dq}{dt} = -aX, \quad \frac{dr}{dt} = 0.$$

Il faut encore deux équations pour pouvoir déterminer nos inconnues x, y, X, Y, Z, p, q, r; on les obtient en écrivant que la vitesse du point C est nulle; ses projections sur OX et OY sont les sommes des projections de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative par rapport au système $Sx_1 y_1 z_1$;

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} - aq = 0, \quad \frac{dy}{dt} + ap = 0.$$

Ces équations permettent de remplacer les deux premières du système (2) par les suivantes :

$$(4) \qquad \frac{2}{5} m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Y, \quad \frac{2}{5} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -X;$$

éliminant X et Y entre ces équations et les deux premières du groupe (1)

$$(5) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{5}{7} \mu^2 x = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{5}{7} \mu^2 y = 0.$$

Ce système connu montre que le point S, ainsi que le point C, décrit une ellipse dont le centre est sur OZ; comptons le temps à partir du passage à l'un des sommets, et supposons qu'alors y soit nul, $x = c$, $v = h$, les intégrales du mouvement seront

$$x = c \cos \mu t \sqrt{\frac{5}{7}}, \quad y = \frac{h}{\mu} \sqrt{\frac{7}{5}} \sin \mu t \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Les équations (3) donnent

$$p = -\frac{h}{a}\cos\mu t\sqrt{\frac{5}{7}}, \quad q = -\frac{c\mu}{a}\sqrt{\frac{5}{7}}\sin\mu t\sqrt{\frac{5}{7}};$$

quant à r c'est une constante. Il résulte de ces formules que si l'on mène par l'origine une droite qui, à chaque instant, représente en grandeur et en direction l'axe de la rotation instantanée, le lieu des extrémités de cette droite sera une ellipse horizontale.

Les équations (4) et (5) nous donnent les composantes horizontales de la réaction du plan

$$X = -\frac{2}{5}m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{7}\mu^2 mx, \quad Y = \frac{2}{7}\mu^2 my.$$

La résultante de ces deux forces est dirigée suivant OC et égale à $\frac{2}{7}\mu^2 m\mathrm{OC}$; pour que le mouvement ait lieu sans glissement, comme on l'a supposé, il faut qu'elle soit inférieure à Z multiplié par le coefficient de frottement

$$\frac{2}{7}\mu^2\mathrm{OC} < f(g + \mu^2 a).$$

Si l'inégalité n'est pas toujours vérifiée, il y a glissement, et le problème est plus compliqué.

194. *Mouvement d'une sphère homogène, posée sur un plan horizontal dépoli, qui tourne uniformément autour d'une verticale.* (WALTON.)

Prenons pour axe des z l'axe de rotation, et pour axes des x et des y deux droites rectangulaires, fixes dans l'espace, et passant par le point où OZ perce le plan. Le problème est analogue au précédent, si ce n'est que μ est nul, et que la vitesse de C, au lieu d'être nulle, est égale à celle du point du plan qui coïncide avec lui. Le système (3) sera

remplacé par le suivant :

$$\frac{dx}{dt} - aq = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} + ap = \omega x.$$

Le système (5), donné par l'élimination de p, q, X, Y, devient

$$7\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega\frac{dy}{dt} = 0, \quad 7\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\frac{dx}{dt} = 0.$$

Intégrant,

$$7\frac{dx}{dt} + 2\omega y = 7x'_0 + 2\omega y_0, \quad 7\frac{dy}{dt} - 2\omega x = 7y'_0 - 2\omega x_0.$$

Posons $y - y_0 - \frac{7}{2}\frac{x'_0}{\omega} = y_1$, $x - x_0 + \frac{7}{2}\frac{y'_0}{\omega} = y_1$, ce qui revient à transporter l'origine en un point connu A, on aura

$$7\frac{dy_1}{dt} + 2\omega y_1 = 0, \quad 7\frac{dy_1}{dt} - 2\omega x_1 = 0.$$

L'intégration de ces équations ou leur interprétation géométrique prouve que C tourne autour du point fixe A avec une vitesse angulaire $\frac{2}{7}\omega$; la trajectoire apparente de C sur le plan sera épicycloïdale; X et Y ont une résultante constamment dirigée vers A et de grandeur invariable.

Forces instantanées.

195. On nomme *forces instantanées* ou *percussions* des forces énergiques qui agissent pendant un temps très-court. Leur effet sur un système matériel se calcule comme celui des forces ordinaires, sauf quelques simplifications; on peut négliger, pendant la durée de la percussion, le déplacement des points du système et l'action des autres forces dont l'intensité est finie. Considérons une grande force F agissant, pendant un temps très-court θ, sur un solide; le centre de

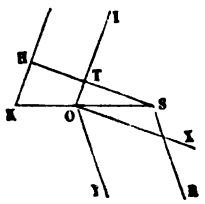
gravité O prendra une vitesse parallèle à F,

$$v = \frac{1}{M}\int_0^\theta F\,dt.$$

Cette intégrale est la mesure de la percussion P. Pour connaître le mouvement autour du centre de gravité, rappelons-nous (*voir* n° 187) qu'un couple G, agissant pendant un temps dt, donne une rotation autour du diamètre OI de l'ellipsoïde central conjugué du plan du couple. Cette rotation est égale à l'impulsion du couple multipliée par le cosinus de l'angle de son axe avec OI et divisée par le moment d'inertie autour de OI.

Cela posé, soit RS (*fig.* 24) la force instantanée; on

Fig. 24.



peut choisir son point d'application S de manière que l'angle OSR soit droit; le plan du couple G sera ORS, sa grandeur $F \times OS$, et ces éléments seront regardés comme constants pendant le choc. Si donc le diamètre OI conjugué de ORS fait l'angle θ avec la normale à ce plan et si MK^2 est le moment d'inertie relatif à OI, le couple communique au solide une rotation autour de OI

$$\omega = \frac{1}{MK^2}\int_0^\theta F \times OS \cos\theta\,dt = \frac{P \times OS \cos\theta}{MK^2}.$$

Cette rotation se compose avec la translation v pour don-

ner un mouvement hélicoïdal. Pour que le mouvement résultant soit une simple rotation, il faut que RS soit perpendiculaire à OI et, par suite, au plan IOS. Menons ST perpendiculaire à OI, on aura

$$ST = OS \cos\theta = \alpha,$$

et, si l'on prend $HT = \frac{K^2}{\alpha}$, la rotation résultante se fera autour de l'axe HK parallèle à OI. Je dis que cette droite est axe principal d'inertie par rapport à H. En effet, menons en O trois axes rectangulaires, OX parallèle à ST, OY à SR, et OI; l'équation de l'ellipsoïde central en O sera de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1.$$

Comme le plan conjugué de OZ ou OI passe par OY, il faut que $D = \Sigma myz$ soit nul; quant à C, il est égal à MK^2. Les équations de OS sont

$$y = 0, \quad Cz - Ex = 0;$$

les coordonnées de S sont donc α, 0, $\frac{E\alpha}{C}$; celles de H, $-\frac{K^2}{\alpha} = -\frac{C}{M\alpha}$, 0, $\frac{E\alpha}{C}$. Menons au point H trois axes OX′, OY′, OZ′ parallèles aux premiers; nous aurons, en nous rappelant les propriétés du centre de gravité,

$$\sum my'z' = \sum my\left(z - \frac{E\alpha}{C}\right) = \sum myz - \frac{E\alpha}{C}\sum my = 0,$$

$$\sum mx'z' = \sum m\left(x + \frac{C}{M\alpha}\right)\left(z - \frac{E\alpha}{C}\right) = \sum mxz - E = 0.$$

Si l'axe HK était fixe, il n'éprouverait pas de percussion, ce qu'on peut vérifier par l'expression générale de la charge supportée par un axe fixe.

Considérons un cube complétement libre et cherchons où il faudrait lui appliquer une percussion pour le faire tourner autour d'une de ses arêtes AB. L'ellipsoïde central, relatif au centre de gravité O, se réduit à une sphère; le plan conjugué de la direction AB lui est perpendiculaire et passe en son milieu C; $2a$ étant l'une des arêtes, le moment d'inertie autour de OI, parallèle à AB, est $\frac{2}{3}Ma^2$; il faut que la percussion soit perpendiculaire au plan ABO, et qu'elle rencontre CO en un point S tel, que $OS = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$; la vitesse de rotation sera $\frac{P}{Ma\sqrt{2}}$.

196. *Une barre homogène* OA, *de masse m, de longueur* $2a$, *peut tourner sur un plan horizontal autour de son extrémité* O; *à l'autre extrémité est articulée une barre égale* AB, *qui se meut aussi sans frottement sur le plan horizontal. On suppose les deux barres primitivement en ligne droite, et l'on applique une percussion* P *perpendiculaire en un point* S *de* AB; *déterminer le mouvement initial des deux barres et les réactions en* O *et* A *qui se produisent au moment du choc.*

Soient OX la droite qui coïncide d'abord avec OAB, s la distance AS, α, β les vitesses angulaires de OA et de AB après le choc; le moment de la percussion par rapport à O est égal à la somme des moments des quantités de mouvement des deux barres. Pour calculer la partie de cette somme relative à AB, je remarque que son centre de gravité a pour vitesse $2a\alpha + a\beta$; le moment de la quantité de mouvement, en y supposant la masse concentrée, est $3ma(2a\alpha + a\beta)$; il faut y ajouter la somme correspondant au mouvement relatif autour de ce centre, $\frac{1}{3}ma^2\beta$.

On a

$$(1)\qquad \frac{4}{3}ma^2\alpha + 3ma^2(2\alpha+\beta) + \frac{1}{3}ma^2\beta = P(2a+s).$$

La somme des moments des quantités de mouvement de AB par rapport à A est égale au moment de la percussion P, car la réaction de OA en A a un moment nul;

$$(2)\qquad ma^2(2\alpha+\beta) + \frac{1}{3}ma^2\beta = Ps.$$

Les équations (1) et (2) donnent les vitesses angulaires initiales

$$\alpha = \frac{3P}{14ma^2}(4a-3s),\quad \beta = \frac{3P}{14ma^2}(8s-6a).$$

Rien de plus facile que de discuter ces formules. Par exemple, pour que α et β soient égaux ou que les barres restent d'abord en ligne droite, il faut $s = \frac{10}{11}a$. La percussion Q, que AB reçoit en A par suite de sa liaison avec OA, s'obtient en exprimant la vitesse du centre de gravité de AB

$$(2\alpha+\beta)a = \frac{P+Q}{m},\quad Q = \frac{3s-4a}{7a}P = -\frac{2}{3}ma\alpha.$$

La percussion R, que reçoit O, se tire de la vitesse du centre de gravité de OA

$$a\alpha = -\frac{1}{m}(Q+R),\quad R = -\frac{1}{3}ma\alpha = \frac{1}{2}Q.$$

Pour avoir le mouvement ultérieur du système, on exprime que la force vive et la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à O restent constantes; θ étant l'angle AOX, ψ l'angle de AB avec OA prolongé, on

trouve, après de simples transformations,

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{7(\beta-\alpha)^2 - 12(4\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2)(1-\cos\psi)}{16 - 9\cos^2\psi},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{11\alpha + 5\beta - (2+3\cos\psi)\psi'}{2(5+3\cos\psi)};$$

$\frac{d\psi}{dt}$ s'annule pour des valeurs ψ_1, $-\psi_1$, comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; ψ doit osciller entre ces valeurs; quant à θ, il peut ou osciller ou croître indéfiniment; on discute aisément $d\theta$ en remarquant que $(2+3\cos\psi)\psi'$ est maximum en valeur absolue pour $\psi = 0$.

197. *Une barre très-mince se meut sur un plan horizontal parfaitement poli; le centre instantané de rotation coïncide avec l'un de ses points,* A, *lorsqu'elle rencontre un obstacle fixe* M; *déterminer la grandeur de la percussion et le mouvement ultérieur de la barre.*

(Agrégation, 1872.)

Soient v, v' les vitesses du centre de gravité O avant et après le choc; ω, ω' les vitesses de rotation correspondantes; $m\mathrm{K}^2$ le moment d'inertie autour de O; a, x les longueurs OA, OM. On suppose A à gauche de O et M à droite quand x est positif; v est perpendiculaire à la barre et égal à $a\omega$. Après le choc, en supposant la barre dépourvue d'élasticité, M reste momentanément en repos et est centre instantané de rotation; v' est perpendiculaire sur AO et $v' = -\omega' x$. Le moment de la quantité de mouvement par rapport à M est constant :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} -mvx + m\mathrm{K}^2\omega &= -mv'x + m\mathrm{K}^2\omega', \\ m\omega(\mathrm{K}^2 - ax) &= m\omega'(\mathrm{K}^2 + x^2); \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\omega' = \frac{K^2 - ax}{K^2 + x^2}\omega, \quad v' = \frac{x(ax - K^2)}{K^2 + x^2} \times \frac{v}{a}.$$

Soit B le point conjugué de A, à droite de O, et tel que $OA \times OB = K^2$; quand M est à droite de B, ω' est de sens contraire à ω, v' de même signe que v; quand M est entre O et B, ω' est de même signe que ω, v' de signe contraire à v; il y a une sorte de réflexion. En discutant la valeur de v', on trouve qu'elle est maximum ou minimum, égale à $\left(a \pm \sqrt{a^2 + K^2}\right)\frac{v}{2a}$ pour $x = -a \mp \sqrt{a^2 + K^2}$. La grandeur de la percussion reçue par l'obstacle est mesurée par la variation de la quantité de mouvement de la barre projetée sur une perpendiculaire

$$P = m(v - v') = \frac{K^2 mv(x + a)}{x^2 + K^2}.$$

Elle atteint un maximum $\frac{1}{2}m\omega\left(a + \sqrt{a^2 + K^2}\right)$ pour $x = \sqrt{a^2 + K^2} - a$.

Si l'on avait supposé la barre parfaitement élastique, il aurait fallu adjoindre à l'équation (1) la condition que la force vive reste constante :

$$v^2 + K^2\omega^2 = v'^2 + K^2\omega'^2,$$

et l'on aurait pu calculer v' et ω', qui, dans les deux cas, ne varient plus.

198. *Étant donné un système en équilibre grâce à certaines liaisons, on suppose que quelques-unes de ces liaisons viennent à être détruites, et l'on propose de calculer les réactions qui représentent les liaisons restantes aussitôt après la rupture de l'équilibre.*

Ces questions se rattachent aux forces instantanées.

M. W. Besant en a traité plusieurs dans le tome IV du *Journal de Cambridge*; il prend les équations du mouvement du système aussitôt après la rupture des liaisons, en y négligeant les termes de l'ordre du carré des vitesses; ainsi, pour le mouvement dans un plan, on réduit les composantes de l'accélération suivant le rayon vecteur et sa normale à $\frac{d^2r}{dt^2}$ et à $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$; on traite comme nulle l'accélération centripète, etc.

Considérons une planche elliptique dont le plan est vertical et dont les foyers, situés à la même hauteur, sont soutenus par deux chevilles; on en retire une, et l'on demande la pression P supportée par l'autre immédiatement après. Soit ω la vitesse angulaire du disque après un temps très-court; l'accélération du centre peut être regardée comme simplement tangentielle et dirigée vers le bas

$$m\frac{dv}{dt} = mae\frac{d\omega}{dt} = mg - \mathrm{P}.$$

Prenons le moment de la quantité de mouvement autour du point fixe

$$mgae = (a^2e^2 + \mathrm{K}^2)m\frac{d\omega}{dt} = ma^2\frac{2+3e^2}{4}\frac{d\omega}{dt};$$

éliminons $\frac{d\omega}{dt}$, et nous aurons

$$\mathrm{P} = \frac{2-e^2}{2+3e^2}mg.$$

Elle est inférieure ou supérieure à la charge d'équilibre $\frac{1}{2}mg$, selon que $e^2 \gtrless \frac{2}{5}$.

Soit encore un fil dont les extrémités A et D sont fixes, et qui porte deux masses m, m' attachées en B et C, de manière que BC soit horizontal; on coupe la partie CD, et

l'on demande les tensions initiales T, T′ des cordons AB et BC. Le point B décrit un arc de cercle normal à AB; on peut regarder d'abord son accélération suivant AB comme nulle, et l'accélération totale γ comme perpendiculaire à ce rayon. Si donc θ est l'angle de AB avec la verticale, on a

$$T - T' \sin\theta - mg\cos\theta = 0, \quad m\gamma = mg\sin\theta - T'\cos\theta.$$

L'accélération relative de C par rapport à B est tout entière perpendiculaire à CB; son accélération totale, qui est la résultante de la précédente et de l'accélération de B, aura $\gamma\cos\theta$ pour projection sur CB; $T' = m'\gamma\cos\theta$. On tire de cette relation et des deux premières

$$T = \frac{m(m+m')g\cos\theta}{m+m'\cos^2\theta}, \quad T' = \frac{mm'g\sin\theta\cos\theta}{m+m'\cos^2\theta};$$

la vitesse initiale de C sera dirigée suivant la résultante de T′ et de $m'g$.

EXERCICES.

Moment d'inertie d'un secteur sphérique à une base autour d'une droite passant au centre de la sphère et perpendiculaire à l'axe du solide. β étant le demi-angle au centre, la densité étant 1.

$$I = \frac{1}{15} R^5 (4 - 3\cos\beta - \cos^3\beta). \quad \text{(Walton.)}$$

Un pendule a la forme d'une lentille biconvexe, soutenue par une tige droite dont la masse est négligeable; déterminer le point de la tige où il faudrait placer le centre d'une sphère donnée pour accélérer le plus possible les oscillations du pendule composé.

Une tige rigide, très-mince et homogène, est suspendue en l'un de ses points autour duquel elle peut osciller librement, comme un pendule conique; appliquer les formules du mouvement d'un solide autour d'un point fixe à l'étude de son mouvement.

Une chaîne mince et homogène est partiellement enroulée sur

la gorge d'une poulie mobile autour d'un axe horizontal dont le rayon est donné; le bout libre de la chaîne est vertical et se termine par un poids; déterminer le mouvement du système quand on permet à la poulie de tourner et à la chaîne de se dérouler; on néglige la roideur de la chaîne, mais on tient compte de son poids et du frottement de l'axe de la poulie sur les tourillons.

Mouvement d'une sphère pesante abandonnée sans vitesse initiale à l'intérieur d'une sphère creuse dans laquelle elle ne peut que rouler sans glisser.

Un cylindre est posé sur un plan horizontal dépoli; quel sera le mouvement du cylindre si l'on vient à faire tourner le plan avec une vitesse uniforme autour de l'horizontale qui coïncidait primitivement avec l'arête de contact du cylindre? Époque où le corps se détache du plan. On décomposera l'action du plan sur le cylindre en deux parties, l'une normale au plan, l'autre suivant ce plan, et l'on écrira que le point du cylindre qui est sur le plan a une vitesse relative nulle. Le cylindre se détache quand la réaction normale du plan est nulle, à une époque donnée par l'équation

$$9\cos\omega t - 2(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = 5\frac{a\omega^2}{g}. \quad \text{(W. Walton.)}$$

Mouvement général d'une sphère sur un plan horizontal dépoli, en négligeant la résistance au roulement. (Coriolis.)

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE.

Principe des vitesses virtuelles.

199. Nous allons étudier très-rapidement certaines équations générales auxquelles les géomètres ont ramené la résolution de tous les problèmes de Mécanique; c'est une méthode moins directe que l'emploi des considérations mécaniques proprement dites, mais elle est remarquable par sa généralité et sa puissance. On peut dire que toute la Statique est comprise dans le principe des vitesses virtuelles, énoncé par Bernoulli : *dans un système en équilibre, la somme des travaux des forces qui y sont appliquées est nulle pour tout déplacement virtuel des points du système, compatible avec les liaisons.* Toutefois, quand quelques points du système sont simplement posés sur des surfaces, et qu'on leur donne un déplacement virtuel du côté où ils sont libres, la somme des travaux virtuels devient négative. On emploie indifféremment dans cet énoncé les mots de *travail virtuel, moment virtuel, vitesse virtuelle.*

Soient δx, δy, δz les projections rectangulaires du déplacement virtuel donné à l'un des points du système; X, Y, Z les composantes de la force extérieure qui le sollicite; on a, en faisant la somme relative à tous les points, dont le nombre est n,

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0;$$

δx, δy, δz sont tels que les liaisons soient respectées.

Quand celles-ci s'expriment par des équations

$$(1) \qquad F(x, y, z, x_1, \ldots) = 0, \quad F_2 = 0, \ldots, \quad F_k = 0,$$

on a, i prenant toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à k,

$$(2) \qquad \frac{dF_i}{dx}\delta x + \frac{dF_i}{dy}\delta y + \frac{dF_i}{dz}\delta z + \frac{dF_i}{dx_1}\delta x_1 + \ldots = 0.$$

On peut tirer de là k variations en fonction des autres, et, les substituant dans (1), on égale à zéro les coefficients de celles qui restent, en nombre $3n - k$. Il revient au même d'ajouter à (1) les équations (2) multipliées respectivement par des indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et d'annuler les coefficients de toutes les variations; on a le même résultat que si un point quelconque x, y, z était libre, mais qu'on lui ait appliqué k forces, les composantes de l'une d'elles étant $\lambda_i \frac{dF_i}{dx}$, $\lambda_i \frac{dF_i}{dy}$, $\lambda_i \frac{dF_i}{dz}$.

Quand la position du système est déterminée par des variables $q_1, q_2, \ldots, q_r$, on peut transformer (1) en fonction de ces variables, et annuler le coefficient de chaque variation indépendante. Enfin en donnant des déplacements virtuels convenablement choisis, on peut obtenir des équations particulières d'équilibre contenues dans l'équation (1), et faciles à former.

200. *Position d'équilibre d'un point* M *placé sur un plan incliné* P, *et attiré vers un point* O *proportionnellement à la distance; pression sur le plan.*

Prenons O pour origine, avec un axe des z vertical; soit l'équation du plan P

$$x \cos\alpha + z \sin\alpha - p = 0;$$

l'équation des travaux virtuels est évidemment

$$-\mu^2 x\,\delta x - \mu^2 y\,\delta y - (\mu^2 z + mg)\,\delta z = 0.$$

J'y ajoute $\lambda(\cos\alpha\,\delta x + \sin\alpha\,\delta z)$, et j'annule le coefficient

de chaque δ;

$$-\mu^2 x + \lambda \cos\alpha = 0, \quad \mu^2 y = 0, \quad -\mu^2 z - mg + \lambda \sin\alpha = 0.$$

Ces équations avec celles de P donnent les coordonnées de la position d'équilibre, et la valeur λ de la pression, qui est normale au plan,

$$\lambda = \mu^2 p + mg \sin\alpha, \quad x = \frac{\lambda \cos\alpha}{\mu^2}, \quad y = 0, \quad z = \frac{\lambda \sin\alpha - mg}{\mu^2}.$$

201. *Une tige* AB *de poids* P *repose sur une cheville horizontale* C *et s'appuie par son extrémité inférieure* A *contre un mur vertical; il n'y a pas de frottements. Déterminer la position d'équilibre et les réactions.*

On connaît la distance $OC = c$ de la cheville au mur, et la distance $AM = a$ du centre de gravité de la barre à son extrémité appuyée; il s'agit de trouver l'angle θ de AB avec la verticale. Le plan vertical qui contient la tige est perpendiculaire au mur : faisons remonter A le long de ce mur; la seule force qui donne un travail virtuel est la pesanteur qui agit en M; la hauteur de M au-dessus de OC, $a\cos\theta - c\cot\theta$, ne doit pas changer

$$\frac{c}{\sin^2\theta} - a\sin\theta = 0, \quad \sin\theta = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}.$$

Pour avoir la réaction R de la cheville, supprimons cet appui, introduisons la force R et faisons tourner AB de $\delta\theta$ autour de A;

$$aP\sin\theta\,\delta\theta - \frac{Rc}{\sin\theta}\delta\theta = 0, \quad R = \frac{aP}{c}\sin^2\theta = P\sqrt[3]{\frac{a}{c}} = \frac{P}{\sin\theta}.$$

La réaction N du mur s'obtient à l'aide d'une translation virtuelle horizontale;

$$N\delta x - R\cos\theta\,\delta x = 0, \quad N = R\cos\theta = P\cot\theta.$$

202. *Trois points* A, B, C, *assujettis à rester sur un*

cercle, se repoussent avec une intensité proportionnelle à la distance; position d'équilibre.

Soient α, β, γ les trois masses, R le rayon; on a

$$BC = 2R \sin A;$$

pour une variation δA, le travail virtuel des forces exercées par B et C l'une sur l'autre sera

$$2f\beta\gamma R \sin A \times \delta 2R \sin A;$$

l'équation du travail est, en divisant par $2f R^2 \alpha\beta\gamma$,

$$(1) \qquad \frac{\sin 2A}{\alpha}\delta A + \frac{\sin 2B}{\beta}\delta B + \frac{\sin 2C}{\gamma}\delta C = 0;$$

mais $A + B + C = \pi$, $\delta C = \delta A + \delta B$; donc

$$\frac{\sin 2A}{\alpha} = \frac{\sin 2B}{\beta} = \frac{\sin 2C}{\gamma}.$$

$2A + 2B + 2C = 2\pi$; construisons un triangle dont les côtés soient α, β, γ, ses angles seront les suppléments de A, B, C; mais cette solution n'est possible que si $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \gamma + \alpha$, $\gamma < \alpha + \beta$. L'équation (1) peut toujours être satisfaite en posant $\sin 2A = \sin 2B = \sin 2C = 0$, deux des angles 2A et 2B étant égaux à π, et le troisième à zéro; on a une position d'équilibre qui convient dans tous les cas.

203. *Condition d'équilibre du genou.* (Licence, 1860.)

Le genou se compose essentiellement de deux barres OA, AB articulées en A; l'extrémité O est articulée en un point d'une droite fixe OX, tandis que l'autre extrémité B est assujettie à glisser sur OX. Une force F dans le plan OAB agit sur un point C de OA, tandis qu'une autre force R pousse le point B dans le sens XO; étant donné l'angle φ de F avec OA, trouver la force R qui peut lui faire équilibre.

Soient θ l'angle AOX, et $OB = x$; si l'on donne à x l'accroissement δx, à θ l'accroissement $\delta\theta$, le théorème du travail devient

$$-F \times OC \sin\varphi\,\delta\theta - R\,\delta x = 0.$$

D'ailleurs on a, par la Géométrie,

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + x^2 - 2x\,OA\cos\theta,$$
$$x\,\delta x - OA(\cos\theta\,\delta x - x\sin\theta\,\delta\theta) = 0;$$

éliminons δx et $\delta\theta$ entre cette équation et celle du travail virtuel, et nous aurons

$$\frac{R}{F} = \frac{OC(x - OA\cos\theta)\sin\varphi}{x \times OA\sin\theta};$$

la machine est d'autant plus puissante que θ est plus petit; dans les appareils à frapper les monnaies $OA = AB = OC$. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$; alors $R = \frac{F}{2}\cot\theta$.

204. *On imagine une pile triangulaire de boulets sphériques parfaitement polis, dont la base serait retenue par trois murs verticaux formant prisme triangulaire; déterminer la pression exercée contre chaque mur.*

Soient n le nombre des boulets qui forment un côté de la tranche inférieure, a leur rayon; écartons virtuellement tous les boulets de la tranche inférieure de manière que la distance des centres de deux globes contigus deviennent $2(a+\varepsilon)$, et que le centre O du triangle circonscrit à la base ne bouge pas. Les côtés du triangle formé par les centres des boulets qui sont au périmètre de la tranche inférieure augmentent de $2(n-1)\varepsilon$, et chacun de ses côtés doit s'avancer à l'encontre du mur de $\frac{n-1}{\sqrt{3}}\varepsilon$; si donc on remplace la fixité des appuis par l'adjonction d'une force F qui produise le même effet, au recul des parois correspondra un

travail virtuel $-(n-1)\varepsilon F\sqrt{3}$. D'autre part, soient D le centre d'un boulet de la deuxième tranche reposant sur trois de la première dont les centres sont A, B, C; I le centre de ABC; la hauteur de D au-dessus du plan ABC était d'abord $\sqrt{4a^2-\overline{AI}^2}$; AI augmentant de $\delta AI=\frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}}$, la distance de D à ABC diminue de

$$\frac{\overline{AI}\,\delta\overline{AI}}{\sqrt{4a^2-\overline{AI}^2}}=\frac{2\varepsilon}{\sqrt{6}};$$

telle est la quantité dont chaque tranche se rapproche de celle qui la supporte. En tenant compte de l'abaissement des diverses tranches et du nombre de leurs boulets, en appelant P le poids de l'un d'eux, on a le travail virtuel de la pesanteur

$$\begin{aligned}
&\frac{2P\varepsilon}{\sqrt{6}}\left[\frac{n(n-1)}{2}+2\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\ldots\right.\\
&\qquad\left.+i\frac{(n-i+1)(n-i)}{2}+\ldots+(n-1)\right]\\
&=\frac{P\varepsilon}{\sqrt{6}}\sum_{i=1}^{i=n-1}\left[n(n+1)i-(2n+1)i^2+i^3\right]\\
&=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{12}\frac{P\varepsilon}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

En égalant ce travail au travail résistant des parois, on en tire

$$F=\frac{n(n+1)(n+2)}{36\sqrt{2}}P.$$

Pour une pile à base carrée, on a, dans des circonstances analogues,

$$F=\frac{n^2(n+1)}{24\sqrt{2}}P.$$

205. *Un point pesant* M *est attiré vers deux points* A *et* B *proportionnellement à la distance; il est porté par une tige sans masse qui peut tourner autour du point* O, *milieu de* AB; *position d'équilibre; reconnaître si l'équilibre est stable ou instable.*

Pour décider de la stabilité de l'équilibre d'un système, on peut supposer les divers points légèrement écartés de leurs positions d'équilibre, chercher les forces auxquelles ils sont alors soumis et la nature de leurs mouvements, en se bornant aux termes principaux des équations que l'on obtient; on voit si les points tendent à osciller autour de leurs positions d'équilibre ou à s'en écarter de plus en plus. Mais Lagrange a établi une règle qui suffit souvent: supposons que le travail correspondant à un déplacement virtuel quelconque du système soit la variation exacte δV d'une fonction dite *fonction des forces :* quand V passe par un maximum, il y a équilibre stable; quand il est minimum, l'équilibre est instable.

Dans le cas proposé, on peut admettre que, pour l'équilibre, M doit être dans le plan vertical qui contient AB. Appelons θ l'angle dont OM a tourné en partant de la direction OA et commençant par passer en dessous; a les distances OA, OB; c la longueur OM, λ et μ les attractions de A et B sur M à l'unité de distance, P le poids de M; on a pour expression générale du travail virtuel

$$\begin{aligned}\delta V &= -\lambda AM\delta AM - \mu BM\delta BM + P\delta(c\sin\theta)\\ &= Pc\cos\theta\delta\theta - \frac{1}{2}\delta\left(\lambda\overline{AM}^2 + \mu\overline{BM}^2\right);\end{aligned}$$

mais $\overline{AM}^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta$, $\overline{BM}^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\theta$; donc

$$\delta V = [a(\mu - \lambda)\sin\theta + P\cos\theta]c\delta\theta;$$

δV s'annule pour $\operatorname{tang}\theta = \dfrac{P}{a(\lambda - \mu)}$; on a deux valeurs de θ,

α et $\pi + \alpha$. Pour savoir si l'équilibre est stable, comme la fonction V existe et ne dépend que d'une variable, prenons

$$\delta^2 V = [a(\mu - \lambda)\cos\theta - P\sin\theta]c\delta\theta^2 = [a(\mu - \lambda)\cot\theta - P]c\sin\theta\delta\theta^2;$$

la parenthèse se réduit à $-\frac{a^2}{P}(\mu - \lambda)^2 - P$ pour les valeurs de θ répondant à l'équilibre. Si donc on prend $\theta = \alpha < \pi$, $\delta^2 V$ est < 0, V maximum, équilibre stable; pour $\theta = \pi + \alpha$, V minimum, équilibre instable.

Principe de d'Alembert.

206. Dans tout système en mouvement, il y a à chaque instant équilibre, en vertu des liaisons, entre les forces extérieures appliquées au système et les forces d'inertie, c'est-à-dire les forces égales et de sens contraire à celles qui donneraient à chaque point supposé libre le mouvement qu'il a réellement; pour le point de masse m et de coordonnées x, y, z, les composantes de la force d'inertie sont

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ce principe, l'un des plus importants de la Mécanique analytique, ramène la Dynamique à la Statique. En exprimant l'équilibre idéal qu'il indique à l'aide de l'équation du travail virtuel et considérant tous les points d'un système en mouvement, on a

$$(1) \quad \sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0;$$

δx, δy, δz sont les projections rectangulaires d'un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, telles qu'elles existent à l'instant indivisible t. Si les liaisons changent

avec le temps, ces déplacements peuvent être irréalisables. Quand les équations de condition sont

$$f_1(t, x, y, z, x_1, \ldots) = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_n = 0,$$

on a des relations de la forme suivante :

$$\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z + \frac{df}{dx_1}\delta x_1 + \ldots = 0.$$

Ajoutons à l'équation (1) les équations analogues à la précédente, multipliées par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et annulons le coefficient de chaque variation,

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1\frac{df_1}{dx} + \ldots + \lambda_n\frac{df_n}{dx} = 0,$$

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1\frac{df_1}{dy} + \ldots + \lambda_n\frac{df_n}{dy} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La liaison $f = 0$ produit des réactions dont les composantes, appliquées au point (x, y, z), sont $\lambda f'_x$, $\lambda f'_y$, $\lambda f'_z$, et ainsi aux autres points.

207. Le lecteur pourra appliquer le principe de d'Alembert aux problèmes que j'ai développés sur le mouvement des systèmes; je prends seulement un calcul qui sert à trouver les pressions exercées sur deux points fixes par un corps tournant autour de la droite qui les joint; ce sont les résultantes des forces extérieures et d'inertie. Je me borne à composer ces dernières. Reportons-nous aux notations du n° 182 : les composantes de la force d'inertie du point m sont, la rotation ayant lieu autour de l'axe des z,

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}m\omega y = m(\omega^2 x + \omega' y),$$

$$-m\frac{d^2y}{dt^2} = m(\omega^2 y - \omega' x),$$

$$-m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Si l'on transporte ces forces à l'origine, on a une résultante

$$M(\omega^2 x_1 + \omega' y_1), \quad M(\omega^2 y_1 - \omega' x_1), \quad 0,$$

et un couple dont les composantes, situées dans les plans coordonnés, sont

$$L = \Sigma m\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) = -\omega^2\alpha + \omega'\beta,$$
$$M = \omega^2\beta + \omega'\alpha,$$
$$N = -\Sigma m(x^2+y^2)\omega' = -MK^2\omega'.$$

208. *Un point matériel* M *est renfermé dans un tube circulaire horizontal dont le centre reste fixe et dont le rayon augmente proportionnellement au temps; le point étant mis en mouvement, déterminer sa trajectoire et sa pression sur le tube.*

Le rayon du tube peut être représenté par $r = a + bt$; la pesanteur est la seule force extérieure qui agisse, et l'équation de d'Alembert devient, en prenant l'axe du cercle pour axe des z,

$$(1) \qquad -m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m\frac{d^2y}{dt^2}\delta y - \left(mg + m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0.$$

Les coordonnées du mobile sont assujetties aux relations

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = (a+bt)^2, \quad z = 0.$$

Prenons les variations, en regardant t comme constant,

$$x\delta x + y\delta y = 0, \quad \delta z = 0.$$

Ajoutons à l'équation (1) ces équations multipliées respectivement par λ et λ', et égalons à zéro le coefficient de chaque variation,

$$(3) \qquad \lambda x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \lambda y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \lambda' = mg + m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Éliminant λ entre les deux premières, on obtient

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c^2.$$

On remplace x, y par les coordonnées polaires r, θ, et l'équation précédente devient

$$c^2 = r^2\frac{d\theta}{dt} = (a + bt)^2\frac{d\theta}{dt}.$$

Intégrant et faisant $\theta = 0$ pour $t = 0$, on trouve

$$\theta = \frac{c^2}{b}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+bt}\right), \quad \frac{1}{a+bt} = \frac{1}{r} = -\frac{b}{c^2}\left(\theta - \frac{c^2}{ab}\right);$$

la trajectoire est une spirale hyperbolique dont l'asymptote fait l'angle $\frac{c^2}{ab}$ avec l'axe polaire, et le pôle est à l'origine.

Les équations (3) font connaître l'action du tube sur le mobile. Comme $z = 0$, on a d'abord $\lambda' = mg$; puis, en combinant les deux premières,

$$\lambda\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

ou, en tenant compte de ce qui précède,

$$\lambda r\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\left(b^2 + \frac{c^4}{r^2}\right) = -\frac{mc^4}{r^3}\frac{dr}{dt}, \quad \lambda = -\frac{mc^4}{r^4}.$$

La pression exercée sur le cercle sera égale et de sens contraire à la force qu'on vient de calculer; elle a une composante verticale égale au poids de M, et une composante $\frac{mc^4}{r^3}$ dirigée suivant OM prolongé.

209. *On donne deux petits poids égaux,* A, B, *assujettis à rester, le premier sur un plan incliné* P, *le second sur une verticale* D, *et s'attirant proportionnellement à*

la distance; déterminer leurs mouvements sans tenir compte du frottement. Cas particulier : l'angle i de P *avec l'horizon a pour sinus* $\frac{3}{4}$, *les positions initiales de* A *et* B *sont celles qui conviendraient à l'équilibre, et la vitesse initiale de* A *est telle, que ses projections sur une horizontale et sur une ligne de pente de* P *soient égales chacune à la vitesse initiale c de* B. (Licence, 1874.)

Je prends pour origine le point d'intersection de D et de P, pour axe des x la ligne de plus grande pente qui y passe, pour axe des y une horizontale de P, et pour axe des z une normale au plan dirigée en dessous; je suppose les masses de A et de B égales à l'unité, et j'appelle μ^2 leur attraction à l'unité de distance; les coordonnées de A sont x, y, o, celles de B x', o, z'. Il est facile d'écrire l'équation de d'Alembert, où manquent δz et $\delta y'$, qui sont nuls;

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\mu^2(x'-x)+g\sin i-\frac{d^2x}{dt^2}\right]\delta x-\left(\mu^2 y+\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y\\ &\quad+\left[\mu^2(x-x')+g\sin i-\frac{d^2x'}{dt^2}\right]\delta x'\\ &\qquad\qquad+\left(g\cos i-\mu^2 z'-\frac{d^2z'}{dt^2}\right)\delta z'=0. \end{aligned}\right.$$

Au lieu de prendre la relation $z'=x'\cot i$, que la figure rendrait évidente, il vaut mieux considérer la distance $OB=r$, qui donne $x'=r\sin i$, $z'=r\cos i$, $\delta x'=\sin i\,\delta r$, $\delta z'=\cos i\,\delta r$. Égalons à zéro les coefficients de δx, δy et δr dans l'équation (1), et nous aurons les équations générales du mouvement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2}=\mu^2(r\sin i-x)+g\sin i,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\mu^2 y,\\ &\qquad\qquad \frac{d^2r}{dt^2}=g+\mu^2(x\sin i-r). \end{aligned}\right.$$

Soient α, β, ρ les valeurs de x, y, r qui conviendraient à l'équilibre; on peut les calculer à l'aide de l'équation du travail virtuel, qui n'est autre que l'équation (1), où l'on aurait supprimé $\frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$; on en conclut un système d'équations correspondant au système (2) :

$$(3)\quad \mu^2(\rho \sin i - \alpha) + g \sin i = 0, \quad \beta = 0, \quad \mu^2(\alpha \sin i - \rho) + g = 0.$$

Ces équations donnent α, β et ρ. Posons

$$x = \alpha + x_1, \quad y = \beta + y_1, \quad r = \rho + r_1,$$

et retranchons les équations (3) des équations (2);

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \mu^2(r_1 \sin i - x_1), \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\mu^2 y_1, \quad \frac{d^2r_1}{dt^2} = \mu^2(x_1 \sin i - r_1).$$

On remplace la première et la dernière par celles qu'on obtient en les ajoutant ou en les retranchant membre à membre,

$$\frac{d^2(x_1 + r_1)}{dt^2} = -\mu^2(1 - \sin i)(x_1 + r_1),$$

$$\frac{d^2(x_1 - r_1)}{dt^2} = -\mu^2(1 + \sin i)(x_1 - r_1).$$

Toutes nos équations s'intègrent séparément, et donnent pour les inconnues qu'elles renferment des valeurs périodiques. Dans notre cas particulier, x_1, y_1, r_1 sont nuls à l'instant initial; leurs dérivées par rapport à t ont alors la valeur commune c, et, comme $1 - \sin i = \frac{1}{4}$, on trouve que les intégrales générales se réduisent ainsi :

$$y_1 = \frac{c}{\mu} \sin \mu t, \quad x_1 + r_1 = \frac{4c}{\mu} \sin \frac{1}{2} \mu t, \quad x_1 - r_1 = 0.$$

L'équation de la trajectoire de A s'obtient en éliminant μt entre les valeurs de x_1 et de y_1 : $\mu^2 x_1^4 = 4c^2(x_1^2 - y_1^2)$.

Prenons des coordonnées polaires u et θ avec le point α, β pour pôle,

$$u^2 = \frac{2c^2 \cos 2\theta}{\cos^4 \theta};$$

c'est une courbe du quatrième ordre, qui ressemble à une lemniscate de Bernoulli.

210. *Déterminer le mouvement d'une chaîne homogène, flexible, très-mince, mais pesante, placée sur deux plans inclinés dont l'intersection est horizontale, et devant rester dans un plan perpendiculaire à cette intersection.*

Soient OP, OQ les deux lignes de plus grande pente sur lesquelles glisse la chaîne; α, β leur angle avec l'horizon; la longueur de la chaîne, ε la masse de l'unité de longueur, x la portion OA de chaîne qui est suivant OP; la longueur OB, suivant OQ, sera égale à $l - x$. Pour un déplacement virtuel δx, la somme des travaux des forces d'inertie et de la pesanteur sera

$$\left[\varepsilon g x \sin\alpha - \varepsilon g (l - x) \sin\beta - l\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2}\right] \delta x.$$

Égalons ce travail à zéro, divisons par $\varepsilon \delta x$, et faisons $g(\sin\alpha + \sin\beta) = la^2$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - a^2 x + g \sin\beta = 0.$$

Les intégrales sont

$$\frac{dx}{dt} = a(\mathrm{A}e^{at} - \mathrm{B}e^{-at}),$$

$$x - \frac{g \sin\beta}{a^2} = x - \frac{l \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \mathrm{A}e^{at} + \mathrm{B}e^{-at};$$

on peut toujours supposer, en prenant pour notre premier

plan incliné celui sur lequel la chaîne descend d'abord, que la valeur initiale de $\frac{dx}{dt}$ soit $v_0 > 0$; les constantes sont déterminées par les relations

$$\frac{v_0}{a} = A - B, \quad x_0 - \frac{l \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = A + B,$$

On a toujours $A > B$. Si $A > 0$, la vitesse ne s'annule pas, et toute la chaîne passe sur OP; ensuite son mouvement devient uniformément accéléré; mais, si $A < 0$, la vitesse s'annule quand $Ae^{at} = Be^{-at}$; alors on a

$$x = \frac{l \sin\beta}{\sin\beta + \sin\alpha} + 2Ae^{at} < l.$$

La chaîne n'est pas tout entière sur OP; après s'être arrêtée, elle rebroussera chemin et continuera indéfiniment son mouvement sur OQ. La tension en O est à un instant quelconque

$$\varepsilon g x \sin\alpha - \varepsilon x \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon g x (l - x)(\sin\alpha + \sin\beta)}{l};$$

son maximum a lieu quand $x = \frac{l}{2}$, alors

$$T = \frac{1}{4} \varepsilon g l (\sin\alpha + \sin\beta).$$

Pour que la chaîne fût en équilibre, il faudrait avoir

$$x = \frac{l \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta},$$

et la tension en O serait

$$\varepsilon g x \sin\alpha = \frac{\varepsilon g l \sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta};$$

cette tension est moindre que la précédente.

Équations de Lagrange.

211. Supposons que la position des diverses parties d'un système puisse être déterminée par certaines quantités, $q_1, q_2, \ldots, q_n$; les coordonnées des points du système sont liées à ces variables par les relations

$$(1) \quad x = f(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad y = f_1(t, q_1, \ldots), \quad \ldots.$$

Lagrange a donné une formule pour transformer en fonction des inconnues q l'équation générale de la Dynamique, fournie par le principe de d'Alembert,

$$(2) \quad \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Une simple substitution, sans artifice, donne au second membre la forme

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n.$$

Pour transformer le premier, considérons la demi-force vive du système, où Σ s'étend à tous les points,

$$T = \sum \frac{1}{2} m(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Nous désignons par des lettres accentuées les dérivées par rapport au temps, et par ∂ la caractéristique des dérivées partielles. Le premier membre de l'équation (2) peut s'écrire

$$\sum \delta x \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'} = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots\right)\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'}.$$

Calculons le coefficient de ∂q_i, savoir :

$$\sum \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{d}{dt}\sum\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial T}{\partial x'} - \sum\frac{\partial T}{\partial x'}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{dA_i}{dt} - B_i.$$

Je différentie la première équation (1) par rapport au temps:

$$(3)\qquad x' = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_n} q'_n.$$

Comme f et ses dérivées partielles ne renferment pas les q'_i, cette égalité donne

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial x'}{\partial q'_i};$$

donc la somme que j'ai représentée par A_i devient

$$A_i = \sum \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q'_i},$$

puisque T ne contient les q' et les q que par l'intermédiaire de $x', y', z', \ldots$. On arrive à la valeur de B_i en différentiant l'équation (3) par rapport à q_i

$$\frac{\partial x'}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_i} q'_1 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_n \partial q_i} q'_n$$
$$= \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_i \partial q_1} q'_1 + \ldots = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i};$$

donc

$$B_i = \sum \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Connaissant les deux parties du coefficient de δq_i, on a immédiatement la transformée de l'équation (2) (les Σ se rapportant ici aux q);

$$\sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum Q_i \delta q_i.$$

Généralement les q_i sont variables indépendantes, et les coefficients de leurs variations doivent être égaux dans les deux membres; il en résulte les équations de Lagrange, qui donnent une solution uniforme des problèmes de Dyna-

mique. Quand il existe une fonction des forces ou que $X = \frac{\partial V}{\partial x}, \ldots$, on a $Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, et les équations de Lagrange deviennent

$$(4) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots.$$

On peut garder la même forme quand $X\partial x + Y\partial y + \ldots$ n'est plus une variation exacte; alors $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ est un symbole tel que $\frac{\partial V}{\partial q_i}\partial q_i$ soit le travail virtuel correspondant au déplacement ∂q_i, ce qui peut donner le moyen de le calculer directement.

Quand la fonction V existe, elle ne dépend point de t; si T en est aussi indépendant, on peut, des équations (4), tirer l'équation des forces vives; ajoutons ces équations multipliées respectivement par $dq_1, dq_2, \ldots$,

$$\sum q'_i d\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \sum dq_i \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i = dV$$

ou

$$(5) \qquad d\sum q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} - \sum\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} dq'_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i\right) = dV.$$

Comme T est fonction homogène du second degré des q', on a

$$\sum q'_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} = 2T,$$

et l'équation (5) devient

$$2dT - dT = dV, \quad T - V = \text{const.}$$

212. J'applique d'abord les équations de Lagrange à deux problèmes qui ont été traités autrement, et j'engage le lecteur à multiplier ces applications. Reprenons le

problème 155; je choisis des axes fixes : OX_1 suivant l'axe de rotation, OY_1 horizontal et perpendiculaire à OX_1, OZ_1 vertical. Les coordonnées du mobile M s'obtiennent aisément; en se reportant aux notations du n° 155, on trouve

$$x_1 = r\cos\varphi,$$
$$y_1 = r\sin\varphi\cos\omega t - a\sin\omega t,$$
$$z_1 = r\sin\varphi\sin\omega t + a\cos\omega t.$$

La masse de M étant 1, la demi-force vive est

$$T = \frac{1}{2}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) = \frac{1}{2}(r'^2 + r^2\omega^2\sin^2\varphi + a^2\omega^2 - 2ar'\omega\sin\varphi);$$

d'où, en revenant à la caractéristique d,

$$\frac{dT}{dr'} = r' - a\omega\sin\varphi, \quad \frac{dT}{dr} = r\omega^2\sin^2\varphi.$$

D'ailleurs, pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, la pesanteur donne seule un travail

$$\delta V = -g\,\delta z_1 = -g\,\delta r\sin\varphi\sin\omega t.$$

Les équations de Lagrange se réduisent à une seule

$$\frac{dr'}{dt} - r\omega^2\sin^2\varphi + g\sin\varphi\sin\omega t = 0;$$

c'est précisément l'équation différentielle qu'on a trouvée et intégrée. La méthode actuelle, très-avantageuse pour trouver le mouvement, ne fait pas connaître les réactions, qu'elle a justement pour effet d'éliminer.

Reprenons aussi le problème 170; la force vive a été calculée

$$2T = (m + m' + \mu)r'^2 + mr^2\sin^2\varphi\,\theta'^2,$$
$$\frac{dT}{dr'} = (m + m' + \mu)r', \quad \frac{dT}{dr} = mr\sin^2\varphi\,\theta'^2,$$
$$\frac{dT}{d\theta'} = mr^2\sin^2\varphi\,\theta', \quad \frac{dT}{d\theta} = 0.$$

En outre, $\delta V = g(m\cos\varphi - m')\delta r$; donc

$$\frac{dV}{dr} = g(m\cos\varphi - m'), \quad \frac{dV}{d\theta} = 0.$$

Les équations de Lagrange sont au nombre de deux :

$$(m + m' + \mu)\frac{dr'}{dt} - mr\theta'^2\sin^2\varphi = g(m\cos\varphi - m'), \quad \frac{d}{dt}r^2\theta' = 0;$$

la seconde donne l'équation des aires, et, en la combinant avec la première, on retrouve celle des forces vives.

213. *Un tube circulaire très-mince est assujetti à rester dans un plan vertical et à rouler sans glisser sur une horizontale de ce plan; une petite bille* M *peut se mouvoir sans frottement à l'intérieur du tube. Déterminer le mouvement du système en supposant nulles les vitesses initiales du tube et de la bille.*

Je prends pour axe des x l'horizontale fixe, pour axe des y la verticale qui passe par le point de contact initial de l'anneau avec OX. Soient, à l'époque t, C le centre du cercle, CI le rayon qui va au point de contact avec OX, A le point de la circonférence qui a été le point de contact primitif, a le rayon de l'anneau, θ l'angle ICA, φ l'angle ICM; je suppose CM et CA situés de part et d'autre de CI. L'abscisse de C est $a\theta$; les coordonnées de M sont

$$(1) \qquad x = a(\theta + \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi);$$

m étant la masse de la bille, sa force vive est

$$m(x'^2 + y'^2) = ma^2(\theta'^2 + \varphi'^2 + 2\theta'\varphi'\cos\varphi).$$

Le mouvement élémentaire de l'anneau est une rotation autour de I avec la vitesse θ'; μ désignant sa masse, le moment d'inertie par rapport à une perpendiculaire à son

plan, menée au point I, est $2\mu a^2$; donc, tout de suite,

$$T = \frac{1}{2} m a^2 (\theta'^2 + \varphi'^2 + 2\theta'\varphi' \cos\varphi) + \mu a^2 \theta'^2.$$

Nos variables q sont ici θ et φ, et les dérivées partielles

$$\frac{dT}{d\theta'} = m a^2 (\theta' + \varphi' \cos\varphi) + 2\mu a^2 \theta', \quad \frac{dT}{d\theta} = 0,$$

$$\frac{dT}{d\varphi'} = m a^2 (\varphi' + \theta' \cos\varphi), \quad \frac{dT}{d\varphi} = -m a^2 \theta' \varphi' \sin\varphi.$$

Comme le tube ne glisse pas sur OX, le frottement qui se développe en I ne produit pas de travail virtuel pour un déplacement compatible avec les liaisons, et δV se réduit ici à $-mg\,\delta y = -mga \sin\varphi\,\delta\varphi$. Les équations de Lagrange deviennent

$$\frac{d}{dt}[m(\theta' + \varphi' \cos\varphi) + 2\mu\theta'] = 0, \quad a\left(\frac{d\varphi'}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta'}{dt}\right) + g \sin\varphi = 0.$$

On en déduit l'intégrale des forces vives; α étant la valeur initiale de φ,

$$(2) \quad ma(\theta'^2 + \varphi'^2 + 2\theta'\varphi' \cos\varphi) + 2\mu a \theta'^2 - 2mg(\cos\varphi - \cos\alpha) = 0.$$

Quant à la première du groupe, elle s'intègre toujours une fois; mais, s'il n'y a pas de vitesses initiales, l'intégrale se simplifie :

$$(3) \qquad m(\theta' + \varphi' \cos\varphi) + 2\mu\theta' = 0.$$

On peut alors intégrer une seconde fois;

$$(4) \qquad m(\theta + \sin\varphi) + 2\mu\theta = m \sin\alpha.$$

Si l'on élimine θ' entre les équations (2) et (3), on trouve

$$(5) \quad \theta' = -\frac{m\varphi' \cos\varphi}{m + 2\mu}, \quad \varphi' = \pm\sqrt{\frac{2g}{a} \frac{(m + 2\mu)(\cos\varphi - \cos\alpha)}{m \sin^2\varphi + 2\mu}}.$$

Il est évident que φ diminue d'abord, il décroîtra jusqu'à $-\alpha$; pendant ce temps, θ ira de zéro à $\theta_1 = \frac{2m\sin\alpha}{m+2\mu}$, valeur tirée de l'équation (4) pour $\varphi = -\alpha$; x décroît de $a\sin\alpha$ à $a\frac{m-2\mu}{m+2\mu}\sin\alpha$; y va de $a(1-\cos\alpha)$ à zéro, puis revient à sa valeur primitive. Dans un intervalle de temps égal au premier, φ, θ, x, y varient dans un sens opposé, et l'on a une suite d'oscillations. La trajectoire de M s'obtient en éliminant φ et θ entre les équations (1) et (4)

$$\left(\frac{2\mu+m}{2\mu}\right)^2\left(x-\frac{ma\sin\alpha}{m+2\mu}\right)^2+(y-a)^2=a^2;$$

c'est une ellipse tangente à OX et dont le grand axe est vertical; mais il n'y a de parcouru que l'arc au-dessous de la droite $y = a(1-\cos\alpha)$.

Le temps d'une demi-oscillation s'obtient en intégrant la seconde équation (5); on est conduit à une intégrale transcendante; mais, si l'on suppose que α et φ soient assez petits pour négliger leurs carrés et que m ne soit pas beaucoup plus grand que 2μ, on trouve

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{g(m+2\mu)(\alpha^2-\varphi^2)}{2\mu a}},$$

$$t_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dt}{d\varphi}d\varphi = \pi\sqrt{\frac{g}{a}\,\frac{m+2\mu}{2\mu}}.$$

214. *Un fil sans masse, fixé à l'une de ses extrémités* O, *porte deux petits poids* A, B, *attachés à des distances différentes du point* O; *déterminer les oscillations du système, quand on l'écarte de sa position d'équilibre, de manière que les deux portions du fil restent tendues et ne sortent pas d'un plan vertical donné.*

(Agrégation, 1844.)

Soient a et b les longueurs OA, AB; φ et ψ les angles qu'elles font respectivement avec la verticale; m, n les masses de A et B; on a

$$2T = ma^2\varphi'^2 + n[a^2\varphi'^2 + b^2\psi'^2 + 2ab\varphi'\psi'\cos(\psi - \varphi)].$$

La pesanteur est la seule force qui donne un travail virtuel

$$\delta V = -mga\sin\varphi\delta\varphi - ng(a\sin\varphi\delta\varphi + b\sin\psi\delta\psi).$$

Les équations de Lagrange deviennent, après de simples réductions,

$$(m+n)a\frac{d^2\varphi}{dt^2} + nb\frac{d^2\psi}{dt^2}\cos(\psi - \varphi)$$
$$- nb\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\sin(\psi - \varphi) + (m+n)g\sin\varphi = 0,$$
$$b\frac{d^2\psi}{dt^2} + a\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos(\psi - \varphi) - a\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin(\psi - \varphi) + g\sin\psi = 0.$$

On a l'intégrale des forces vives, mais on n'aperçoit pas d'autre intégrale première rigoureuse. Dans le cas des petites oscillations, en négligeant les termes du troisième ordre par rapport à φ, ψ, φ', ψ', φ'', ψ'', les équations deviennent

$$(1)\qquad \begin{cases} (m+n)a\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + nb\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + (m+n)g\varphi = 0, \\ b\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + a\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + g\psi = 0. \end{cases}$$

Cherchons à y satisfaire par des valeurs $\varphi = e^{rt}$, $\psi = \lambda e^{rt}$: on doit avoir $\lambda = \dfrac{-ar^2}{br^2+g}$, et

$$(2)\qquad (m+n)(ar^2+g)(br^2+g) - nabr^4 = 0.$$

L'équation en r^2 admet deux racines, l'une inférieure à $-\dfrac{g}{a^2}$ et à $-\dfrac{g}{b^2}$, l'autre supérieure à ces deux quantités,

mais encore négative. Si ces racines sont $-r_1^2$, $-r_2^2$, les intégrales du système (1) seront

$$\varphi = A\cos r_1 t + B\sin r_1 t + C\cos r_2 t + D\sin r_2 t,$$

$$\psi = \frac{ar_1^2}{g - br_1^2}(A\cos r_1 t + B\sin r_1 t) + \frac{ar_2^2}{g - br_2^2}(C\cos r_2 t + D\sin r_2 t).$$

Quand les vitesses initiales sont nulles, il en est de même de B et de D; et, si α et β sont les valeurs primitives de φ et ψ, on a, pour déterminer A et C,

$$A + C = \alpha, \quad \frac{Aar_1^2}{g - br_1^2} + \frac{Car_2^2}{g - br_2^2} = \beta.$$

Pour que les deux portions de fil oscillent comme des fils de pendules simples, il faut que A ou C s'annule; soit C. Les conditions précédentes donnent alors

$$r_1^2 = \frac{\beta g}{a\alpha + b\beta};$$

substituant $-r_1^2$ à r^2 dans l'équation (2),

$$(m+n)a\alpha^2 + (m+n)(b-a)\alpha\beta - mb\beta^2 = 0.$$

On a toujours pour $\frac{\alpha}{\beta}$ deux valeurs réelles de signes contraires; la positive est < 1; pour toutes deux,

$$\varphi = \alpha\cos r_1 t, \quad \psi = \beta\cos r_1 t$$

Les oscillations des deux fils se correspondent, mais leur amplitude est différente; leur durée

$$\frac{2\pi}{r_1} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\left(b + a\frac{\alpha}{\beta}\right)}$$

est comprise entre les durées d'oscillation des pendules simples de longueur b et $a+b$.

J'indique seulement un problème tout à fait analogue au précédent :

Un tube circulaire, mince et homogène, peut se mouvoir dans un plan vertical autour d'un point de sa circonférence; il renferme une petite bille qui peut se mouvoir sans frottement à l'intérieur; déterminer les oscillations du système quand on l'a écarté de sa position d'équilibre.

Soient μ et m les masses du tube et de la bille, O le point fixe, C le centre du cercle, R son rayon; on peut déterminer la position du système par l'angle θ de CO avec la verticale et l'angle φ de CM avec OC prolongé. On trouve aisément

$$2T = 2\mu R^2\theta'^2 + m\left[4\cos^2\frac{1}{2}\varphi\theta'^2 + \varphi'^2 + 4\theta'\varphi'\cos^2\frac{1}{2}\varphi\right]R^2,$$

$$\delta V = -\mu g R\sin\theta\,\delta\theta - mgR[\sin\theta\,\delta\theta + \sin(\theta+\varphi)(\delta\theta+\delta\varphi)],$$

et l'on en déduit deux équations analogues à celles du pendule double.

215. *Une sphère est animée d'une très-grande vitesse de rotation autour d'un de ses diamètres, qui peut tourner dans un plan horizontal autour de son milieu; déterminer le mouvement que prendra l'axe sous l'influence de la rotation de la Terre.*

La force centrifuge composée ne produit pas de travail effectif, mais elle peut donner un travail virtuel, parce qu'elle n'est pas normale aux déplacements virtuels des points où l'on doit l'appliquer. Pour évaluer ce travail plus aisément, composons toutes les forces centrifuges composées appliquées aux points d'un solide de révolution qui tourne avec une vitesse relative ω autour de son axe. Je

prends le centre de gravité pour origine, l'axe pour axe des z, deux droites perpendiculaires pour axes des x et des y; soient p, q, r les composantes de la rotation d'entraînement; celles de la vitesse relative d'un point sont $-\omega y$, ωx, o. La résultante de translation des forces centrifuges composées a pour projections (*voir* n° 113)

$$X = \int 2r\omega x\,dm = 0,$$
$$Y = \int 2r\omega y\,dm = 0,$$
$$Z = \int 2\omega(-qy - px)\,dm = 0.$$

Les projections de l'axe du couple résultant sont

$$L = -2\omega\int dm[y(qy + px) + zry] = -2q\omega\int y^2 dm,$$
$$M = 2\omega\int dm[zrx + x(qy + px)] = 2p\omega\int x^2 dm,$$
$$N = 0;$$

$2\int x^2 dm$ et $2\int y^2 dm$ sont égaux chacun au moment d'inertie μ par rapport à un des rayons de l'équateur. Le couple a son plan parallèle à l'axe de la rotation relative ω et à celui de la rotation d'entraînement. On peut le former avec une force $\mu\omega$, agissant suivant OZ, et une force égale, parallèle, mais de sens contraire, appliquée au point de coordonnées p, q, r, c'est-à-dire à l'extrémité de l'axe de la rotation d'entraînement.

Cela posé, prenons pour axe des x la tangente au méridien terrestre dirigée vers le nord, pour axe des y la tangente au parallèle dirigée vers l'est, pour axe des z la verticale montante; soient OA le rayon de la sphère qui reste horizontal, ψ l'angle XOA, φ l'angle dont la sphère a tourné autour de OA à l'époque t. Le mouvement apparent du solide résulte des rotations ψ' autour de OZ et φ' autour de OA; $T = \frac{1}{2}\mu(\varphi'^2 + \psi'^2)$. L'axe instantané ne coïncide pas avec OA, mais on peut négliger leur écart si φ' est très-

grand. Soient n la vitesse de la rotation diurne, λ la latitude; le couple résultant des forces centrifuges composées peut être formé approximativement par une force $\varphi'\mu$ suivant OA, et une force F, égale et de sens contraire, agissant au point M de coordonnées $-n\cos\lambda$, o, $-n\sin\lambda$; à une rotation $\delta\varphi$ correspond un travail nul, car F est normale au déplacement de M; la rotation $\delta\psi$ fait décrire à M un arc $n\cos\lambda\,\delta\psi$ parallèle à OY, mais de sens contraire, et l'on a un travail virtuel $\mu\varphi' n\cos\lambda\sin\psi\,\delta\psi$. Les équations de Lagrange sont

$$\frac{d\varphi'}{dt}=0,\quad \frac{d\psi'}{dt}-n\varphi'\cos\lambda\sin\psi=0.$$

La vitesse de rotation φ' autour de OA est constante; quant à ψ, il varie suivant la loi d'un pendule simple de longueur $\frac{g}{n\varphi'\cos\lambda}$; OA tendra à se rapprocher de la partie sud de la méridienne, et ses petites oscillations auront lieu dans le temps $\frac{2\pi}{\sqrt{n\varphi'\cos\lambda}}$. A Paris, pour une vitesse de 40 tours à la seconde, le temps d'une oscillation complète est d'environ 56 secondes, ce qui a été vérifié par Léon Foucault.

Équations d'Hamilton et de Jacobi.

216. Les équations de Lagrange conduisent à un autre système d'équations de forme remarquable, dans le cas commun à beaucoup de problèmes de Dynamique, où il existe une fonction des forces, V, et où les liaisons sont indépendantes du temps. Conservons les notations du n° 206 et posons, en outre,

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1}=p_1,\quad \frac{\partial T}{\partial q'_2}=p_2,\quad \ldots,\quad \frac{\partial T}{\partial q'_n}=p_n;$$

si l'on tire de ces équations les valeurs des q' et qu'on les substitue dans T, la demi-force vive sera exprimée par une fonction connue des q et des p. Quand nous prendrons ces quantités pour variables indépendantes, nous désignerons les dérivées partielles par la caractéristique d, réservant la notation ∂ pour le cas où les variables indépendantes sont les q_i et les q'_i. La différentielle totale de T peut s'exprimer de deux manières :

$$(1)\quad \begin{cases} dT = \sum \frac{dT}{dq_i} dq_i + \sum \frac{dT}{dp_i} dp_i, \\ dT = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} dq'_i = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum p_i dq'_i. \end{cases}$$

D'autre part, les liaisons étant indépendantes du temps, les dérivées des coordonnées des points du système par rapport au temps s'expriment par des fonctions linéaires homogènes des q'; T est donc une fonction homogène du deuxième degré de ces mêmes q', et le théorème relatif à de pareilles fonctions nous donne

$$2T = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i = \sum p_i q'_i.$$

Prenons les différentielles totales

$$2dT = \Sigma p_i dq'_i + \Sigma q'_i dp_i.$$

J'ajoute membre à membre les équations (1) et j'en retranche la précédente; il reste

$$\sum \left(\frac{dT}{dq_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) dq_i + \sum \left(\frac{dT}{dp_i} - q'_i \right) dp_i = 0.$$

Les différentielles étant indépendantes, le coefficient de

chacune doit être nul :

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{dT}{dq_i},$$

$$(2) \qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{dT}{dp_i}.$$

Revenons aux équations de Lagrange : la fonction V étant indépendante des q' et des p, on a

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{dV}{dq_i}, \quad \frac{dV}{dp_i} = 0;$$

une quelconque des équations de Lagrange devient

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{dT}{dq_i} = \frac{dV}{dq_i}.$$

On considère la fonction V — T, et l'on pose, avec Hamilton,

$$(3) \qquad V - T = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = H.$$

Les équations de Lagrange, modifiées comme on vient de le faire, et les équations (2) nous donnent les équations du mouvement sous la forme canonique

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{dH}{dq_1}, & \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{dH}{dq_2}, & \ldots, & \dfrac{dp_n}{dt} = \dfrac{dH}{dq_n}, \\ \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{dH}{dp_1}, & \dfrac{dq_2}{dt} = -\dfrac{dH}{dp_2}, & \ldots, & \dfrac{dq_n}{dt} = -\dfrac{dH}{dp_n}. \end{cases}$$

Les systèmes d'équations simultanées de cette forme, où l'on pourrait supposer que H contient explicitement la variable t, ont donné lieu à d'importantes découvertes, faites notamment par Poisson, Cauchy, Hamilton, Jacobi, MM. Bertrand et Liouville; je me borne à exposer le théorème le plus célèbre, dû à Jacobi, en me restreignant au cas de nos problèmes où H ne contient pas t explicitement

et garde une valeur constante, $-\lambda$. Jacobi prend l'équation aux dérivées partielles

$$(5)\qquad \psi\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots, \frac{dS}{dq_n}\right) + \lambda = 0,$$

où ψ désigne la fonction (3), dans laquelle on a changé les p dans les dérivées partielles de la fonction inconnue S : *Si l'on peut trouver une intégrale de cette équation avec $n-1$ arbitraires autres que celle qu'on peut introduire par simple addition, soit*

$$S = F(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda),$$

on aura immédiatement les intégrales générales du système (4), *qui seront*

$$(6)\qquad \frac{dF}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \ldots, \quad \frac{dF}{d\alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}, \quad \frac{dF}{d\lambda} = t + \varepsilon,$$

$$(7)\qquad \frac{dF}{dq_1} = p_1, \quad \frac{dF}{dq_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{dF}{dq_n} = p_n,$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \varepsilon$ *étant n nouvelles arbitraires.*

Ces équations renferment le nombre voulu, $2n$, d'arbitraires, et nous allons voir qu'elles conduisent au système (4). Différentions la première du groupe (6) par rapport à t, puis intervertissons l'ordre des dérivations; enfin, tenons compte des équations (7) : on a successivement

$$0 = \sum \frac{d^2F}{d\alpha_1 dq_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum \frac{d^2F}{dq_i d\alpha_1}\frac{dq_i}{dt} = \sum \frac{dp_i}{d\alpha_1}\frac{dq_i}{dt};$$

on obtient ainsi un groupe de n équations

$$(8)\quad \sum \frac{dp_i}{d\alpha_1}\frac{dq_i}{dt} = 0, \ldots, \quad \sum \frac{dp_i}{d\alpha_{n-1}}\frac{dq_i}{dt} = 0, \quad \sum \frac{dp_i}{d\lambda}\frac{dq_i}{dt} = 1.$$

D'autre part, puisque $S = F$ est une solution de (5), on a

l'identité

$$(9) \qquad \psi\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{dF}{dq_1}, \frac{dF}{dq_2}, \ldots,\right) + \lambda = 0.$$

Différentions par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda$, et remplaçons $\frac{dF}{dq_1}$ par p_1, et ainsi de suite on a n équations

$$\sum \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{d\alpha_1} = 0, \ldots, \quad \sum \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{d\alpha_{n-1}} = 0, \quad \sum \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{d\lambda} = -1.$$

Ce groupe ne diffère du groupe (8) que par le changement des $\frac{d\psi}{dp_i}$ en $-\frac{dq_i}{dt}$; comme tous deux sont linéaires, par rapport à ces quantités, celles-ci doivent être respectivement égales, ce qui donne les n premières équations (4).

Différentions la première équation (7) par rapport à t, et transformons comme nous l'avons fait pour les équations (6), on a

$$\frac{dp_1}{dt} = \sum \frac{d^2F}{dq_1 dq_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum \frac{d^2F}{dq_i dq_1}\frac{dq_i}{dt} = \sum \frac{dp_i}{dq_1}\frac{dq_i}{dt}.$$

On peut remplacer $\frac{dq_i}{dt}$ par $-\frac{d\psi}{dp_i}$, d'après ce que l'on a déjà vérifié ; il vient alors

$$\frac{dp_1}{dt} + \sum \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp}{dq_1} = 0.$$

Mais différentions l'identité (9) par rapport à q_1, et remplaçons les $\frac{dF}{dq_i}$ par les p_i,

$$\frac{d\psi}{dq_1} + \sum \frac{d\psi}{dp_i}\frac{dp_i}{dq_1} = 0.$$

La comparaison de ce résultat avec l'égalité précédente

justifie la première équation de la seconde moitié du système (4), et par suite les autres analogues.

Quant à l'intégrale F, on n'a pas de méthode générale pour l'obtenir; mais, en choisissant convenablement les inconnues du problème, on peut séparer l'équation (5) en plusieurs autres à une seule variable indépendante, et trouver une intégrale avec $n-1$ constantes, comme on le verra aux applications qui suivent.

217. Je commence par un problème tout à fait simple, mais pour lequel on pourra former sans aucun embarras toutes les équations précédentes, et y lire des résultats bien connus. Il s'agit de déterminer dans un plan vertical le mouvement d'un point pesant de masse m. Je prends pour q_1 et q_2 les coordonnées rectangulaires de m, l'axe des q_2 étant dirigé dans le sens de la pesanteur. On a

$$T = \frac{1}{2} m (q_1'^2 + q_2'^2).$$

d'où l'on déduit

$$p_1 = mq_1', \quad p_2 = mq_2', \quad T = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2).$$

D'ailleurs $V = mgq_2$, donc

$$H = mgq_2 - \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2).$$

Les équations canoniques sont

$$\frac{dp_1}{dt} = 0, \quad \frac{dp_2}{dt} = mg, \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{p_1}{m}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{p_2}{m}.$$

Rien de plus facile que de trouver et de reconnaître les intégrales de ce système; mais voyons celles que fournit le

théorème de Jacobi. L'équation en S est

$$mgq_2 - \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dq_2}\right)^2\right] + \lambda = 0,$$

$$\left(\frac{dS}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dq_2}\right)^2 = 2m^2gq_2 + 2m\lambda.$$

Cherchons à y satisfaire en prenant $S = f(q_1) + \varphi(q_2)$; il suffit que l'on ait, en désignant par α une constante arbitraire,

$$\varphi'^2(q_2) = 2m^2g(q_2 + \alpha), \quad f'^2(q_1) = 2m(\lambda - mg\alpha).$$

On a par de simples quadratures $f(q_1)$ et $\varphi(q_2)$, et leur somme

$$S = F = \frac{2}{3}m\sqrt{2g}\,(q_2 + \alpha)^{\frac{3}{2}} + q_1\sqrt{2m(\lambda - mg\alpha)}.$$

Les intégrales (6) et (7) deviennnent

$$m\sqrt{2g(q_2 + \alpha)} - \frac{mgq_1}{\sqrt{2m(\lambda - mg\alpha)}} = \beta, \quad \frac{q_1\sqrt{m}}{\sqrt{2(\lambda - mg\alpha)}} = t + \varepsilon,$$

$$\sqrt{2m(\lambda - mg\alpha)} = p_1, \quad m\sqrt{2g(q_2 + \alpha)} = p_2.$$

La première donne la trajectoire parabolique, la seconde la loi du mouvement et les deux autres les dérivées p_1 et p_2; on peut vérifier que

$$H = mgq_2 - \frac{1}{2m}[2m(\lambda - mg\alpha) + 2gm^2(q_2 + \alpha)] = -\lambda.$$

Les constantes λ, α, β, ε se déduisent des circonstances initiales.

218. *Étudier dans un plan le mouvement d'un point* M *attiré vers deux centres fixes* F *et* F_1, *avec des intensités réciproques au carré des distances.*

Supposons la masse de M égale à l'unité et $FF_1 = 2c$; on peut définir la position de M en se donnant ses coordonnées x, y par rapport à la droite FF_1 et à la perpendiculaire en son milieu, ou les demi-axes focaux q, q_1 de l'ellipse et de l'hyperbole qui passent en M et ont pour foyers F et F_1; ces deux systèmes de coordonnées sont liés par les relations

$$\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{q^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{q_1^2} - \frac{y^2}{c^2 - q_1^2} = 1;$$

on en conclut immédiatement

$$x^2 = \frac{q^2 q_1^2}{c^2}, \quad y^2 = \frac{(q^2 - c^2)(c^2 - q_1^2)}{c^2},$$

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \frac{1}{2}\frac{q^2 - q_1^2}{q^2 - c^2} q'^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2 - q_1^2}{c^2 - q_1^2} q_1'^2.$$

Les dérivées partielles sont

$$p = \frac{q^2 - q_1^2}{q^2 - c^2} q', \quad p_1 = \frac{q^2 - q_1^2}{c^2 - q_1^2} q'_1.$$

On pourra exprimer T en fonction de p et de p_1; d'autre part, avec des notations dont le sens est bien clair, on a

$$V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu_1}{r_1};$$

mais les propriétés focales de l'ellipse et de l'hyperbole donnent

$$r + r_1 = 2q, \quad r_1 - r = \pm 2q_1, \quad r = q \mp q_1, \quad r_1 = q \pm q_1.$$

La fonction H d'Hamilton devient

$$H = \frac{\mu}{q \mp q_1} + \frac{\mu_1}{q \pm q_1} - \frac{1}{2}\frac{q^2 - c^2}{q^2 - q_1^2} p^2 - \frac{1}{2}\frac{c^2 - q_1^2}{q^2 - q_1^2} p_1^2.$$

Les équations canoniques forment un système compliqué; sans les écrire, nous chercherons leurs intégrales par le théorème de Jacobi. L'équation aux dérivées partielles est ici, après de légères transformations,

$$(q^2-c^2)\left(\frac{dS}{dq}\right)^2+(c^2-q_1^2)\left(\frac{dS}{dq_1}\right)^2$$
$$=2(q^2-q_1^2)\left[\frac{\mu}{q\mp q_1}+\frac{\mu_1}{q\pm q_1}+\lambda\right].$$

Posons, comme précédemment, $S=f(q)+\varphi(q_1)$, et écrivons, en nous bornant aux signes supérieurs,

$$(q^2-c^2)f'^2(q)=2(\mu+\mu_1)q+2\lambda q^2+\alpha,$$
$$(c^2-q_1^2)\varphi'^2(q_1)=2(\mu-\mu_1)q_1-2\lambda q_1^2-\alpha;$$

l'intégrale F, renfermant une arbitraire α, est ici

$$F=\int dq\sqrt{\frac{2\lambda q^2+2(\mu+\mu_1)q+\alpha}{q^2-c^2}}$$
$$+\int dq_1\sqrt{\frac{2(\mu-\mu_1)q_1-2\lambda q_1^2-\alpha}{c^2-q_1^2}}.$$

La loi du mouvement est donnée par la formule

$$\frac{dF}{d\lambda}=t+\varepsilon;$$

l'équation de la trajectoire est $\frac{dF}{d\alpha}=\beta$; elle renferme deux intégrales elliptiques : aussi sera-t-il aussi commode de la remplacer par sa différentielle

$$\frac{dq}{\sqrt{(q^2-c^2)[2\lambda q^2+2(\mu+\mu_1)q+\alpha]}}$$
$$=\frac{dq_1}{\sqrt{(c^2-q_1^2)[2(\mu-\mu_1)q_1-2\lambda q_1^2-\alpha]}}.$$

Si l'on connaît les circonstances initiales, on aura la valeur initiale de H égale à $-\lambda$; puis le rapport de q'_0 à $q'_{1,0}$ donnera, à l'aide de l'équation précédente, la valeur de α. Pour que la trajectoire ait des branches infinies, il faut que q puisse devenir infini; pour qu'elle coupe l'axe FF_1, il faut que q ou q_1 devienne égal à c^2; enfin elle se réduira à une ellipse ou une hyperbole si l'un ou l'autre des deux radicaux n'est réel que pour une seule valeur de q ou de q_1.

FIN.

ERRATA.

Page 14,	ligne	3,	*au lieu de*	$c^2 + z^2$,	*lisez*	$a^2 + z^2$.
» 14,	»	8,	»	$> a$,	»	$> a^2$.
» 15,	»	8,	»	plan des x,	»	plan des xz.
» 23,	»	22,	»	b^2,	»	a^2.
» 40,	»	22,	»	rayon,	»	diamètre.
» 81,	»	15,	»	axe des x,	»	origine.
» 87,	»	11,	»	$d.\frac{dx}{dx}$,	»	$d.\frac{dx}{ds}$.
» 109,	»	15,	»	I, I′,	»	P, P′.
» 125,	»	13_r	»	$\frac{dr}{d\theta}$,	»	$\frac{dr}{dt}$.
» 247,	»	3,	»	z,	»	r.
» 313,	»	15,	»	faisons,	»	faisant.
» 315,	»	11,	»	$3\gamma\omega_r$,	»	$3\omega\gamma_r$.
» 344,	»	7,	»	n^2,	»	u^2.
» 351,	»	9,	»	que,	»	de.
» 374,	»	5,	»	est,	»	a pour carré.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE V

STATIQUE.

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL 1

Cas où le point est libre. — Cas où le point doit rester sur une surface ou sur une courbe. — Cas où il y a des frottements.

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES 25

CENTRES DE GRAVITÉ 36

Centre de gravité des lignes. — Centre de gravité des surfaces. — Centre de gravité des solides.

ÉQUILIBRE DES CORPS SOLIDES 57

Composition d'un nombre quelconque de forces. — Équilibre d'un seul solide. — Équilibre de plusieurs corps. — Équilibre en tenant compte du frottement.

ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE 87

ATTRACTION DES SYSTÈMES 106

Calcul direct de l'attraction. — Calcul à l'aide du potentiel.

CINÉMATIQUE.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL 123

Vitesse et accélération. — Accélération centrale. — Accélérations des divers ordres. — Composition des vitesses.

MOUVEMENT D'UNE FIGURE DANS UN PLAN 156

Du centre instantané de rotation. — Des roulettes. — Accélération dans le mouvement épicycloïdal.

Pages.

MOUVEMENT GÉNÉRAL D'UN SOLIDE..... 180

Cas où il y a un point fixe. — Mouvement dans l'espace.

DYNAMIQUE.

MOUVEMENT D'UN POINT LIBRE..... 190

Mouvement rectiligne. — Mouvement curviligne. — Forces centrales.

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE COURBE FIXE..... 232

Cas où la courbe est donnée et parfaitement polie. — Cas où il y a des résistances de milieu ou des frottements. — Détermination de la courbe par les propriétés données du mouvement.

MOUVEMENT SUR UNE SURFACE FIXE..... 269

MOUVEMENT RELATIF..... 295

Accélération dans un mouvement composé. — Question dynamique.

APPLICATION DES PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE AU MOUVEMENT DES SYSTÈMES..... 316

Principe des forces vives. — Mouvement du centre de gravité. — Principe des aires. — Forces instantanées.

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE..... 365

Moments d'inertie. — Mouvement autour d'un axe fixe. — Mouvement autour d'un point fixe. — Mouvement quelconque d'un solide.

EQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE..... 418

Principe des vitesses virtuelles. — Principe de d'Alembert. — Équations de Lagrange. — Équations d'Hamilton. — Méthode d'intégration de Jacobi.

Errata..... 454

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

2357 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

DÉTERMINANTS.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR,

QUI SE TROUVENT A LA MÊME LIBRAIRIE.

Règles mnémoniques pour établir la Théorie des signes en Trigonométrie, et pour écrire les Formules de Delambre. In-8; 1866. 1 fr.

Méthode expéditive pour l'Extraction de la Racine cubique des nombres entiers. In-8; 1866..... 1 fr.

Propriétés nouvelles des Quadrilatères en général, avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles, etc. In-8; 1868..... 2 fr. 25 c.

Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation des coordonnées dans le plan et dans l'espace, avec application aux lignes et surfaces des deux premiers degrés. In-8..... 1 fr. 50 c.

Nouvelle étude algébrique des lignes du second degré. 1re *Partie :* Ellipse et Hyperbole. In-8; 1866..... 1 fr. 50 c.

2e *Partie :* Parabole. In-8; 1868..... 1 fr. 50 c.

2981 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

ÉLÉMENTS

DE LA THÉORIE DES

DÉTERMINANTS

AVEC APPLICATION

A L'ALGÈBRE, LA TRIGONOMÉTRIE

ET

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE,

A L'USAGE

DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR G. DOSTOR,

Docteur ès Sciences, Professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences
de l'Université catholique de Paris,
Membre de la Société mathématique de France.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1877

(Tous droits réservés.)

PRÉFACE.

La *Science des Déterminants* est l'un des instruments les plus puissants que l'Analyse mette à la disposition des Géomètres; le mécanisme en est fort simple, les méthodes sont presque élémentaires, les résultats sont d'une fécondité remarquable. Née de la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues, elle en abrége les procédés, en généralise les formules et donne à celles-ci une expression figurée, à la fois simple et précise, serrée et commode, qui rend la combinaison de ces formules sûre et rapide.

L'*Algèbre*, qui a donné naissance aux Déterminants, tire ainsi le premier fruit de son œuvre, au seuil même d'opérations souvent fort laborieuses; mais cet avantage n'est pas le seul tribut que l'Algèbre lève sur cette science nouvelle, éclose dans son domaine : elle y trouve des ressources bien autrement précieuses pour l'élimination d'un ordre supérieur et pour la détermination des solutions communes aux équations de degrés élevés. Ces parties, si épineuses dans la pratique, ont été simplifiées avec art et précision, et des calculs presque inextricables sont devenus d'une facilité merveilleuse et même originale.

En *Géométrie analytique*, pour évaluer les angles, les lignes, les surfaces et les volumes en fonction de certaines données, on établit les relations qu'on sait exister ou qu'on découvre entre ces données, entre la quantité cherchée et entre d'autres éléments *auxiliaires* de la figure, convenablement choisis. Les relations ainsi établies constituent les équations de la question, et les éléments qui y entrent, indépendamment des données, forment autant d'inconnues *auxiliaires*, qu'il s'agit

d'éliminer. Cette élimination, par les procédés ordinaires, est souvent longue et compliquée; elle se hérisse quelquefois de difficultés presque insurmontables. De plus, la suite des opérations introduit dans les équations résultantes, pour beaucoup de cas, des facteurs étrangers qui en embarrassent le maniement et masquent les liens apparents qui existent forcément entre les données et la solution.

Ce double inconvénient disparaît par l'emploi des Déterminants. Non-seulement les opérations deviennent simples et aisées, non-seulement les multiplicateurs étrangers sont écartés; mais les facteurs *utiles* apparaissent presque spontanément et sont immédiatement mis en évidence; mais encore l'expression de la solution forme tableau, pour ainsi dire, et présente une symétrie remarquable dans la disposition de ses éléments connus.

Les caractères qui distinguent entre elles les lignes et les surfaces d'un même degré, ceux qui embrassent les figures d'une même famille, ainsi que les conditions auxquelles ces figures peuvent être assujetties, se traduisent, dans l'Analyse, par certaines relations entre les coefficients de leur équation générale. C'est encore la Science des Déterminants qui conduit à la détermination la plus rapide, qui fournit la représentation la plus succincte et la mieux figurée de ces relations de condition.

Les Déterminants donnent aussi le moyen de trouver les fonctions qui ne sont pas altérées par une transformation linéaire des variables; la découverte et l'étude de ces fonctions sont peut-être le principal objet de cette science, dont le champ ne cesse de s'étendre et de se féconder. En Géométrie, cette transformation correspond à un changement d'axes de coordonnées; les fonctions obtenues expriment donc des propriétés absolument indépendantes du choix des axes. On comprend dès lors toute l'importance que doit prendre cette branche de l'Analyse dans les investigations géométriques.

L'importance des Déterminants se manifeste par des progrès incessants; elle est partout reconnue et proclamée, dans les

Journaux scientifiques comme dans les Mémoires et les Cours publics. Chaque année voit apparaître de nouvelles publications sur cette féconde théorie et sur ses nombreuses applications. Plusieurs auteurs s'efforcent, en même temps, de donner à cette science une forme plus simple, une rédaction plus élémentaire, une direction plus pratique, afin de la mettre à la portée des jeunes esprits.

Dans beaucoup de pays, en Angleterre, en Italie et en Allemagne, la théorie des Déterminants est prescrite dans l'enseignement et introduite dans les écoles. En France, elle a pénétré dans les lycées de Paris; elle se trouve enseignée dans beaucoup d'établissements de province; elle est admise avec faveur et reçue avec avantage dans les examens d'admission à l'École Polytechnique et à l'École Normale; elle appartient de droit au Cours de Mathématiques spéciales.

Les professeurs, pour se maintenir à la hauteur de leur mission, sont forcés de consulter les Mémoires et les Traités spéciaux; ils sont contraints de puiser dans des publications éparses; ils sont obligés de faire des extraits séparés, d'établir un lien uniforme entre ces extraits, de les revêtir d'une forme simple et élémentaire, afin de les faire cadrer avec les matières de leur enseignement. Cette tâche, toujours laborieuse, souvent difficile par l'absence, l'éloignement ou la variété des sources originales, absorbe leurs loisirs ou dérobe à leurs fonctions une partie du temps qu'ils doivent aux soins immédiats des élèves.

Les élèves eux-mêmes, restreints aux notes fugitives de la classe, sont embarrassés dans l'étude de leurs leçons par les parties qui leur ont échappé ou qu'ils ont mal saisies; ces points d'arrêt ébranlent leur confiance, en provoquant des efforts en pure perte.

Un Livre, pouvant servir de guide et d'aide-mémoire, aura donc un côté à la fois utile pour les élèves et avantageux pour les maîtres, surtout s'il renvoie, en même temps, aux sources premières, aux documents complets, où la Science est traitée avec tous ses développements.

C'est afin d'abréger le travail des Professeurs, de faciliter

l'étude aux Élèves que nous avons entrepris la rédaction de cet Ouvrage. Nous y avons suivi les procédés les plus élémentaires, adopté les notations les plus simples, exposé les principes les plus essentiels, qui suffisent en Algèbre et en Géométrie, dans l'étendue du programme officiel. Si nous avons modifié plusieurs démonstrations usitées, c'est pour les simplifier, les abréger, les rendre accessibles aux jeunes commençants. C'est surtout pour eux que nous avons entrepris ce travail; c'est aussi à eux que nous l'adressons particulièrement.

La première idée des Déterminants est due à Leibnitz. (*Lettre de Leibnitz à L'Hospital*, du 28 avril 1639, et *Œuvres mathématiques de Leibnitz*, publiées par Gerhardt, t. II, p. 239). Mais l'importance de ces fonctions a été signalée surtout par Cramer, dans son *Introduction à l'Analyse des courbes algébriques*, 1750; Cramer peut être regardé comme le second inventeur des déterminants. Ce Géomètre a trouvé la loi de formation des Déterminants au moyen des formules que fournit la résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues, et de celles que donne la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues. Bezout a étendu cette loi à un nombre quelconque d'équations linéaires, renfermant autant d'inconnues, en même temps qu'il a donné une méthode rapide pour la résolution de ces équations (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1764).

Dans les travaux de Laplace et de Vandermonde (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 1772, 2e partie), dans ceux de Lagrange (*Sur les Pyramides*, 1773, et *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin*, 1773), la loi de Cramer se trouve confirmée et plusieurs propriétés des Déterminants sont énoncées et mises au jour.

L'illustre Gauss, dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*, 1802, a perfectionné et étendu le calcul algébrique, au moyen des Déterminants. Plus tard, Binet (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIe cahier, 1813) et Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier, 1815) ont énoncé de nouvelles propriétés et ont donné, dans les applications, au moyen des

Déterminants, une facilité inattendue à des calculs fort compliqués.

Ce n'est cependant qu'en 1841 que JACOBI, dans son Mémoire *De formatione et proprietatibus determinantium*, posa les bases d'un Traité concernant la Théorie des Déterminants, et rendit cette science accessible à tous les mathématiciens.

Depuis cette époque, la Science des Déterminants a été l'objet de recherches incessantes de la part des géomètres, les progrès ont été rapides. Elle s'est signalée surtout par ses applications curieuses et variées à la Théorie des nombres, à celle des Équations, à l'Analyse en général, à la Géométrie et à la Mécanique.

Ces applications sont consignées, d'abord en partie dans les écrits de Jacobi (*Mathematische Werke*) et de Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*); ensuite dans les Mémoires publiés par MM. CAYLEY (*Memoirs upon quantics*), SYLVESTER (*Philosophical Magazine*), HESSE, BORCHARDT, MALMSTEIN, JOACHIMSTHAL (*Journal de Crelle*).

L'emploi le plus heureux et le plus efficace des Déterminants a été fait par M. HERMITE, dans ses savantes et profondes recherches sur la Théorie des nombres, et dans ses travaux d'Analyse. Il en a publié les remarquables résultats dans les *Journaux de Crelle, de Liouville*, etc.

M. SALMON a puissamment contribué à la propagation de cette science par la publication d'ouvrages spéciaux et par les applications à la Géométrie qu'il a données dans son Traité : *On the higher plane curves*.

Les fonctions de Cramer étaient d'abord appelées *résultantes;* la dénomination de *déterminant*, empruntée à Gauss, a été introduite dans la Science par Cauchy, qui lui a substitué plus tard le nom de *fonction alternée*. L'usage a fait maintenir le nom de *déterminant*.

Paris, mars 1877.

G. D.

AVIS ESSENTIEL AU LECTEUR.

Le texte courant de ce Traité forme la partie la plus élémentaire de la *Théorie des Déterminants;* il comprend, en outre, toutes les applications de cette science aux diverses matières qui constituent le programme des Mathématiques spéciales. Le lecteur peut en faire une étude suivie, en négligeant tout ce qui est imprimé en petits caractères.

Les autres articles, non revêtus d'astérisques, peuvent être lus ensuite; ils complètent le cours. Sans être indispensables, ils fournissent des résultats utiles et intéressants, dont l'Élève saura apprécier l'importance.

La partie en petit texte, qui est affectée d'astérisques, ne présente aucune difficulté. Elle résume plusieurs applications curieuses des Déterminants à l'Algèbre et à la Géométrie analytique; celles-ci reposent sur des méthodes, à la fois simples et rapides, qui trouvent un emploi fort avantageux dans beaucoup de branches des Sciences exactes.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

PRÉFACE V

Avis essentiel au lecteur X

LIVRE PREMIER.

THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DÉTERMINANTS.

§ I. — DÉFINITION ET NOTATION DES DÉTERMINANTS.

N°

1. Première définition des déterminants 1
2. Inversion des indices 2
3. Permutations paires et permutations impaires 2
4. Théorème fondamental sur les inversions 2
5. Composition du déterminant Δ par rapport à la position des n^2 éléments dans le tableau carré de ces éléments 3
6. Définition ordinaire des déterminants 4
7. Terme principal du déterminant 4
8. Règle des signes 5
9. Degré ou ordre d'un déterminant 6
10. Les termes d'un déterminant se séparent en deux classes 6
11. Exemples de déterminants du second et du troisième ordre. 7
12. Le déterminant n'est autre que le dénominateur commun des formules de Cramer 7
13. Notation ordonnée de Cauchy 8

Nos Pages
14 Notation à double indice de Leibnitz..... 8
15. Notation à indices superposés..... 9
16. Formation des termes d'un déterminant, dont les indices sont superposés..... 10
17. Règle des signes pour les déterminants, dont les éléments sont à indices superposés..... 10

17 *bis*. Notation abrégée des déterminants..... 11

§ II. — Transformation des déterminants.

18. **Théorème I.** — Changement des lignes en colonnes, et *vice versâ*..... 11
19. Démonstration du théorème dans le cas d'indices superposés.... 13
20. Démonstration générale du même théorème..... 13
21. **Théorème II.** — Permutation de deux lignes ou de deux colonnes..... 15
22. **Corollaire I.** — Permutation simultanée de deux lignes et de deux colonnes..... 15
23. **Corollaire II.** — Maintien des éléments de la diagonale..... 15
23 *bis*. **Corollaire III.** — Translation d'un élément au sommet du déterminant..... 15
* 24. **Définition.** — Permutation des deux diagonales d'un déterminant..... 15
* 25. **Théorème III.** — Échange des diagonales d'un déterminant.... 16
26. **Théorème IV.** — Cas de l'identité de deux lignes ou de deux colonnes..... 16
27. **Théorème V.** — Multiplication par un même facteur des éléments d'une ligne ou d'une colonne..... 17
28. **Corollaire I.** — Mise en évidence d'un facteur commun aux éléments d'une ligne ou d'une colonne..... 18
29. Simplification de certains déterminants..... 18
30. **Corollaire II.** — Déterminants dans lesquels deux lignes ou deux colonnes ne diffèrent que par un facteur constant... 19
31. **Corollaire III.** — Changement de signe des éléments d'une ligne ou d'une colonne..... 19
32. **Remarque.** — Transformation des déterminants égaux à zéro. 20
33. **Théorème VI.** — Transformation d'un déterminant en un autre, dans lequel les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont égaux à l'unité (théorème de Dostor)..... 20
34. **Remarque I.** — Diviseur du déterminant transformé..... 21

N° Pages

35. **Remarque II.** — Transformation dans le cas où les éléments de la ligne ou de la colonne ont des facteurs communs... 21
36. Importance de cette transformation..... 21

§ III. — Les déterminants mineurs.

37. **Définition I.** — Déterminants mineurs..... 22
38. **Définition II.** — Ordre des déterminants mineurs..... 22
39. Notation des déterminants mineurs..... 22
40. Nombre des déterminants mineurs..... 22
41. Propriété essentielle des déterminants..... 22
42. **Théorème I.** — Développement d'un déterminant suivant les éléments de la première colonne..... 22
Démonstration générale de ce théorème..... 24
43. **Corollaire.** — Nature du coefficient d'un élément de la première colonne..... 26
44. **Théorème II.** — Calcul du coefficient d'un élément quelconque du déterminant..... 26
45. Démonstration directe du théorème précédent..... 27
46. Règle pratique pour déterminer le signe du coefficient d'un élément..... 27
47. **Théorème III.** — Multiplication des éléments d'une ligne par les déterminants mineurs des éléments d'une autre ligne..... 28
48. Généralisation de ce théorème..... 29

§ IV. — Développement des déterminants.

49. **Définition.** — Développement d'un déterminant..... 29
50. Méthode pour développer les déterminants..... 29
51. Exemples de déterminants développés..... 31
52. Règle de Sarrus pour développer les déterminants du troisième degré..... 32
53. Application de ce mode de développement..... 33
54. Autres exemples de développements par la règle de Sarrus.. 34
55. Décomposition d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ degré en une somme de produits, formés chacun d'un déterminant du $p^{\text{ième}}$ degré et d'un déterminant du $(n-p)^{\text{ième}}$ degré (théorème de Laplace)..... 34

CHAPITRE II.

COMBINAISON ET PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS SATISFAISANT A CERTAINES CONDITIONS.

---

§ I. — ADDITION ET SOUSTRACTION DES DÉTERMINANTS.

N° Pages

56. **Théorème I.** — Décomposition d'un déterminant en une somme de deux déterminants..... 36
57. Exemples..... 37
58. **Théorème II.** — Addition de deux déterminants..... 37
59. **Théorème III.** — Déterminants égaux à zéro..... 39
60. **Théorème IV.** — Transformation d'un déterminant..... 40
61. **Corollaire I.** — Application de ce mode de transformation. 40
62. **Corollaire II.** — Mise en évidence d'un facteur dans un déterminant..... 41

§ II. — PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS AYANT UN OU PLUSIEURS ÉLÉMENTS ÉGAUX A ZÉRO.

63. Simplification de déterminants..... 42
64. **Théorème I.** — Déterminants réductibles à un déterminant de degré moindre (théorème de Jacobi)..... 42
65. Exemples de déterminants réductibles..... 43
66. **Théorème II.** — Déterminants égaux à l'unité (théorème de Dostor)..... 44
67. **Théorème III.** — Élévation de l'ordre d'un déterminant.... 44
68. **Théorème IV.** — Déterminants réductibles à leur terme principal..... 45
* 69. **Théorème V.** — Déterminants réductibles à leur terme principal, multiplié par une puissance de 2 (théorème de Dostor)..... 47
70. **Théorème VI.** — Déterminants réductibles à un déterminant ayant un zéro et des unités comme éléments d'une ligne ou d'une colonne..... 46
71. **Définition I.** — Éléments conjugués des déterminants..... 47
72. **Définition II.** — Déterminants symétriques..... 48
73. **Théorème VII.** — Déterminants réductibles à un déterminant ayant l'unité pour éléments d'une ligne et d'une colonne..... 48
74. **Corollaire.** — Exemple..... 49

Nos Pages

75. **Définition III.** — Déterminants à diagonale vide ou pleine.. 49
76. **Théorème VIII.** — Décomposition d'un déterminant à diagonale pleine en déterminants à diagonale vide..... 49
77. Exemples de déterminants à diagonale vide..... 50
78. **Théorème IX.** — Transformation des déterminants ayant le premier élément nul et les autres éléments de la première ligne et de la première colonne égaux à l'unité (théorème de Sylvester). 51
79. **Corollaire I.** — Extension de ce théorème..... 51
80. **Corollaire II.** — Application générale du même théorème.. 52

§ II. — Calcul abrégé des déterminants numériques et algébriques.

81. Procédé simple pour développer un déterminant..... 52
82. **Exemple I.** — Évaluation d'un déterminant numérique.... 53
83. **Exemple II.** — Calcul d'un autre déterminant numérique.. 53
84. **Exemple III.** — Évaluation d'un déterminant numérique singulier..... 54
85. **Exemple IV.** — Extension du calcul précédent..... 54
86. Exercices numériques..... 55
87. Carrés magiques : carré magique formé par les 9 premiers nombres entiers..... 55
88. Carré magique formé par les 16 premiers nombres entiers..... 56
89. Carré magique formé par les 25 premiers nombres entiers.. 57
90. **Exemple I.** — Du développement d'un déterminant algébrique..... 58
91. **Exemple II.** — De l'évaluation d'un déterminant algébrique. 59
92. **Exemple III.** — Du calcul d'un déterminant algébrique.... 60
93. **Exemple IV.** — Du développement d'un déterminant algébrique. 61
94. **Exemple V.** — Du calcul d'un déterminant algébrique..... 62
95. Exercices algébriques..... 62

CHAPITRE III.

PRODUIT DE DEUX DÉTERMINANTS.

§ I. — Multiplication de deux déterminants.

96. **Lemme.** — Réduction de certains déterminants de degré pair en un produit de deux déterminants d'un degré deux fois moindre..... 65

Nos Pages
97. Autre exemple de cette réduction..... 66
98. Théorème. — Produit de deux déterminants (théorème de Cauchy)..... 67
99. Produit de deux déterminants du troisième degré..... 68
100. Origine et auteurs de la règle précédente..... 69
101. Remarque I. — Les quatre formes du produit de deux déterminants..... 70
102. Remarque II. — Produit de deux déterminants de degrés différents..... 71
103. Exemples de produits de déterminants..... 71
104. Application de la règle de la multiplication de deux déterminations à la démonstration d'un théorème d'Euler..... 72

§ II. — Carré des déterminants.

105. Carré d'un déterminant du second degré..... 74
106. Les trois formes du carré d'un déterminant..... 75
107. Carré d'un déterminant du troisième degré..... 75

§ III. — Les déterminants multiples.

108. Déterminants multiples du second degré..... 75
109. Relations entre les quatre déterminants compris dans un déterminant multiple du troisième degré..... 76
110. Définition des déterminants multiples..... 76
111. Produit de deux déterminants multiples..... 77
112. Formule de Lagrange..... 78

LIVRE II.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A L'ALGÈBRE ET A LA TRIGONOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES EXPRIMÉES EN DÉTERMINANTS.

113. Résolution d'une équation algébrique du premier degré, exprimée en déterminant..... 81
114. Équation algébrique du second degré..... 82

N° Pages
115. Équation en déterminant, où la diagonale est formée par l'inconnue..... 83
116. Équation en déterminant, où l'inconnue forme les éléments moins un d'une colonne..... 84
117. Équation en déterminant, où la diagonale est formée par l'inconnue et où tous les autres éléments sont égaux..... 84
118. Dans l'équation précédente, les éléments conjugués sont seuls égaux..... 85
* 119. Équation en déterminant ayant les éléments hors la diagonale égaux à l'inconnue..... 86
* 120. Équation en déterminant du sixième degré..... 87

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

§ I. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES NON HOMOGÈNES.

121. Résolution d'un système de trois équations linéaires non homogènes à trois inconnues. Règle générale..... 89
122. Exemple I. — Application numérique..... 91
123. Exemple II. — Système à équations incomplètes..... 92
124. Résolution du système de quatre équations non homogènes du premier degré à quatre inconnues..... 92
125. Exemple. — Système de quatre équations incomplètes.... 92
126. Résolution générale d'un système de n équations non homogènes du premier degré à autant d'inconnues..... 93
127. Discussion des valeurs des inconnues..... 94
128. Cas où le déterminant Δ des équations se réduit à zéro..... 95
129. Cas où tous les déterminants mineurs de Δ sont nuls..... 96
130. Résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues, dont une seule n'est pas homogène..... 96

§ II. — RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES HOMOGÈNES.

131. Condition pour que n équations homogènes du premier degré à n inconnues soient compatibles..... 97
132. Détermination directe de cette condition..... 98
133. Calcul direct du rapport des inconnues..... 99

§ III. — Résolution d'équations linéaires en nombre différent de celui des inconnues.

Nos Pages

134. Condition pour que n équations non homogènes du premier degré, à $n-1$ inconnues, soient compatibles..... 100

135. Deuxième méthode pour résoudre un système de n équations non homogènes du premier degré, à n inconnues..... 101

CHAPITRE III.

LES RÉSULTANTS.

---

§ I. — Résultante de deux équations algébriques.

136. Définition. — Équation résultante et éliminant..... 103

137. Résultante d'un système de deux équations du premier degré à une inconnue..... 104

138. Résultante d'un système de deux équations du second degré à une inconnue..... 104

139. Résultante d'un système de deux équations algébriques quelconques à une inconnue..... 105

140. Cas où les deux équations admettent l'une ou toutes les deux des racines infinies..... 105

141. Les deux produits R et R_1 ne diffèrent que par un facteur constant..... 107

141 *bis*. Application à un système de deux équations du second degré, etc..... 108

142. Nature du résultant de deux équations à une inconnue..... 109

143. Réciproque de la proposition précédente..... 110

144. Propriété du résultant de deux équations à une inconnue..... 110

§ II. — Méthodes d'élimination entre deux équations algébriques.

145. Méthode d'élimination d'Euler..... 111

146. Méthode d'élimination de M. Sylvester..... 112

147. Application à un système de deux équations, l'une du second et l'autre du troisième degré..... 113

148. Cas général..... 11

149. Méthode d'élimination de Bezout..... 11

150. Méthode d'élimination de M. Cayley..... 11

N° Pages

151. Méthode d'élimination de Cauchy entre deux équations du même degré 116

152. Cas général : les deux équations sont toutes les deux du $m^{\text{ième}}$ degré. 118

153. Élimination entre deux équations de degrés différents 119

154. Cas général : les deux équations sont l'une du $m^{\text{ième}}$ et l'autre du $n^{\text{ième}}$ degré 120

* 155. Méthode de M. Cayley, modifiée par le P. Joubert 122

* 156. Premier cas : les deux équations sont du même degré 122

* 157. Le résultant est un déterminant symétrique 124

* 158. Calcul des éléments du résultant 124

* 159. Application à un système de deux équations du troisième degré. 126

* 160. Deuxième cas : les deux équations sont de degrés différents 127

* 161. Application à un système de deux équations, l'une du troisième et l'autre du second degré 129

§ III. — CALCUL DES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS.

162. Les deux équations sont du second degré 129

163. L'une des deux équations est du troisième et l'autre du second degré 130

164. Les deux équations sont du troisième degré 131

165. Ces deux équations ont deux racines communes 132

166. Les deux équations sont du $m^{\text{ième}}$ degré : méthode générale 132

167. Application de la méthode générale à un système de deux équations du troisième degré 133

§ IV. — CALCUL DES RACINES DOUBLES D'UNE ÉQUATION.

168. Application à l'équation du troisième degré 135

§ V. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

169. Résolution de l'équation du troisième degré par le déterminant symétrique du troisième degré à trois éléments différents 138

170. **Théorème.** — Décomposition de certains déterminants du $n^{\text{ième}}$ degré en un produit de n facteurs 140

§ VI. — LES DIFFÉRENCES DES RACINES D'UNE ÉQUATION.

171. Produit des différences de n quantités 141

172. Produit des carrés des différences des racines d'une équation algébrique 142

Nos Pages
173. Somme des carrés des différences des racines de l'équation du troisième degré..... 143

§ VII. — RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

174. Élimination de x entre les deux équations $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, l'une du $m^{\text{ième}}$ et l'autre du $n^{\text{ième}}$ degré..... 144
175. L'équation en y est au plus du degré mn..... 145
176. Résolution du système $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$..... 145
177. Les deux équations précédentes sont du même degré..... 146

CHAPITRE IV.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA TRIGONOMÉTRIE.

178. Relation entre les cosinus des trois angles d'un triangle..... 14[illegible]
179. Condition pour que trois droites, issues d'un même point, soient situées dans un même plan..... 14[illegible]
180. Réciproque de la proposition précédente..... 14[illegible]
* 181. Rayon du cercle tangent à trois cercles donnés..... 15[illegible]
182. Relation en déterminant entre les trois côtés d'un triangle et l'angle opposé à l'un d'eux..... 15[illegible]
183. Résolution d'une équation trigonométrique, dont le premier membre est exprimé en déterminant..... 15[illegible]
184. Vérification d'une égalité trigonométrique, dont le premier membre est exprimé en déterminant..... 15[illegible]
185. Évaluation d'un déterminant trigonométrique..... 15[illegible]
186. Valeur d'un autre déterminant trigonométrique..... 15[illegible]
187. Calcul d'un troisième déterminant trigonométrique..... 15[illegible]

LIVRE III.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS.

§ I. — La droite dans le plan.

N°		Pages
188.	Distance d'un point à une droite	157
189.	Angle de deux droites en valeur de leurs inclinaisons sur les axes de coordonnées	159
190.	Angle de deux droites données par leurs équations	160
191.	Conditions de perpendicularité de deux droites	161
192.	Équation de la droite passant par deux points donnés	161
193.	Expressions générales des coordonnées des points situés sur la droite qui passe par deux points donnés	162
194.	Condition pour que trois droites se coupent au même point	162

§ II. — Le cercle dans le plan.

195.	Expression en déterminant de l'équation du cercle en valeur des dérivées et du rayon	163
196.	Interprétation géométrique de l'équation précédente	164
197.	Équation du cercle passant par trois points donnés	165
198.	Relation entre les distances mutuelles de quatre points situés sur une même circonférence	165

§ III. — Les courbes du second degré.

199.	Forme en déterminant des équations de l'ellipse et de l'hyperbole	167
200.	Propriétés des fonctions homogènes du second degré	168
201.	Équation aux axes des courbes du second degré	170
202.	Grandeur des axes des courbes du second degré	170
203.	Conditions pour que l'équation générale du second degré représente deux droites parallèles	171

CHAPITRE II.

SURFACES DES POLYGONES.

---

§ I. — Expressions diverses en déterminant de la surface du triangle.

N° Pages

204. Expression en déterminant de la surface du triangle en valeur des trois côtés 173
205. Nouvelle expression de la surface du triangle 174
206. Autre expression de la surface du triangle 175
207. Rayon du cercle circonscrit au triangle 175
208. Surface en déterminant du triangle, déduite de la formule précédente 175
209. Transformation en produit du déterminant précédent 176
210. Surface d'un triangle ayant un sommet à l'origine, en valeur des coordonnées des deux autres sommets 178
211. Expression en déterminant de la surface du triangle en valeur des coordonnées des trois sommets 178
212. Deuxième méthode pour calculer la surface d'un triangle en valeur des coordonnées de ses sommets 179
213. Autre forme du déterminant exprimant cette surface 180
214. Troisième forme de la même expression 180
215. Deuxième méthode pour déterminer la surface d'un triangle en valeur des côtés 18
* 216. Troisième méthode pour calculer la surface d'un triangle en valeur des côtés 181
* 217. Expression de la surface du triangle compris entre trois droites données par leurs équations 182
* 218. Produit des surfaces de deux triangles en valeur des neuf distances des trois sommets du premier triangle aux trois sommets du second 183
* 219. Produit de la surface d'un triangle par la surface d'un second triangle, dont les sommets sont les centres des trois cercles exinscrits au premier 186

§ II. — Surface des triangles inscrits dans les courbes du second degré.

220. Surface du triangle inscrit dans la parabole 188
221. Surface du triangle compris entre trois tangentes à la parabole 189

Nos Pages
222. Surface du triangle déterminé par les centres de courbure de trois points de la parabole..... 191
223. Surface du triangle inscrit dans l'ellipse..... 192

§ III. — Surface du quadrilatère en déterminant.

224. Expression en déterminant de la surface du quadrilatère en valeur des coordonnées des quatre sommets..... 194
225. Autre forme de l'expression de cette surface..... 195
226. Surface d'un quadrilatère quelconque en valeur des quatre côtés consécutifs et des deux diagonales..... 195
227. Expression en déterminant de la surface du quadrilatère inscriptible en valeur des quatre côtés..... 196
228. Surface du quadrilatère inscrit dans la parabole..... 198

§ IV. — Surface d'un polygone quelconque.

229. Surface d'un polygone en valeur des coordonnées de ses sommets..... 198

CHAPITRE III.

LA DROITE ET LE PLAN.

§ I. — Direction des droites dans l'espace.

230. Relation entre les inclinaisons mutuelles de quatre droites issues d'un même point de l'espace..... 200
231. Relation entre les trois angles que fait une droite avec les trois axes de coordonnées..... 202
232. Sinus d'un trièdre..... 203
233. Signification géométrique du sinus d'un trièdre..... 204
234. Expression du sinus d'un trièdre en valeur d'une face et des inclinaisons du plan de cette face sur l'arête opposée..... 206
235. Expression du sinus d'un trièdre en valeur de deux faces et du dièdre compris..... 206
236. Sinus du trièdre supplémentaire..... 207
237. Autre expression du sinus du trièdre supplémentaire..... 207
238. Rapport du sinus d'un trièdre au sinus du trièdre supplémentaire. 207
239. Expression du sinus du trièdre en valeur des trois angles dièdres. 208

Nos Pages

240. Expression du sinus du trièdre supplémentaire en valeur des trois faces du trièdre donné..... 209
241. Rapport du sinus d'une face au sinus du dièdre opposé..... 209
242. Valeurs diverses de ce rapport..... 209
243. Inclinaison sur l'un des axes de coordonnées de la droite perpendiculaire au plan des deux autres..... 210
244. Angle de deux droites en valeur des inclinaisons de ces deux droites sur les axes de coordonnées..... 211
245. Angles que fait une droite donnée avec les trois plans de coordonnées..... 212
246. Tangente de l'angle que fait avec les trois axes de coordonnées la droite également inclinée sur ces axes..... 213
247. Tangente de l'angle que fait avec les trois plans de coordonnées la droite également inclinée sur ces plans..... 214
248. Le trièdre dont les trois faces valent ensemble deux angles droits. 215

§ II. — Intersection des droites et des plans.

249. Condition pour que deux droites se rencontrent..... 215
250. Intersection d'une droite avec un plan..... 217
251. Intersection de trois plans..... 217

§ III. — Combinaisons des équations générales qui représentent des plans donnés.

252. Relation identique entre les premiers membres des équations de quatre plans et leurs déterminants..... 219
253. Relation identique entre les premiers membres des équations de trois plans et leurs déterminants..... 221
254. **Théorème I.** — Lorsque trois plans $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$ se coupent suivant une seule et même droite, on a identiquement $P\lambda + P'\lambda' + P''\lambda'' = 0$..... 221
255. Condition pour que quatre plans se coupent en un seul et même point..... 222
256. **Théorème II.** — Lorsque quatre plans $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$, $P''' = 0$ passent par un seul et même point, on a identiquement $P\lambda + P'\lambda' + P''\lambda'' + P'''\lambda''' = 0$..... 222

§ IV. — Plans passant par des points ou des droites données.

257. Équation du plan passant par trois points donnés..... 222
258. Équation du plan passant par deux droites parallèles..... 223
259. Équation du plan passant par deux droites concourantes..... 224

§ V. — Droites et plans parallèles.

Nos Pages
260. Condition pour que trois droites soient parallèles à un même plan 225
261. Condition pour que trois plans soient parallèles à une même droite 225
262. Plan mené par l'origine parallèlement à deux droites données. 226
263. Plan mené par une droite parallèlement à une autre droite.. 227
264. Formes diverses de l'équation de ce plan 228
265. Autres formes de cette équation 229
266. Comparaison de deux de ces formes 229
267. Autre méthode pour arriver aux mêmes résultats.. 229

§ VI. — Droites et plans perpendiculaires.

268. Condition de perpendicularité de la droite et du plan 230

§ VII. — Distance du point au plan et plus courte distance de deux droites.

269. Distance d'un point à un plan 233
270. Distance d'un point à l'un des plans de coordonnées 235
271. Équation de la droite dont tous les points sont à égale distance des trois plans de coordonnées 236
272. Angle de deux plans donnés par leurs équations 236
273. Condition de perpendicularité de deux plans 238
274. Plus courte distance de deux droites 239

§ VIII. — Application de l'identité de Lagrange au calcul des distances dans la Géométrie de l'espace.

275. Rappel et usage de l'identité de Lagrange 241
276. Valeur de x qui rend minima la somme

$$(ax+a')^2+(bx+b')^2+(cx+c')^2 \ldots\ldots\ldots \quad 241$$

277. Valeurs de x et y qui rendent minima la somme

$$(ax+a'y+a'')^2+(bx+b'y+b'')^2+(cx+c'y+c'')^2 \ldots \quad 242$$

278. Valeur commune des trois rapports dont l'égalité résout la question précédente 244
279. Distance du point (x', y', z') à la droite $x = az + p$, $y = bz + q$. 245
280. Distance du point (x', y', z') au plan $ax + by + cz + d = 0$... 245
281. Plus courte distance de deux droites 247

CHAPITRE IV.

LE TÉTRAÈDRE.

§ I. — Propriétés du tétraèdre.

N° Pages
282. Notation 248
283. Première propriété du tétraèdre 249
284. Conséquence de cette propriété 250
285. Deuxième propriété du tétraèdre 250
286. Conséquence de cette propriété 250
287. Troisième propriété du tétraèdre 251
288. Relation entre les six angles dièdres d'un tétraèdre 251
289. Quatrième propriété du tétraèdre 251
290. Cinquième propriété du tétraèdre 252
291. Somme des carrés des quatre faces en valeur des produits des arêtes opposées et des sinus des angles compris entre ces arêtes. 253

§ II. — Expressions diverses du volume du tétraèdre.

292. Volume du tétraèdre en valeur de trois arêtes contiguës, de l'angle de deux de ces arêtes et de l'inclinaison de la troisième arête sur le plan des deux premières 255
293. Expression en déterminant du volume du tétraèdre en valeur de trois arêtes contiguës et des inclinaisons mutuelles de ces arêtes. 256
294. Expression développée du volume du tétraèdre en valeur des six arêtes opposées deux à deux 256
295. Expression en déterminant du volume du tétraèdre en valeur des six arêtes opposees deux à deux 257
296. Surface de la base d'un tétraèdre en valeur des trois arêtes latérales et de leurs inclinaisons mutuelles 258
297. Surface du triangle déterminé par l'intersection d'un plan avec les trois plans de coordonnées 260
297 *bis*. Expression en déterminant de la surface du triangle, en valeur des coordonnées dans l'espace de ses trois sommets. 261
298. Volume du tétraèdre en valeur de deux arêtes opposées et de leur plus courte distance 263
299. Relation entre les plus courtes distances des arêtes opposées et les angles compris entre ces arêtes 264
300. Volume du tétraèdre en valeur des arêtes et de la plus courte distance de deux opposées de ces arêtes 264
301. Volume du tétraèdre en valeur de trois faces et du sinus du supplément du trièdre compris 265

N° Pages
302. Volume du tétraèdre en valeur de deux faces et du dièdre compris 265
303. Rapport des produits des arêtes opposées 266
304. Volume du tétraèdre en valeur d'une face et de ses inclinaisons sur les trois autres faces 266
305. Volume du tétraèdre, ayant un sommet à l'origine des coordonnées, en valeur des coordonnées des trois autres sommets 267
306. Volume du tétraèdre en valeur des coordonnées des quatre sommets 268
307. Méthode directe pour déterminer cette expression 268
308. Transformation de la même expression 270
309. Volume du tétraèdre compris sous quatre plans donnés par leurs équations 270
* 310. Produit des volumes de deux tétraèdres en valeur des seize distances des quatre sommets du premier tétraèdre aux quatre sommets du second 272

§ III. — Expressions diverses du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.

311. Expression en déterminant du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur de trois arêtes contiguës et des inclinaisons mutuelles de ces arêtes 275
312. Expression développée du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur de trois arêtes contiguës et des inclinaisons mutuelles de ces arêtes 276
313. Expression en déterminant du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur des six arêtes opposées deux à deux 276
314. Autre forme du dernier déterminant 277
315. Expression, développée en produit, de la valeur de $576\,V^2R^2$ 278
316. Calcul direct du même déterminant 278

§ IV. — Rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre.

* 317. Rayon des deux sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre, ayant leurs centres situés sur la droite issue d'un sommet et également inclinée sur les trois faces qui aboutissent à ce sommet 280
* 318. Rayon des six autres sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre 281

§ V. — Tétraèdre circonscriptible par les arêtes.

* 319. Relations entre les arêtes de ce tétraèdre 282
* 320. Cosinus des angles à un sommet 282
321. Volume du tétraèdre 283

Nos Pages
* 322. Rayon de la sphère tangente aux six arêtes du tétraèdre..... 283
323. Angles des arêtes opposées..... 284
* 324. Sphère tangente extérieurement à trois arêtes contiguës et intérieurement aux trois autres arêtes..... 284
* 325. Tétraèdre régulier..... 285

§ VI. — Tétraèdre équifacial.

* 326. Définition et propriétés de ce tétraèdre..... 285
* 327. Volume du tétraèdre..... 286
* 328. Rayons des sphères inscrite et exinscrite..... 286
* 329. Rayon de la sphère circonscrite..... 286

§ VII. — Tétraèdre a arêtes opposées rectangulaires.

* 330. Première propriété de ce tétraèdre..... 287
* 331. Deuxième propriété du tétraèdre..... 287
* 332. Relation entre les trois arêtes d'un même trièdre et les angles dièdres adjacents..... 287
* 333. Troisième propriété du tétraèdre..... 288
* 334. Quatrième propriété du tétraèdre..... 289
* 335. Volume du tétraèdre..... 289

CHAPITRE V.

LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

---

§ I. — La sphère.

336. Expression en déterminant de l'équation de la sphère en valeur des dérivées et du rayon..... 290
337. Équation de la sphère passant par quatre points donnés..... 291
338. Relation entre les distances mutuelles de cinq points situés sur la surface d'une sphère..... 292

§ II. — Les surfaces du second degré a centre.

339. Signification de l'équation de l'ellipsoïde et de celles des deux hyperboloïdes..... 293

N° Pages
340. Forme en déterminant de ces équations..... 295
341. Cas où l'ellipsoïde est rapporté à ses axes..... 296
342. Cas des deux hyperboloïdes..... 296
343. Équation aux axes des surfaces du second degré..... 296
344. Grandeur des axes des surfaces du second degré..... 297
344 *bis*. Équation d'un axe, en valeur de la grandeur de cet axe..... 299
345. Équation et grandeur des axes des surfaces du second degré, pour des coordonnées rectangulaires..... 300
346. Réalité des racines de l'équation du troisième degré en S... 300

§ III. — LES SURFACES CYLINDRIQUES DU SECOND DEGRÉ.

347. Condition pour qu'une surface soit cylindrique..... 303
348. Condition pour que l'équation générale des surfaces du second degré représente un cylindre..... 304
349. Autres expressions de ces conditions..... 305
350. Direction du cylindre..... 306
351. Équation du cylindre parallèle à une droite donnée et circonscrit à une surface du second degré..... 306
352. Courbe de contact de ce cylindre..... 307
353. Cylindre parallèle à une droite donnée et circonscrit à l'ellipsoïde..... 307
354. Cylindre circonscrit à une surface du second degré et touchant cette surface suivant son intersection avec un plan donné..... 308
355. Cylindre circonscrit à un paraboloïde..... 310

§ IV. — LES SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ.

356. Condition pour qu'une surface soit de révolution..... 311
357. Conditions pour que l'équation générale du second degré représente une surface de révolution..... 313
358. Forme implicite des équations de l'axe de révolution..... 314

LIVRE IV.

LES DISCRIMINANTS ET LES INVARIANTS.

CHAPITRE PREMIER.

LES DISCRIMINANTS.

§ I. — Définition et calcul des discriminants.

Nos Pages
359. Définition du discriminant d'une fonction..... 317
360. Discriminants des fonctions homogènes du second degré.... 318
361. Discriminant de la fonction homogène du quatrième degré à deux variables..... 319
362. Discriminant de la fonction homogène du quatrième degré à deux variables..... 320

§ II. — Application des discriminants aux courbes du second degré.

363. Condition pour que l'équation générale du second degré à deux variables représente deux droites qui se coupent... 321
364. Condition pour que l'équation générale du second degré à deux variables représente deux droites parallèles..... 322
365. Condition pour qu'une droite soit tangente à une conique... 323
366. Expression analytique de cette condition..... 324
367. Condition pour qu'une courbe du second degré soit tangente à l'un des axes de coordonnées..... 324
368. Condition pour que l'intersection de deux droites appartienne à une conique..... 326
369. Équation des tangentes menées d'un point extérieur à une courbe du second degré..... 328
370. Équation des tangentes menées à une courbe du second degré par les intersections de cette courbe avec une droite donnée..... 329

§ III. — Le plan tangent aux surfaces du second degré.

371. Condition pour qu'un plan soit tangent à une surface du second degré..... 331

Nos Pages
372. Condition pour qu'une droite soit tangente à une surface du second degré..... 332
373. Équation générale des surfaces du second degré qui touchent les trois axes de coordonnées..... 333
374. Condition pour que l'intersection de trois plans appartienne à une surface du second degré..... 335

§ IV. — Les cônes circonscrits aux surfaces du second degré.

375. Condition pour qu'une surface soit conique..... 337
376. Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cône..... 338
377. Équation du cône issu d'un point et circonscrit à une surface du second degré..... 339
378. Équation du cône circonscrit à une surface du second degré et qui touche cette surface suivant son intersection avec un plan donné..... 340

CHAPITRE II.

LES INVARIANTS.

§ I. — Les transformations linéaires.

379. Définition des transformations linéaires..... 342
380. Exemple d'une transformation linéaire..... 342
381. Valeur du discriminant de la fonction transformée..... 343

§ II. — Les invariants.

382. Définition des invariants..... 344
383. **Théorème.** — Les discriminants sont des invariants..... 344
384. Invariants des courbes du second degré..... 348
385. Interprétation géométrique de ces invariants..... 349
386. Invariants des fonctions du second degré à deux variables par le calcul des axes de la conique correspondante..... 350
387. Invariants des fonctions du second degré à trois variables par la détermination des axes de la surface correspondante...

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

THÉORIE
DES
DÉTERMINANTS.

LIVRE PREMIER.
THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

CHAPITRE PREMIER.
PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DÉTERMINANTS.

§ I. Définition et notation des déterminants. — § II. Transformation des déterminants. — § III. Les déterminants mineurs. — § IV. Développement des déterminants.

§ I. — Définition et notation des déterminants.

1. Première définition des déterminants. — Étant donné le produit $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$ de n quantités $a_1, b_2, c_3, \ldots, l_n$, si l'on fait entre les n indices $1, 2, 3, \ldots, n$ toutes les permutations possibles, en maintenant les lettres fixes, et que l'on donne à chaque résultat le signe + ou le signe — suivant que le nombre des inversions entre les n indices est pair ou impair, la somme algébrique des résultats obtenus est dite le *déterminant* des n^2 quantités du tableau

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & l_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots, & l_3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & l_n. \end{array}\right.$$

Ces n^2 quantités sont appelées les *éléments* du déterminant. Nous désignerons ce déterminant par Δ.

2. Inversion des indices. — L'*inversion* entre deux indices se comprend d'elle-même. Pour plus de clarté, nous dirons que deux indices présentent une *inversion*, toutes les fois qu'ils ne se suivent pas dans leur ordre numérique, c'est-à-dire chaque fois que le premier indice est supérieur au suivant. Ainsi la permutation

$$a_1 b_2 c_3 d_4$$

n'a pas d'inversion. La permutation

$$a_4 b_3 c_1 d_2$$

présente au contraire cinq inversions : une entre a_4 et chacun des trois éléments suivants b_3, c_1, d_2, ce qui fait *trois* inversions; et une inversion entre b_3 et chacun des deux éléments suivants c_1 et d_2, ce qui fait encore *deux* inversions; donc en tout *cinq* inversions.

3. Permutations paires et permutations impaires. — Une permutation est dite *paire* ou *impaire*, suivant qu'elle présente un nombre *pair* ou un nombre *impair* d'inversions entre les indices.

Deux permutations sont dites *de même parité*, lorsqu'elles sont toutes les deux paires ou toutes les deux impaires; si l'une est paire et l'autre impaire, elles sont dites *de parités différentes*.

4. Théorème fondamental sur les inversions. — *Lorsque l'on permute entre eux deux indices dans une permutation, la permutation change de parité*, en d'autres termes, on altère d'un nombre impair le nombre des inversions entre les indices.

Nous distinguerons deux cas, suivant que les indices intervertis appartiennent à deux éléments consécutifs ou à deux éléments quelconques de la permutation.

1° Considérons la permutation $P = A e_\alpha f_\beta B$, où A désigne le produit des éléments $a, b, \ldots, d$ qui précèdent l'élément e, et B le produit des éléments $g, h, \ldots, l$ qui suivent l'élé-

ment f; les éléments $a, b, \ldots, d$ sont affectés d'indices quelconques, mais différents de α et β, ainsi que les éléments $g, h, \ldots, l$.

Si l'on intervertit les indices α et β, nous aurons la permutation $P' = A e_\beta f_\alpha B$; or je dis que les permutations P et P' sont de parités différentes.

En effet, il est aisé de voir que les éléments de A, comparés entre eux et avec les suivants, présentent le même nombre d'inversions dans P et P'; et que les éléments de B, comparés entre eux et avec les précédents, présentent aussi un même nombre d'inversions dans P et P'. Mais l'un seul des deux produits $e_\alpha f_\beta$ et $e_\beta f_\alpha$ présente une inversion; par suite, l'une des deux permutations P et P' présente une inversion de plus que l'autre; donc ces deux inversions sont de parités différentes.

Nous en concluons que, si dans une permutation on fait avancer ou reculer un indice d'un rang, la permutation change de parité.

2° Supposons actuellement que, dans la permutation P, on intervertisse les indices des deux éléments e et e', de rang r et r', qui sont séparés par m éléments.

On amènera l'indice de l'élément e au rang r', en le faisant reculer de $m+1$ rangs, ce qui produira $m+1$ changements de parité; puis on amènera l'indice de l'élément e' au rang r, en le faisant avancer de m rangs, ce qui produira encore m changements de parité. Par suite, la permutation P aura subi en tout un nombre $m+1+m$ ou un nombre impair $2m+1$ de changements de parité; donc la permutation résultante sera d'une parité contraire à celle de la permutation P.

5. Composition du déterminant Δ par rapport à la position des n^2 éléments dans le tableau carré (1) de ces éléments. — Il n'est pas difficile de reconnaître que chaque terme du déterminant Δ contient un élément et un seul de chaque colonne dans le tableau carré (1) des n^2 éléments; car chaque permutation, formée au moyen du *terme-type* $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$ par l'inversion des indices, renferme chacune des n lettres $a, b, c, \ldots, l$ et ne la renferme qu'une fois.

Chaque terme de Δ contient aussi un élément et un seul de chaque ligne horizontale du tableau carré (1) des n^2 éléments; car chaque terme, formé au moyen du même terme-type par l'inversion des indices, renferme, comme indice, chacun des n premiers nombres entiers $1, 2, 3, \ldots, n$ et ne le renferme qu'une fois.

Réciproquement, tout produit de n facteurs, qui ne contient qu'un élément de chacune des n lignes horizontales du tableau (1) et aussi qu'un élément de chacune des n colonnes verticales de ce tableau, pourra être considéré comme un terme du déterminant Δ, s'il est affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que le nombre des inversions entre les indices y est pair ou impair : car ce produit est nécessairement l'un de ceux obtenus par la permutation, de toutes les manières possibles, des indices dans le produit $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$.

On en conclut que le déterminant peut aussi recevoir la définition suivante, qui nous paraît la plus élémentaire.

6. Définition ordinaire des déterminants. — Étant données n^2 quantités

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots, & l_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots, & l_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots, & l_3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots, & l_n, \end{array}$$

représentées par des *lettres* munies d'*indices,* qui sont disposées en un carré de n colonnes verticales distinguées par les lettres et de n lignes horizontales marquées par les indices, le *déterminant* de ces n^2 quantités ou *éléments* est la somme algébrique de tous les produits possibles que l'on peut former avec ces n^2 éléments, pris n à n, de manière que chaque produit ou *terme* ne contienne qu'un élément de chaque ligne et aussi qu'un élément de chaque colonne.

7. Terme principal du déterminant. — Le produit

$$a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$$

des n éléments $a_1, b_2, c_3, \ldots, l_n$, qui sont disposés en diago-

nale, de gauche à droite, constitue le *terme principal* du déterminant; les lettres s'y suivent dans leur ordre alphabétique et les indices y sont rangés dans leur ordre de grandeur croissante.

Ce terme est ainsi appelé parce qu'il sert à former, en valeur absolue, tous les termes du déterminant, en y maintenant les lettres dans leur ordre alphabétique et en opérant entre les indices toutes les permutations possibles.

Car, de cette manière, chaque terme obtenu, ne renfermant qu'une fois chacune des n lettres $a, b, c, \ldots, l$ et qu'une fois aussi chacun des n indices $1, 2, 3, \ldots, n$, ne contiendra qu'un élément de chaque ligne et aussi qu'un élément de chaque colonne.

De plus, comme nous l'avons déjà prouvé au n° 5, tous les termes du déterminant auront été formés, puisqu'on aura effectué toutes les permutations possibles entre les n indices $1, 2, 3, \ldots, n$.

On pourrait aussi, dans le terme principal, maintenir les indices dans leur ordre numérique et opérer toutes les permutations possibles entre les n lettres $a, b, c, \ldots, l$.

8. Règle des signes. — Le terme principal d'un déterminant est toujours affecté du signe $+$.

Si les lettres, dans les différents termes, sont maintenues dans leur ordre alphabétique, les autres termes seront affectés du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les indices y présentent un nombre pair ou un nombre impair d'inversions (n° 1).

Ainsi, si $n = 3$, le déterminant défini au n° 6 sera formé avec 3^2 ou 9 éléments; les produits $a_2 b_3 c_1$ et $a_3 b_2 c_1$ seront deux termes de ce déterminant. Dans le terme $a_2 b_3 c_1$, les indices se trouvant rangés dans l'ordre 2, 3, 1, forment une inversion entre 2 et 1 et une autre inversion entre 3 et 1; ils présentent par suite un nombre pair d'inversions; donc ce terme devra être affecté du signe $+$. Dans le terme $a_3 b_2 c_1$, au contraire, il y a une inversion entre chaque indice et les suivants; il contient, par suite, trois inversions et devra être affecté du signe $-$.

Si, au contraire, les indices se suivent dans leur ordre numérique, les différents termes du déterminant seront affectés du signe + ou du signe —, suivant que les lettres y présentent un nombre pair ou un nombre impair d'inversions.

Ainsi, dans les deux termes $a_2 b_3 c_1$ et $a_3 b_2 c_1$ du déterminant formé avec 3^2 ou 9 éléments, rangeons les indices dans leur ordre numérique; ces deux termes s'écriront $c_1 a_2 b_3$ et $c_1 b_2 a_3$. Le premier $c_1 a_2 b_3$ de ces termes présentera deux inversions, l'une entre c et a, l'autre entre c et b; il sera affecté du signe +. Le second terme $c_1 b_2 a_3$ présentera trois inversions, l'une entre c et b, une autre entre c et a et la troisième entre b et a; il sera affecté du signe —.

9. Définition IV. — Chaque terme du déterminant de n^2 éléments est le produit de n de ces éléments, ou le produit de n facteurs; on dit, pour cela, que le déterminant est du $n^{\text{ième}}$ degré ou du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre contient autant de termes que l'on peut former de permutations avec les n indices $1, 2, 3, \ldots, n$ ou avec les n lettres $a, b, c, \ldots, l$. Le nombre des termes de ce déterminant est donc égal au produit $1.2.3\ldots n$.

10. Définition V. — Les termes d'un déterminant sont séparés en deux *classes :* la première classe ou la *classe paire* comprend les termes positifs; la seconde classe ou la *classe impaire* renferme les termes négatifs.

Dans un déterminant, le nombre des termes affectés du signe + est égal au nombre des termes affectés du signe —; car, si dans un terme positif on permute entre eux les deux derniers indices, on formera nécessairement un terme qui aura une inversion de plus ou de moins que le précédent; ce terme sera donc négatif.

11. Exemples. — 1° Pour avoir le *déterminant du second ordre,* composé des quatre éléments

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, \\ a_2, & b_2, \end{matrix}$$

dans le produit ab on donne aux deux lettres a et b les indices respectifs 1 et 2, puis 2 et 1, tels qu'ils se suivent dans les permutations 12 et 21 que l'on peut former avec les indices 1 et 2; on donne le signe + au premier résultat $a_1 b_2$ et le signe — au second $a_2 b_1$. On trouve ainsi $a_1 b_2 - a_2 b_1$ pour le déterminant demandé.

2° S'il s'agit de former le *déterminant du troisième ordre*, qui est composé des neuf éléments

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, \end{cases}$$

on écrit la lettre c affectée de l'indice 3 à la droite de chacun des deux termes $a_1 b_2$, $-a_2 b_1$ du déterminant du second ordre, ce qui fournit les deux produits $a_1 b_2 c_3$ et $-a_2 b_1 c_3$; puis on fait avancer l'indice 3 d'un rang dans chacun de ces produits, ainsi que dans les deux produits résultants, et l'on a soin de changer le signe du produit à chaque pas de l'indice 3. On obtient ainsi le déterminant demandé du troisième ordre

$$\text{(II)} \quad a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1.$$

12. **Remarque.** — Supposons que les neuf éléments disposés en carré (I), qui composent notre déterminant du troisième ordre (II), soient les coefficients respectifs qui multiplient les inconnues dans un système de trois équations du premier degré à trois inconnues x, y et z; ce système sera nécessairement le suivant :

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3, \end{cases}$$

où les termes connus k_1, k_2 et k_3 sont quelconques.

Il est aisé de voir que notre déterminant (II) est précisément le dénominateur commun des valeurs que fournissent pour les inconnues x, y et z les formules générales de *Cramer*. On sait que le géomètre génevois avait donné ces for-

mules, dès 1750, dans son *Introduction à l'Analyse des courbes algébriques*. Aussi la fonction (II) est-elle souvent appelée le *déterminant des premiers membres du système linéaire* (III).

13. Notation ordonnée de Cauchy. — On représente le déterminant de n^2 éléments, en plaçant entre deux traits verticaux, entre deux barres, le tableau carré de ces éléments.

Ainsi le déterminant défini ci-dessus (1, 2, 3 et 4), que nous désignerons toujours par la lettre grecque Δ, sera représenté par la notation

$$\text{(IV)} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}.$$

Cette notation offre de grands avantages dans l'écriture et la combinaison des formules. Elle a été employée, pour la première fois, par Cauchy dans son Mémoire *Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir* (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe Cahier, 1815, p. 52); elle a été suivie depuis par Jacobi dans tous ses écrits (*De formatione et proprietatibus determinantium*, 4, et *Journal de Crelle*, t. 15, p. 115 et suivantes).

D'après cette notation, on a (11)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\text{(V)} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_3 c_1 - a_3 b$$

14. Notation à double indice de Leibnitz. — Dans la suite, sauf avis contraire, nous représenterons toujours, comme ci-dessus (1), les éléments de chaque colonne verticale par la même lettre, et nous donnerons le même indice aux lettres d'une même ligne horizontale: l'indice marquera toujours le rang de la ligne.

Ce mode de représentation des éléments se prête avec avantage aux démonstrations élémentaires.

Cependant la notation ordonnée, qui est la plus usitée en Mathématiques supérieures, consiste à représenter tous les éléments par la même lettre, à laquelle on donne un double indice : le premier indice désigne toujours le rang de la ligne horizontale à laquelle appartient l'élément, tandis que le second indice marque le rang de la colonne verticale où se trouve l'élément.

Le déterminant du troisième ordre (13)

$$\text{(V)} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

s'écrira ainsi

$$\text{(VI)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Lorsque le déterminant est d'un ordre supérieur au neuvième, on a soin de séparer par une virgule les deux indices de chaque lettre.

La notation précédente est due à Leibnitz; elle se trouve indiquée dans ses *Œuvres mathématiques*, qui ont été publiées par Gerhardt, t. II, p. 239, et se lit dans la lettre que Leibnitz a écrite à L'Hospital, le 28 avril 1693.

15. Plusieurs auteurs, dans l'emploi de la notation de Leibnitz, placent en exposant l'*indice d'ordre* des colonnes. Ainsi, pour marquer la place d'un élément dans le tableau (IV) de Cauchy, ils affectent de deux indices *superposés* la lettre qui représente les éléments; l'un de ces indices est inférieur et l'autre supérieur. L'indice *inférieur* indique le rang de la *ligne* à laquelle appartient l'élément, tandis que l'indice *supérieur* désigne le *rang* de la colonne où se trouve l'élément.

Le déterminant (VI) du troisième ordre sera ainsi représenté par la notation générale

$$\text{(VII)} \qquad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix},$$

et le déterminant (IV) du $n^{\text{ième}}$ ordre s'écrira

$$\text{(VIII)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^n \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \dots & a_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Cette manière de représenter les éléments pourrait s'appeler *notation à indices superposés*, tandis que la précédente (14) pourrait se nommer *notation à indices consécutifs*.

16. Formation des termes du déterminant dont les éléments sont à indices superposés. — Le terme principal du déterminant (VIII) est encore le produit

$$a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_n^n,$$

ayant pour facteurs les éléments de la diagonale principale.

Ce terme sert toujours à former tous les autres termes du déterminant Δ.

Pour les obtenir en valeur absolue, on peut :

1° Supposer fixes les indices inférieurs et opérer toutes les permutations possibles entre les indices supérieurs ; ou encore,

2° Maintenir à leur place les indices supérieurs, et effectuer toutes les permutations possibles entre les indices inférieurs.

Quant au signe de chaque terme, on intervertit l'ordre des éléments dans ce terme, de manière que les indices inférieurs se suivent dans leur ordre numérique, et l'on donne au terme le signe + ou le signe —, suivant que les indices supérieurs présentent un nombre pair ou un nombre impair d'inversions.

On peut encore amener les indices supérieurs dans leur ordre naturel, en intervertissant l'ordre des facteurs, et évaluer le nombre des inversions que présentent les indices inférieurs.

17. Règle des signes pour les déterminants dont les éléments sont à indices superposés. — *Lorsque les deux séries d'indices se suivent d'une manière quelconque dans un terme, il faut donner à ce terme le signe + ou le signe —, suivant que la permutation des indices inférieurs et la permutation des indices supérieurs sont de même parité ou de parités différentes.*

Soit, en effet,

$$T = a_{u_1}^{v_1} a_{u_2}^{v_2} a_{u_3}^{v_3} \ldots a_{u_n}^{v_n}$$

la valeur absolue d'un quelconque des termes du déterminant (VIII), chacun des produits $v_1 v_2 v_3 \ldots v_n$, $u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$ constitue l'une des n permutations que l'on peut former avec les n premiers nombres entiers $1, 2, 3, \ldots, n$.

Dans ce terme, je permute entre eux les deux éléments

$$a_{u_p}^{v_p}, \quad a_{u_q}^{v_q},$$

et j'appelle T′ le produit résultant ; la permutation des indices inférieurs a changé de parité (4), ainsi que celle des indices supérieurs ; donc,

si les deux permutations des indices sont de même parité dans T, elles seront encore de même parité dans T'; et, si ces deux permutations sont de parités différentes dans T, elles seront aussi de parités différentes dans T'.

Il s'ensuit que, si l'on intervertit d'une manière quelconque l'ordre des facteurs dans T, la parité relative que présentent la permutation des indices inférieurs et celle des indices supérieurs n'est pas altérée.

Or, si l'on ramène les indices inférieurs dans leur ordre naturel, la permutation de ces indices devenant $1.2.3\ldots n$ sera paire; donc le terme T devra être affecté du signe + ou du signe —, suivant que la permutation résultante des indices supérieurs sera paire ou impaire. Il s'ensuit que le terme T sera positif ou négatif, suivant que les permutations des indices inférieurs et des indices supérieurs sont ou non de même parité.

17 *bis*. **Notation abrégée des déterminants.** — Afin d'abréger les écritures dans les démonstrations et de simplifier l'expression des formules, on représente souvent les déterminants par le terme principal mis entre parenthèses, et on laisse au lecteur le soin de rétablir les autres termes.

Ainsi les déterminants du 2ième, du 3ième, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre pourront être désignés par les notations succinctes

$$(a_1 b_2), \quad (a_1 b_2 c_3), \quad \ldots, \quad (a_1 b_2 c_3 \ldots l_n).$$

Cette notation a été suivie par M. Baltzer (1) et M. Salmon (2).

A cette notation on substitue fréquemment la suivante :

$$\Delta = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots l_n,$$

qui est usitée en Mathématiques supérieures.

§ II. — Transformation des déterminants.

18. **Théorème I.** — *Lorsque, dans un déterminant, on change les lignes en colonnes, et* vice versâ, *le déterminant ne change ni de valeur ni de signe.*

(1) Baltzer, *Théorie et application des déterminants*, p. 26; 1861.
(2) Salmon, *Leçons d'Algèbre supérieure*, p. 1; 1868.

Ainsi, si l'on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

Δ' sera identiquement égal à Δ.

En effet, considérons un terme quelconque du premier déterminant Δ, par exemple le terme

$$T = -a_3 b_1 c_4 d_2;$$

pour trouver le terme T' dont les éléments occupent dans Δ' les cases que les éléments de T occupent dans Δ, il suffit de remplacer dans T les lettres a, b, c et d par les lettres c, a, d et b, dont le rang dans l'alphabet est marqué par les indices 3, 1, 4 et 2, et de substituer aux indices 3, 1, 4 et 2 de T les indices 1, 2, 3 et 4 qui désignent le rang des lettres a, b, c et d dans l'alphabet. On trouve ainsi que la valeur absolue de T' est $c_1 a_2 d_3 b_4$ ou $a_2 b_4 c_1 d_3$, en ramenant les lettres dans leur ordre alphabétique. Le produit $a_2 b_4 c_1 d_3$ présentant trois inversions doit être affecté du signe $-$; on a donc

$$T' = -a_2 b_4 c_1 d_3.$$

Or il est évident que le terme T' est l'un des produits négatifs que l'on obtient par la permutation, dans le terme principal $a_1 b_2 c_3 d_4$, des indices 1, 2, 3, 4 de toutes les manières possibles; donc le terme T' se trouve dans Δ avec le signe $-$. On prouverait de la même manière que chaque terme de Δ' se trouve avec son signe dans Δ. Puisque les deux déterminants Δ' et Δ sont de même ordre, on en conclut que $\Delta = \Delta'$.

19. Dans l'emploi de la notation à indices superposés, les deux déterminants Δ et Δ' affectent les formes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \underline{a_1^2} & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & \underline{a_2^3} & a_2^4 \\ \underline{a_3^1} & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 & \underline{a_4^4} \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1^1 & \underline{a_2^1} & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \underline{a_3^2} & a_4^2 \\ \underline{a_1^3} & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & \underline{a_4^4} \end{vmatrix}.$$

Dans le déterminant Δ prenons un terme quelconque

$$T = -a_2^3 a_3^1 a_4^4 a_1^2,$$

composé des éléments soulignés. Dans le déterminant Δ', je souligne les éléments qui occupent les mêmes cases et j'en forme le terme

$$T' = -a_3^2 a_1^3 a_4^4 a_2^1.$$

Ces deux termes sont négatifs, parce que la permutation des indices inférieurs et celle des indices supérieurs y sont de parités différentes.

Le terme T' est contenu dans le premier déterminant Δ, car il est formé de quatre éléments appartenant à des lignes différentes; d'ailleurs il porte le signe que lui donne la règle du n° 17.

20. En général, changer dans (VIII) du n° 15 les lignes en colonnes et les colonnes en lignes, c'est permuter les indices supérieurs avec les indices inférieurs; par conséquent, les signes se maintiennent dans les nouveaux termes.

D'ailleurs chaque terme du nouveau déterminant se trouvera dans l'ancien, puisque les deux séries d'indices de ce terme seront deux des permutations que l'on peut former avec les n premiers nombres entiers $1, 2, 3, \ldots, n$.

21. **Théorème II.** — *Lorsque, dans un déterminant, on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant conserve sa valeur absolue, mais change de signe* (LAPLACE, *Histoire de l'Académie de Paris*, t. II, p. 297; VANDERMONDE, *ibid.*, p. 518).

Considérons les trois équations linéaires (III) à trois inconnues du n° 12; le déterminant des premiers membres en est

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Si nous permutons entre elles la première équation et la troisième, ce système prendra la disposition

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2,$$
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1,$$

et admettra pour les inconnues les mêmes valeurs que dans le

précédent. Par conséquent, le déterminant

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

de ce nouveau système, qui est du même degré que (1), a même valeur absolue que ce déterminant (1). Mais le terme principal $a_1 b_2 c_3$ de (1) est positif, tandis que le terme principal $a_3 b_2 c_1$ de (2), positif dans (2), présente trois inversions par rapport à $a_1 b_2 c_3$; il est donc négatif dans (1). Donc les deux déterminants (1) et (2) sont égaux et de signes contraires.

Démonstration générale. — Supposons que, dans le déterminant Δ (IV du n° 13), on permute entre elles les deux colonnes où se trouvent les éléments e et h, et désignons par Δ' le déterminant qui en résulte.

Soit

$$T = \pm A e_\alpha B h_\beta C$$

un quelconque des termes du déterminant donné Δ; si nous y permutons les deux indices α et β, nous obtiendrons aussi un terme T_1 du déterminant Δ; mais, dans les deux termes T et T_1, les permutations des indices sont de parités différentes (n° 4); donc ces deux termes sont affectés de signes contraires. On a par suite

$$T_1 = \mp A e_\beta B h_\alpha C.$$

Cela posé, dans Δ permutons entre elles les deux colonnes e et h; le terme T_1 deviendra

$$T' = \mp A h_\beta B e_\alpha C,$$

ou, en ramenant les lettres dans leur ordre alphabétique,

$$T' = \mp A e_\alpha B h_\beta C.$$

Or les deux termes T et T' sont visiblement égaux et de signes contraires; donc chaque terme T du déterminant Δ correspond à un terme égal et d'un signe contraire dans le déterminant Δ'; donc les deux déterminants Δ et Δ' sont égaux et de signes contraires, ou bien $\Delta = -\Delta'$.

Nous avons vu au n° 18 qu'un déterminant ne change pas lorsqu'on y change les lignes en colonnes et *vice versâ;* par conséquent, *tout déterminant change* aussi *de signe, lorsqu'on y permute entre elles deux lignes quelconques.*

22. Corollaire I. — *Lorsqu'on permute entre elles deux lignes, puis deux colonnes, le déterminant reprend son signe.*

En général, si, dans un déterminant, on fait p changements de deux lignes et q changements de deux colonnes, le déterminant sera multiplié par $(-1)^{p+q}$.

Il s'ensuit que, si l'on permute *circulairement* un certain nombre p de lignes ou de colonnes, le déterminant change ou non de signe, suivant que le nombre des lignes ou colonnes permutées circulairement est pair ou impair.

Car une permutation circulaire de p lignes équivaut à $p-1$ changements de deux colonnes, et a, par conséquent, pour effet de multiplier le déterminant par $(-1)^{p-1}$.

En particulier, si l'on permute circulairement les n lignes d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ degré, celui-ci change ou non de signe, suivant que n est pair ou impair.

23. Corollaire II. — *Un déterminant ne change pas si l'on permute les colonnes et les lignes de telle sorte que les éléments de la diagonale restent les mêmes, quel que soit d'ailleurs l'ordre de ces éléments.*

En effet, supposons qu'on veuille que les éléments de la diagonale soient par ordre

$$a_\alpha^\alpha,\quad a_\beta^\beta,\quad a_\gamma^\gamma,\quad \ldots,\quad a_\lambda^\lambda.$$

On amènera l'élément a_α^α à la première place, au moyen de $\alpha-1$ permutations de deux lignes et de $\alpha-1$ permutations de deux colonnes; ce qui produira $2(\alpha-1)$ changements de signe ou un nombre pair de changements de signe; par suite, le déterminant conserve son signe. On amènera de même l'élément a_β^β à la seconde place de la diagonale par un nombre pair de permutations de deux lignes et de deux colonnes, et ainsi des autres éléments; donc le déterminant conserve sa valeur et son signe.

23 *bis*. Corollaire III. — On peut amener au sommet du déterminant un élément a_α^β, en transportant au premier rang la ligne et la colonne qui se croisent à l'élément a_α^β et en multipliant le déterminant par $(-1)^{(\alpha-1)+(\beta-1)} = (-1)^{\alpha+\beta-2} = (-1)^{\alpha+\beta}$.

* **24. Définition.** — *Échanger les diagonales* d'un déterminant, c'est disposer les lignes ou les colonnes de manière que la seconde diagonale (celle qui, en descendant, va de droite à gauche) prenne la place de la première, et *vice versâ*.

Pour échanger les diagonales d'un déterminant, on peut permuter entre elles les lignes extrêmes, en même temps que toutes les lignes équidistantes des extrêmes.

On peut encore échanger entre elles les colonnes extrêmes, en même temps que toutes les colonnes équidistantes des extrêmes.

* **25. Théorème III.** — *Lorsqu'on échange les diagonales d'un déterminant de l'ordre n, le déterminant conserve sa valeur absolue; mais il change ou non de signe, suivant que le plus grand nombre pair contenu dans son degré n est simplement ou doublement pair.*

Car, si $2p$ est le plus grand nombre pair contenu dans n, on aura opéré p permutations de deux lignes ou de deux colonnes; le déterminant résultant sera par suite égal au déterminant donné multiplié par $(-1)^p$; ce dernier aura donc été multiplié par -1 ou $+1$, suivant que p est impair ou pair, c'est-à-dire suivant que $2p$ est simplement ou doublement pair.

Ainsi l'on a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \\ c' & b' & a' \\ c'' & b'' & a'' \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 \\ d_3 & c_3 & b_3 & a_3 \\ d_4 & c_4 & b_4 & a_4 \end{vmatrix}.$$

26. Théorème IV. — *Lorsque, dans un déterminant, deux lignes ou deux colonnes deviennent identiques, le déterminant se réduit à zéro.* (Vandermonde, *Histoire de l'Académie de Paris*, t. II, p. 552; 1772.)

En effet, si l'on permute entre elles deux lignes, par exemple, le déterminant Δ change de signe (21); mais, si les deux lignes sont identiques par leur permutation, la valeur du déterminant Δ ne sera pas altérée; celle-ci restera donc la même en changeant de signe, ce qui exige qu'elle soit égale à zéro.

Autrement, soit Δ le déterminant donné, et désignons par Δ' le nouveau déterminant que l'on obtient en permutant les deux lignes identiques; nous avons (21)

$$\Delta = -\Delta';$$

mais, les deux lignes étant identiques, le déterminant ne change pas et l'on a

$$\Delta = \Delta';$$

ajoutant membre à membre, on trouve

$$2\Delta = -\Delta' + \Delta' = 0.$$

Deuxième démonstration. — Considérons un terme $T = \pm A e_\alpha B g_\beta C$ du déterminant Δ, qui contient l'élément e_α de la ligne de rang α et l'élément g_β de la ligne de rang β, où α est plus petit que β. Ce déterminant contiendra aussi le terme $T_1 = \mp A e_\beta B g_\alpha C$, qui sera de signe contraire au précédent (13). Or, si les deux lignes de rang α et de rang β deviennent identiques, on aura $\alpha = \beta$, ce qui transformera nos deux termes dans les suivants :

$$T = \pm A e_\alpha B g_\alpha C \quad \text{et} \quad T_1 = \mp A e_\alpha B g_\alpha C;$$

par suite, il viendra $T = -T_1$. Il s'ensuit que les termes de Δ seront deux à deux égaux et de signes contraires; donc on aura $\Delta = 0$.

Ainsi l'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

27. Théorème V. — *Lorsqu'on multiplie ou que l'on divise tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par le même facteur, le déterminant est multiplié ou divisé par ce facteur.*

En effet, dans le déterminant donné, chaque terme contient toujours un élément d'une ligne ou d'une colonne et n'en contient qu'un seul (6); tous les termes sont ainsi multipliés ou divisés par ce facteur et ne le sont chacun qu'une fois; par suite, le déterminant est multiplié ou divisé par ce même facteur.

Donc on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & mb_1 & c_1 \\ a_2 & mb_2 & c_2 \\ a_3 & mb_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 : n & c_1 \\ a_2 & b_2 : n & c_2 \\ a_3 & b_3 : n & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{n} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

28. Corollaire I. — *Lorsque les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont divisibles par un même facteur, on peut supprimer ce facteur commun dans cette ligne ou cette colonne et l'écrire en coefficient hors barres.*

Ainsi l'on peut écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_1^2 \\ a_3 & b_3 & c_1^3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_1^2 \end{vmatrix}.$$

29. Simplification de certains déterminants. — La propriété que nous venons d'établir permet de donner à certains déterminants une forme plus avantageuse.

Ainsi, dans le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix},$$

multiplions les trois lignes respectivement par a, b, c; le déterminant sera multiplié par le produit $a.b.c = abc$, et il viendra

$$abc\Delta = \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix};$$

divisant actuellement la première colonne par abc, on divise le déterminant $abc\Delta$ par abc, et l'on obtient

$$\Delta \text{ ou } \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

On verrait de même que

$$\begin{vmatrix} bcd & a & a^2 & a^3 \\ cda & b & b^2 & b^3 \\ dab & c & c^2 & c^3 \\ abc & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}.$$

30. Corollaire II. — *Lorsque les éléments de deux lignes ou de deux colonnes ne diffèrent que par un facteur constant, le déterminant est nul.*

Car, d'après les nos 28 et 26, on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & c_1 \\ a_2 & ma_2 & c_2 \\ a_3 & ma_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = m \times 0 = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^4 \end{vmatrix} = \alpha \times 0 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \alpha^n \\ b & \alpha & \alpha^{n+1} \\ c & \alpha^2 & \alpha^{n+2} \end{vmatrix} = \alpha^n \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & \alpha & \alpha \\ c & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^n \times 0 = 0.$$

31. Corollaire III. — *Lorsque l'on change le signe de tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne, le déterminant change de signe.*

Car cela revient à multiplier le déterminant par -1 (27). Ainsi il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & -5 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Dans le premier déterminant on a changé les signes des éléments de la seconde ligne, et dans le second les signes des éléments de la troisième colonne.

32. Remarque. — *Lorsqu'un déterminant est égal à zéro, on peut donc multiplier ou diviser les lignes et les colonnes par des quantités constantes, positives ou négatives, sans altérer l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le déterminant donné.*

33. Au n° 29, nous avons transformé un déterminant en un autre équivalent de même ordre, dans lequel les éléments de la première colonne sont égaux à l'unité. Cette transformation est toujours possible. En général :

Théorème V. — *Tout déterminant est égal, à un facteur près, à un déterminant de même ordre, dans lequel les éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque sont égaux à l'unité.*

Considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

et supposons qu'il s'agisse d'y transformer la première ligne.

Multiplions chaque colonne par le produit des éléments de la première ligne qui appartiennent aux autres colonnes; en d'autres termes, multiplions les trois colonnes par les produits respectifs bc, ca et ab; le déterminant sera multiplié par le produit $bc.ca.ab = a^2b^2c^2$ (27); il vient par suite

$$a^2b^2c^2\Delta = \begin{vmatrix} abc & bca & cab \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix};$$

divisons maintenant la première ligne par le facteur commun abc; le déterminant sera divisé par abc (28), de sorte que l'on a

$$abc\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix};$$

donc on trouve que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a'bc & b'ca & c'ab \\ a''bc & b''ca & c''ab \end{vmatrix}.$$

34. Remarque I. — Il est aisé de voir que, si le déterminant est du $n^{\text{ième}}$ degré, le diviseur du nouveau déterminant sera $a^{n-1}b^{n-2}c^{n-2}\ldots l^{n-2}$.

35. Remarque II. — Si les éléments de la ligne ou de la colonne à transformer avaient des facteurs communs, on prendrait pour élément commun le plus petit commun multiple des éléments de cette ligne ou de cette colonne.

Ainsi l'on aurait

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 & 5 \\ 8 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3.4.2.12} \begin{vmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 \\ 6 & 28 & 10 & 36 \\ 18 & 4 & 16 & 60 \\ 24 & 20 & 4 & 24 \end{vmatrix} = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 28 & 10 & 36 \\ 18 & 4 & 16 & 60 \\ 24 & 20 & 4 & 24 \end{vmatrix}.$$

Le plus petit commun multiple des éléments de la première ligne étant 12, on a multiplié les quatre colonnes par 3, 4, 2 et 12.

Le dernier déterminant peut encore être simplifié : il suffit d'y diviser les trois dernières lignes chacune par 2 et de multiplier hors barres par le produit $2.2.2 = 2^3$; on trouve qu'il se réduit à

$$\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 14 & 5 & 18 \\ 9 & 2 & 8 & 15 \\ 12 & 10 & 2 & 12 \end{vmatrix}.$$

36. Le théorème précédent et la remarque II ont une grande importance; on en fait presque toujours usage dans l'évaluation des déterminants tant numériques qu'algébriques.

§ III. — Les déterminants mineurs.

37. Définition I. — On appelle *déterminant mineur* d'un déterminant donné celui que forment les éléments conservés, lorsqu'on supprime, dans ce déterminant donné, un certain nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

38. Définition II. — Les déterminants mineurs, que l'on obtient par la suppression d'une ligne et d'une colonne, sont dits *du premier ordre;* ceux que donne l'omission de deux lignes et de deux colonnes sont appelés *du second ordre;* et ainsi de suite.

39. Un déterminant du $n^{\text{ième}}$ degré a n^2 déterminants mineurs du premier ordre; $\frac{n^2(n-1)^2}{1.4}$ déterminants mineurs du deuxième ordre, etc.

40. Notation. — Nous désignerons par Δ_{e_i} le déterminant mineur du premier ordre qui est relatif à l'élément e_i, c'est-à-dire le déterminant mineur que l'on obtient en supprimant, dans le déterminant Δ, la ligne de rang i et la colonne qui contient les éléments représentés par la lettre e.

41. Propriété essentielle des déterminants. — Chaque terme d'un déterminant contient toujours un élément d'une ligne et d'une colonne et n'en contient qu'un seul (6). Par conséquent :

Le déterminant Δ est une fonction linéaire et homogène des éléments d'une même ligne et d'une même colonne.

42. Développement d'un déterminant suivant les éléments de la première colonne. — Considérons le déterminant du quatrième ordre

$$\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

et proposons-nous de le développer suivant les éléments a_1, a_2, a_3 et a_4 de la première colonne.

Dans ce déterminant, un certain nombre de termes contiennent l'élément a_1 et ne le contiennent qu'une fois (41); soit P_1 l'ensemble de ces termes et dans le polynôme P_1 mettons le facteur commun a_1 en évidence. Si nous appelons A_1 le quotient de P_1 par a_1, nous aurons $P_1 = A_1 a_1$ et le quotient A_1 ne contiendra aucun des autres éléments a_2, a_3, a_4 de la première colonne.

Si nous représentons de même par A_2, A_3 et A_4 les coefficients des trois autres éléments a_2, a_3 et a_4 de la première colonne, nous aurons

$$\Delta^{(4)} = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4 a_4.$$

Il s'agit de déterminer les expressions des coefficients A_1, A_2, A_3 et A_4. Or je dis que le coefficient A_1 est précisément le déterminant mineur

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

que l'on obtient en supprimant dans le déterminant $\Delta^{(4)}$ la ligne a_1, b_1, c_1, d_1 et la colonne a_1, a_2, a_3, a_4 qui contiennent l'élément a_1.

En effet, tout terme du déterminant Δ_{a_1}, étant multiplié par a_1, fournira un produit qui se trouvera dans le déterminant $\Delta^{(4)}$; de plus, ce produit s'y trouvera avec le signe qu'il a dans le déterminant $\Delta^{(4)}$, puisque, en plaçant l'élément a_1 devant ce terme de Δ_{a_1}, on n'y introduit aucune inversion.

Nous avons donc $A_1 = \Delta_{a_1}$.

Nous obtiendrons la valeur du coefficient A_2 de l'élément a_2, en amenant cet élément a_2 à la première place par la permutation des deux premières lignes. Cette permutation donne

$$-\Delta^{(4)} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

et ici le coefficient de a_2 dans le second membre sera

$$\Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix};$$

on a donc

$$A_2 = -\Delta_{a_3}.$$

On verrait de même que

$$A_3 = +\Delta_{a_3} \quad \text{et} \quad A_4 = -\Delta_{a_4};$$

donc nous avons

$$\Delta^{(4)} = a_1 \Delta_{a_1} - a_2 \Delta_{a_2} + a_3 \Delta_{a_3} - a_4 \Delta_{a_4}.$$

L'inspection de ce développement nous fait voir que :

Théorème I. — *Le coefficient d'un élément quelconque de la première colonne est égal au déterminant mineur que l'on obtient en supprimant dans le déterminant donné la ligne et la colonne qui contiennent cet élément. Le déterminant mineur devra être affecté du signe + ou du signe —, suivant que l'élément est de rang impair ou de rang pair.*

Démonstration générale de ce théorème. — Supposons que le déterminant Δ (IV) du n° 13 soit développé.

Nous pouvons grouper ensemble les termes qui contiennent l'élément a_1 de la première colonne et y mettre cet élément en facteur commun. nous pouvons de même mettre en évidence l'élément a_2 dans l'ensemble des termes qui le contiennent; puis en faire autant pour les autres éléments de la première colonne.

Si nous désignons par $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ les coefficients respectifs de ces éléments $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, ces coefficients ne contiendront aucun des éléments de la première colonne, et nous aurons

$$(1) \qquad \Delta = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots + A_n a_n.$$

Puisque $\Delta = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$, il est évident que cette formule donnera la partie $A_1 a_1$ du second membre précédent, si l'on suppose que l'élément a_1 reste invariable dans le terme principal $a_1 b_2 c_3 \ldots l_n$ et que l'on n'y fasse porter les permutations que sur les indices 2, 3, ..., n des autres lettres $b, c, \ldots, l$: car aucun des produits résultants ne contiendra aucun des éléments $a_1, a_3, \ldots, a_n$. On a dans ce cas

$$A_1 a_1 = a_1 \Sigma \pm b_2 c_3 \ldots l_n,$$

d'où l'on tire

$$A_1 = \Sigma \pm b_2 c_3 \ldots l_n = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & \ldots & l_2 \\ b_3 & c_3 & \ldots & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix}$$

ou bien

$$A_1 = \Delta_{a_1}.$$

Dans le déterminant Δ permutons entre elles les deux premières lignes, ce qui revient à permuter entre eux les deux indices 1 et 2 : le déterminant Δ change de signe, et notre formule devient

$$(2) \qquad \Delta = -\Sigma \pm a_2 b_1 c_3 \ldots l_n;$$

celle-ci donnera la partie $A_2 a_2$, si l'on y suppose a_2 constant et que l'on ne fasse porter les permutations que sur les indices 1, 3, ..., n des lettres b, c, ..., l. On trouve ainsi que

$$A_2 a_2 = -a_2 \Sigma \pm b_1 c_3 \ldots l_n;$$

d'où l'on tire

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ b_3 & c_3 & \ldots & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & c_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = -\Delta_{a_2}.$$

Dans la formule (2), transposons les indices 2 et 3; le second nombre change de signe et la formule devient

$$\Delta = \Sigma \pm a_3 b_1 c_2 d_4 \ldots l_n;$$

celle-ci donnera la partie $A_3 a_3$ de (1), si l'on suppose que l'élément a_3 reste invariable et que l'on ne fasse porter les permutations que sur les indices 1, 2, 4, ..., n des autres lettres b, c, d, ..., l. On a donc

$$A_3 a_3 = a_3 \Sigma \pm b_1 c_2 d_4 \ldots l_n;$$

d'où l'on tire

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & \ldots & l_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & \ldots & l_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 & \ldots & l_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & c_n & d_n & \ldots & l_n \end{vmatrix} = \Delta_{a_3}.$$

En continuant de la sorte, on trouve en général que

$$A_i = (-1)^{i-1} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i+1} & c_{i+1} & \dots & l_{i+1} \\ b_{i-1} & c_{i-1} & \dots & l_{i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix} - (-1)^{i-1}\Delta_{a_i}.$$

Substituons les valeurs de tous ces coefficients dans l'égalité (1), nous obtenons pour le déterminant Δ l'expression

$$\Delta = a_1\Delta_{a_1} - a_2\Delta_{a_2} + a_3\Delta_{a_3} - \dots + (-1)^{n-1}a_n\Delta_{a_n}.$$

43. Corollaire. — Puisque, dans un déterminant, on peut changer les lignes en colonnes et *vice versâ*, il s'ensuit que *le coefficient d'un élément de la première ligne se détermine de la même manière que le coefficient d'un élément de la première colonne.* Ainsi l'on a

$$\Delta^{(4)} = a_1\Delta_{a_1} - b_1\Delta_{b_1} + c_1\Delta_{c_1} - d_1\Delta_{d_1}.$$

44. Calcul du coefficient d'un élément quelconque du déterminant. — Proposons-nous de calculer le coefficient D_3 de l'élément d_3 qui, dans le déterminant du quatrième ordre (**42**), se trouve à l'intersection de la troisième ligne et de la quatrième colonne.

Nous pouvons amener la troisième ligne au premier rang, en la faisant permuter d'abord avec la seconde ligne, puis avec la première; nous effectuons ainsi 2 ou $3-1$ permutations de deux lignes consécutives, et produisons par suite $3-1$ changements de signe dans le déterminant $\Delta^{(4)}$ (**42**). De même, dans le nouveau déterminant $\Delta'^{(4)}$, nous amènerons la quatrième colonne au premier rang par $4-1$ permutations de deux colonnes consécutives, ce qui produira aussi $4-1$ changements de signe dans $\Delta'^{(4)}$.

L'élément d_3 se trouve donc amené à la première place par $(3-1)+(4-1)$ ou $3+4-2$ ou, ce qui revient au même, par $3+4$ changements de signe; donc le coefficient D_3 de d_3

est égal au déterminant mineur qui lui correspond, multiplié par $(-1)^{3+4}$; il est égal à $-\Delta_{d_3}^{(4)}$.

Nous en concluons en général que :

Théorème II. — *Le coefficient de l'élément qui occupe la $\alpha^{\text{ième}}$ place dans la $\beta^{\text{ième}}$ colonne est égal au produit de $(-1)^{\alpha+\beta}$ par le déterminant mineur que l'on obtient en supprimant la ligne de rang α et la colonne de rang β.*

45. Démonstration directe de ce théorème. — Soit en effet e_α l'élément qui se trouve à l'intersection de la ligne de rang α et de la colonne de rang β.

On amènera la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne au premier rang, en la permutant d'abord avec la ligne qui la précède immédiatement, puis avec la ligne qui la précède encore d'un rang, ..., enfin avec la première ligne; on aura ainsi effectué $\alpha - 1$ permutations de deux lignes consécutives, ce qui aura produit $\alpha - 1$ changements de signe dans le déterminant Δ, de sorte que ce déterminant Δ est égal au nouveau déterminant Δ' multiplié par $(-1)^{\alpha-1}$, c'est-à-dire que

$$\Delta = (-1)^{\alpha-1}\Delta' = (-1)^{\alpha-1}\left[a_\alpha\Delta_{a_\alpha} - b_\alpha\Delta_{b_\alpha} + c_\alpha\Delta_{c_\alpha} - \ldots + (-1)^{n-1}l_\alpha\Delta_{l_\alpha}\right].$$

Dans le déterminant Δ' nous pouvons aussi amener la $\beta^{\text{ième}}$ colonne au premier rang par $\beta - 1$ permutations de deux colonnes consécutives, ce qui produit encore $\beta - 1$ changements de signe. Le déterminant Δ'' qui en résulte sera par suite égal au déterminant Δ' multiplié par $(-1)^{\beta-1}$.

Dans le déterminant Δ'' l'élément e_α occupe la première place.

Mais, puisque $\Delta = (-1)^{\alpha-1}\Delta'$ et $\Delta' = (-1)^{\beta-1}\Delta''$, il vient

$$\Delta = (-1)^{\alpha-1}(-1)^{\beta-1}\Delta'' = (-1)^{\alpha+\beta-2}\Delta'',$$

ou

$$\Delta = (-1)^{\alpha+\beta}\Delta''.$$

Donc le coefficient de e_α est égal à

$$(-1)^{\alpha+\beta}\Delta_{e_\alpha}.$$

46. Règle pratique pour déterminer le signe du coefficient d'un élément. — On peut se dispenser de calculer le signe de la puissance $(-1)^{\alpha+\beta}$, en procédant de la manière suivante :

Partant du premier élément principal $\Delta^{(4)}$ du n° 42, on chemine sur la première ligne jusqu'à la colonne de d_3, et, en

commençant par le signe +, on change le signe en passant de chaque colonne à la suivante. On dira ainsi + sur a_1, — sur b_1, + sur c_1, — sur d_1; puis, partant de ce dernier signe, on descend vers d_3, en changeant le signe au passage de chaque ligne à la suivante, en disant + sur d_2, — sur d_3. Le coefficient de d_3 devra donc être pris avec le signe —.

On serait arrivé au même résultat en descendant d'abord sur la première colonne jusqu'à la ligne qui contient d_3, puis en cheminant sur cette ligne jusqu'à l'élément d_3.

47. Théorème III. — *Lorsqu'on multiplie les éléments d'une ligne ou d'une colonne par les déterminants mineurs, pris alternativement avec le signe + et le signe —, qui sont relatifs aux éléments correspondants d'une autre ligne ou colonne, la somme algébrique des produits obtenus est égale à zéro.*

En effet, supposons que, dans le déterminant du quatrième ordre $\Delta^{(4)}$ du n° 42, nous remplacions la quatrième colonne des d par la deuxième des b, le nouveau déterminant aura deux colonnes identiques et sera égal à zéro (26).

Or, si l'on ordonne $\Delta^{(4)}$ par rapport aux éléments de la quatrième colonne, on aura

$$\Delta^{(4)} = -d_1 D_1 + d_2 D_2 - d_3 D_3 + d_4 D_4,$$

et, comme la substitution des b aux d change ce développement en

$$-b_1 D_1 + b_2 D_2 - b_3 D_3 + b_4 D_4,$$

on voit que

$$b_1 D_1 - b_2 D_2 + b_3 D_3 - b_4 D_4 = 0$$

ou

$$b_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} b_2 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - b_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette identité est immédiatement évidente pour le déterminant du troisième ordre (V) du n° 13; car, si nous y mul-

iplions les éléments de la première colonne par les déterminants mineurs relatifs aux éléments de la troisième colonne, pris alternativement avec le signe + et avec le signe —, nous obtenons l'expression

$$a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - a_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

qui s'annule d'elle-même.

Nous trouverons une application de ce théorème dans la résolution des systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues (**121**).

48. En général, considérons le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre Δ du n° 1, et développons-le suivant les éléments de la ligne de rang α; nous avons (45)

$$\Delta = (-1)^{\alpha-1}[a_\alpha \Delta_{a_\alpha} - b_\alpha \Delta_{b_\alpha} + c_\alpha \Delta_{c_\alpha} - \ldots + (-1)^{n-1} l_\alpha \Delta_{l_\alpha}].$$

Dans ce développement, remplaçons les éléments en évidence a_α, b_α, c_α, ..., l_α de la ligne de rang α par les éléments correspondants a_β, b_β, c_β, ..., l_β de la ligne de rang β; les deux lignes de rangs α et β deviendront identiques dans Δ; par suite, ce déterminant s'annulera; donc la valeur

$$a_\beta \Delta_{a_\alpha} - b_\beta \Delta_{b_\alpha} + c_\beta \Delta_{c_\alpha} - \ldots + (-1)^{n-1} l_\beta \Delta_{l_\alpha}$$

que prendra son développement devra aussi se réduire à zéro.

§ IV. — Développement des déterminants.

49. **Définition.** — *Développer un déterminant,* c'est former la suite des termes composant le polynôme qui est égal au déterminant.

50. **Méthode pour développer les déterminants.** — Pour développer un déterminant, le moyen le plus simple qui se présente à l'esprit consiste à ordonner ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne (**42**).

Les coefficients de ces éléments sont eux-mêmes des dé-

terminants; on peut aussi les ordonner chacun par rapport aux éléments de leurs premières colonnes.

En continuant de la sorte, on finira par arriver à des coefficients qui sont des déterminants du second ordre. Ces déterminants, étant des binômes, se développent immédiatement.

Il suffira ensuite d'effectuer les multiplications indiquées, pour avoir le déterminant développé en polynôme.

Ainsi l'on a (42)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

En appliquant la même règle au déterminant du quatrième degré du n° 42, on trouve qu'il peut s'écrire

$$a_1\Delta_{a_1} - a_2\Delta_{a_2} + a_3\Delta_{a_3} - a_4\Delta_{a_4},$$

où

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{cases} b_2c_3d_4 + b_3c_4d_2 + b_4c_2d_3 \\ - b_2c_4d_3 - b_3c_2d_4 - b_4c_3d_2, \end{cases}$$

$$\Delta_{a_2} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{cases} b_1c_3d_4 + b_3c_4d_1 + b_4c_1d_3 \\ - b_1c_4d_3 - b_3c_1d_4 - b_4c_3d_1, \end{cases}$$

$$\Delta_{a_3} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{cases} b_1c_2d_4 + b_2c_4d_1 + b_4c_1d_2 \\ - b_1c_4d_2 - b_2c_1d_4 - b_4c_2d_1, \end{cases}$$

$$\Delta_{a_4} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} b_1c_2d_3 + b_2c_3d_1 + b_3c_1d_2 \\ - b_1c_3d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1. \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 + a_1 b_3 c_4 d_2 - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_4 c_2 d_3 \\ &- a_1 b_4 c_3 d_2 - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_1 c_4 d_3 - a_2 b_3 c_4 d_1 + a_2 b_3 c_1 d_4 \\ &- a_2 b_4 c_1 d_3 + a_2 b_4 c_3 d_1 + a_3 b_1 c_2 d_4 - a_3 b_1 c_4 d_3 + a_3 b_2 c_4 d_1 \\ &- a_3 b_2 c_1 d_4 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_3 b_4 c_2 d_1 - a_4 b_1 c_2 d_3 + a_4 b_1 c_3 d_4 \\ &- a_4 b_2 c_3 d_1 + a_4 b_2 c_1 d_3 - a_4 b_3 c_1 d_2 + a_4 b_3 c_2 d_1. \end{aligned}$$

51. Comme exercice, nous appliquerons la méthode précédente aux exemples ci-dessous :

I. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 1(15-16) - 2(10-12) + 3(8-9)$$
$$= -1 + 4 - 3 = 0.$$

II. $$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 4.23 - 3.52 + 8.53 = 92 - 156 + 424 = 360.$$

III. $$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$
$$= x'y'' - y'x'' + x''y - y''x + xy' - yx'.$$

IV. $$\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & -b \\ -c & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & -b \\ 1 & c \end{vmatrix}$$
$$= 1 + c^2 + a(a - bc) + b(ac + b)$$
$$= 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$

V. $$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

VI. $$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ -a & 1 & c' & -b' \\ -b & -c' & 1 & a' \\ -c & b' & -a' & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + (aa' + bb' + cc')^2.$$

VII. $$\begin{vmatrix} \omega & \lambda & \mu & \nu \\ -\lambda & \omega & \nu' & -\mu' \\ -\mu & -\nu' & \omega & \lambda' \\ -\nu & \mu' & -\lambda' & \omega \end{vmatrix}$$
$$= (\omega^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 + \theta^2)\,\omega^2,$$

où $\omega\theta = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'$.

VIII. $$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 8abcd \\ \quad - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 \\ \quad - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2. \end{array} \right.$$

IX. $$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & a' & b' & c' \\ 1 & a'' & b'' & c'' \\ 1 & a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = - \left\{ \begin{array}{l} ab'c'' - ac'b'' + a'b''c - a'c''b \\ + a''bc' - a''cb' + a'b''c''' - a'c''b''' \\ + a''b'''c' - a'''c'''b' + a'''b'c''' - a'''c'b''' \\ + a''b'''c - a''c'''b + a'''bc''' - a'''cb''' \\ + ab''c''' - ac''b''' + a'''bc' - a'''cb' \\ + ab'c''' - ac'b''' + a'b'''c - a'c'''b. \end{array} \right.$$

X. $$\begin{vmatrix} 1 & c & c' & c'' \\ c & a & b'' & b' \\ c' & b'' & a' & b \\ c'' & b' & b & a'' \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2 \\ \quad + c^2(b^2 - a'a'') + c'^2(b'^2 - a''a) \\ \quad + c''^2(b''^2 - aa') + 2c'c''(ab - b'b'') \\ \quad + 2c''c(a'b' - b''b) + 2cc'(a''b'' - bb'). \end{array} \right.$$

52. Règle de Sarrus pour développer les déterminants du troisième degré. — Le savant et modeste professeur de la

Faculté de Strasbourg a imaginé un moyen pratique d'écrire immédiatement le développement des déterminants du troisième ordre. Son procédé, fort simple, se trouve exposé dans les *Éléments d'Algèbre* de FINCK, 2e édition, 1846, n° 52, p. 95. Nous le ferons comprendre, en l'appliquant au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Sous les trois lignes de ce déterminant, on répète d'abord la première, puis la seconde ligne; on obtient ainsi le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}$$

On forme ensuite les six produits des éléments disposés trois par trois en diagonale, en prenant avec leurs signes les trois produits dont les diagonales vont, en descendant, de gauche à droite, et avec un signe contraire les trois produits dont les diagonales vont, en descendant, de droite à gauche. On trouve ainsi le polynôme

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2,$$

qui n'est autre que le développement

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

du déterminant proposé.

53. Par ce moyen, on verra que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = \beta\gamma^2 + \alpha\beta^2 + \gamma\alpha^2 - \beta\alpha^2 - \gamma\beta^2 - \alpha\gamma^2$$
$$= \beta\gamma(\gamma - \beta) + \gamma\alpha(\alpha - \gamma) + \alpha\beta(\beta - \alpha)$$
$$= (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha).$$

54. L'application de la même règle donne encore

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2^2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = 2a^2, \quad \begin{vmatrix} -a & a & a \\ a & -a & a \\ a & a & -a \end{vmatrix} = 2^2 a^2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 1 & \cos c \\ b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2 - 2ab\cos c),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = (x'y'' - y'x'') + (x''y - y''x) + (xy' - yx').$$

55. Décomposition d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre en une somme de produits, formés chacun d'un déterminant du $p^{\text{ième}}$ ordre et d'un déterminant du $(n-p)^{\text{ième}}$ ordre. — Au lieu de développer un déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne, on peut, d'après Laplace [1], le développer suivant les déterminants mineurs compris dans p lignes ou p colonnes quelconques.

Pour fixer les idées par un exemple, considérons le déterminant du quatrième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

et proposons-nous de le développer suivant les déterminants mineurs compris dans les deux premières colonnes.

On prendra chacun des déterminants formés par deux lignes quelconques de ces deux colonnes, et on le multipliera par

---

[1] LAPLACE, *Histoire de l'Académie de Paris*, t. II, p. 294.

le déterminant que forment les autres lignes et colonnes. On donnera à chaque produit le signe + ou le signe —, suivant que les éléments de chacun des facteurs sont séparés par un nombre pair ou un nombre impair de lignes.

Ainsi l'on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

ce qu'il est aisé de vérifier.

CHAPITRE II.

COMBINAISON ET PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS SATISFAISANT A CERTAINES CONDITIONS.

§ I. Addition et soustraction des déterminants. — § II. Propriétés des déterminants ayant un ou plusieurs éléments égaux à zéro. — § III. Calcul abrégé des déterminants numériques et algébriques.

§ I. — Addition et soustraction des déterminants.

56. Théorème I. — *Dans un déterminant, lorsque les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont chacun la somme de deux éléments, le déterminant peut se décomposer en une somme de deux déterminants.*

En effet, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

étant ordonné suivant les éléments de la première colonne, peut s'écrire (42)

$$\Delta = (a_1 + \alpha_1)(b_2 c_3) - (a_2 + \alpha_2)(b_1 c_3) + (a_3 + \alpha_3)(b_1 c_2);$$

or le second membre peut se décomposer dans les deux parties

$$a_1(b_2 c_3) - a_2(b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2)$$

et

$$\alpha_1(b_2 c_3) - \alpha_2(b_1 c_3) + \alpha_3(b_1 c_2),$$

qui sont respectivement égales aux deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

donc on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

La décomposition se ferait d'une manière analogue, si les éléments de toute autre colonne que la première, ou si ceux d'une ligne quelconque étaient chacun la somme de deux éléments.

Si les éléments d'une ligne ou d'une colonne étaient chacun la différence de deux éléments, le déterminant pourrait se décomposer en une différence de deux déterminants.

57. On verrait de même que

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1-\alpha'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2-\alpha'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3-\alpha'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha'_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha'_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

et que.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1-\beta_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2-\beta_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3-\beta_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

58. **Théorème II.** — *Réciproquement, lorsque deux déterminants ne diffèrent que par une ligne ou par une colonne,*

ces deux déterminants peuvent se composer en un seul déterminant.

Considérons les deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

qui ne diffèrent que par leurs premières lignes; on peut les ordonner suivant les éléments de ces premières lignes (42) et les écrire

$$\Delta = a_1(b_2c_3) - b_1(a_2c_3) + c_1(a_2b_3),$$
$$\Delta' = \alpha_1(b_2c_3) - \beta_1(a_2c_3) + \gamma_1(a_2b_3).$$

Ajoutant ces deux expressions dans le sens vertical, on obtient

$$\Delta + \Delta' = (a_1 + \alpha_1)(b_2c_3) - (b_1 + \beta_1)(a_2c_3) + (c_1 + \gamma_1)(a_2b_3),$$

ou le déterminant

$$\Delta + \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 + \alpha_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 + \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

ce dernier est donc égal à la somme des deux déterminants proposés.

La différence des deux déterminants donnés Δ et Δ' serait de même

$$\Delta - \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 - \alpha_1 & b_1 - \beta_1 & c_1 - \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît, à l'aide de ce principe, que les deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & b \\ o & a' & b' \\ o & a'' & b'' \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} o & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix}$$

sont égaux et de signes contraires; car on a, en ajoutant les

premières colonnes,

$$\Delta + \Delta' = \begin{vmatrix} a & a & b \\ a' & a' & b' \\ a'' & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire $\Delta = -\Delta'$.

De même les deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & a_4 \end{vmatrix}$$

sont égaux et de même signe; car, puisque

$$\Delta' = -\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix},$$

il vient

$$\Delta - \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on tire $\Delta = \Delta'$.

59. **Théorème III.** — *Lorsque les éléments d'une ligne ou d'une colonne sont égaux à la somme des éléments correspondants de deux ou de plusieurs lignes ou colonnes, multipliées respectivement par des facteurs constants, le déterminant se réduit à zéro.*

En effet, on a, par exemple (56),

$$\begin{vmatrix} ma_1 + nb_1 & a_1 & b_1 \\ ma_2 + nb_2 & a_2 & b_2 \\ ma_3 + nb_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & a_1 & b_1 \\ ma_2 & a_2 & b_2 \\ ma_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nb_1 & a_1 & b_1 \\ nb_2 & a_2 & b_2 \\ nb_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

or on sait que (26)

$$\begin{vmatrix} ma_1 & a_1 & b_1 \\ ma_2 & a_2 & b_2 \\ ma_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = m \times 0 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} nb_1 & a_1 & b_1 \\ nb_2 & a_2 & b_2 \\ nb_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = n \times 0 = 0;$$

donc le déterminant proposé, qui est la somme de ces deux déterminants, se réduit à zéro.

60. Théorème IV. — *Un déterminant ne change pas, lorsqu'on ajoute à chaque élément d'une ligne ou d'une colonne ceux de plusieurs autres lignes ou colonnes, multipliées respectivement par des facteurs constants.* (Jacobi, *Journal de Crelle*, t. 22, p. 371.)

Car les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 + mb_1 + nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + mb_2 + nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + mb_3 + nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

ayant pour différence le déterminant (56)

$$\begin{vmatrix} mb_1 + nc_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 + nc_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 + nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

qui est nul en vertu du théorème précédent, sont égaux entre eux.

Si les éléments de la colonne ou de la ligne que l'on remplace avaient été multipliés par un facteur k avant leur augmentation, le déterminant eût été multiplié par k (27).

61. Corollaire I. — D'après cela, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0;$$

car nous pouvons ajouter la seconde colonne à la troisième, puis diviser celle-ci par $a+b+c$: nous trouvons ainsi que (59 et 27)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \times 0 = 0.$$

62. **Corollaire II.** — L'égalité précédente nous permet de mettre en évidence un facteur du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

En effet, nous avons trouvé au n° 29 que

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Si nous ajoutons au second membre le déterminant du n° 61, qui est nul, après avoir multiplié les trois lignes respectivement par a, b, c, nous obtiendrons l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & ab+ca \\ b & b^2 & bc+ab \\ c & c^2 & ca+bc \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ab+ca & a & a^2 \\ bc+ab & b & b^2 \\ ca+bc & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} bc+ca+ab & a & a^2 \\ bc+ca+ab & b & b^2 \\ bc+ca+ab & c & c^2 \end{vmatrix};$$

nous en tirons l'égalité

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (bc + ca + ab) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

§ II. — Propriétés des déterminants ayant un ou plusieurs éléments égaux a zéro.

63. Dans l'évaluation des déterminants, on rencontre des exemples dans lesquels un ou plusieurs éléments sont égaux à zéro. Cette particularité permet de simplifier leur développement et d'en calculer la valeur avec plus de rapidité. On s'appuie dans ce but sur les principes suivants.

64. Théorème I. — *Lorsque, dans un déterminant, tous les éléments, moins un, d'une ligne ou d'une colonne viennent à s'annuler, le déterminant se réduit au produit de l'élément conservé, pris avec le signe convenable* (**44**), *par le déterminant mineur, que l'on obtient en supprimant la ligne et la colonne qui contiennent cet élément.*

En effet, nous avons trouvé au n° **42** que le déterminant $\Delta^{(4)}$ du quatrième ordre, étant ordonné par rapport aux éléments de la première colonne, peut s'écrire

$$\Delta^{(4)} = a_1 \Delta_{a_1} - a_2 \Delta_{a_2} + a_3 \Delta_{a_3} - a_4 \Delta_{a_4};$$

si les éléments de la première colonne se réduisent à zéro, sauf l'élément a_1, on aura $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ et $a_4 = 0$; il viendra donc

$$\Delta^{(4)} = a_1 \Delta_{a_1}.$$

Si l'élément, qui est seul différent de zéro dans une colonne ou dans une ligne dont tous les autres éléments sont nuls, n'est pas le premier élément du déterminant, on peut le ramener à la première place par des permutations successives de deux lignes et de deux colonnes (**21**).

Ainsi l'on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_3 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \end{vmatrix} = - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

On peut encore déterminer le signe du coefficient de l'élément conservé, en faisant usage de la règle pratique, qui se trouve exposée au n° 46.

Le théorème précédent est de la plus haute importance dans le calcul des déterminants; il est d'une application constante. Il a été énoncé et démontré pour la première fois par Jacobi, dans le *Journal de Crelle*, t. 22, n° 11.

65. Exemples :

I. $$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

II. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = - d_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

III. $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \lambda \\ 0 & a & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & b & \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda & \lambda \\ \lambda & b & \lambda \\ \lambda & \lambda & c \end{vmatrix} = abc - (a+b+c)\lambda^2 + 2\lambda^3.$$

66. **Théorème II.** — *Lorsque, dans un déterminant, les éléments de la première ligne sont égaux à l'unité, et que chaque élément de toute autre ligne est égal à la somme des éléments qui, dans la ligne précédente, sont au-dessus et à gauche de cet élément, ce déterminant est égal à l'unité.*

Dans le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix},$$

qui satisfait à ces conditions, retranchons chaque ligne de la suivante, et faisons de même pour chacun des déterminants qui en résultent; nous obtiendrons successivement

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

d'où

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

67. Théorème III. — *Tout déterminant peut être mis sous la forme d'un déterminant plus élevé.*

Car, en vertu du théorème précédent, on a évidemment

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & y_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & y_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & u_1 & v_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & u_2 & v_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Les éléments x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3, v_4, qui ne se trouvaient pas dans le déterminant primitif, peuvent recevoir des valeurs quelconques.

68. Théorème IV. — *Lorsque tous les éléments situés d'un même côté de la diagonale s'évanouissent, le déterminant se réduit à son terme principal.*

Considérons, par exemple, le déterminant du quatrième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Tous les éléments, moins un, étant nuls dans la première colonne, on a (64)

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \Delta_{a_1}.$$

Dans le déterminant Δ_{a_1}, tous les éléments, moins un, de la première colonne étant aussi égaux à zéro, il vient de même

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \end{vmatrix} = b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ 0 & d_4 \end{vmatrix};$$

mais

$$\begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ 0 & d_4 \end{vmatrix} = c_3 d_4;$$

par suite, on obtient $\Delta_{a_1} = b_2 c_3 d_4$; donc on a

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

* 69. **Théorème V.** — *Lorsque, dans un déterminant, les éléments de la première ligne sont respectivement égaux aux éléments correspondants de la diagonale et qu'en même temps tous les éléments situés au-dessous de la diagonale sont égaux et de signes contraires aux éléments respectifs de cette diagonale, le double déterminant est égal au produit des éléments de la diagonale, multiplié par une puissance de 2 marquée par le degré du déterminant.* (DOSTOR, *Archiv der Mathematik una Physik*, t. LVI, p. 239.)

Soit le déterminant du quatrième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & \alpha & \beta \\ -a & -b & c & \gamma \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$$

qui remplit ces conditions, et où les éléments α, β et γ sont des quantités quelconques.

Conservons la première ligne, puis ajoutons cette ligne à chacune des trois suivantes; le déterminant ne change ni de valeur ni de signe (60), et il vient encore

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & c+\alpha & d+\beta \\ 0 & 0 & 2c & d+\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, tous les éléments situés au-dessous de la diagonale sont égaux à zéro; par suite, le déterminant se réduit à son terme principal (68); donc il vient

$$2\Delta = 2a.2b.2c.2d = 2^4.abcd.$$

70. Théorème VI. — *Lorsque, dans un déterminant, un élément est égal à zéro, ce déterminant est égal, à un facteur près, à un déterminant de même degré, dans lequel les autres éléments de la ligne et de la colonne qui contiennent ce zéro sont égaux à l'unité.*

En effet, nous avons d'abord (27 et 28), en multipliant la seconde et la troisième ligne par a_3 et a_2, puis en divisant la première colonne par $a_2 a_3$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_2 a_3} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 a_3 & a_3 b_2 & a_3 c_2 \\ a_2 a_3 & a_2 b_3 & a_2 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_3 b_2 & a_3 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 & a_2 c_3 \end{vmatrix} = \Delta_1;$$

multipliant actuellement la seconde et la troisième colonne

par c_1 et b_1, puis divisant la première ligne par $b_1 c_1$, on obtient

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_3 b_2 & a_3 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 & a_2 c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_1 c_1} \begin{vmatrix} 0 & b_1 c_1 & b_1 c_1 \\ 1 & a_3 b_2 c_1 & a_3 b_1 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 c_1 & a_2 b_1 c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_3 b_2 c_1 & a_3 b_1 c_2 \\ 1 & a_2 b_3 c_1 & a_2 b_1 c_3 \end{vmatrix} = \Delta_2;$$

donc il vient $\Delta = \Delta_2$.

Si le déterminant avait été du quatrième ordre, on aurait trouvé que

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_2 a_3 a_4 b_1 c_1 d_1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_3 a_4 b_2 c_1 d_1 & a_3 a_4 b_1 c_2 d_1 & a_3 a_4 b_1 c_1 d_2 \\ 1 & a_2 a_4 b_3 c_1 d_1 & a_2 a_4 b_1 c_3 d_1 & a_2 a_4 b_1 c_1 d_3 \\ 1 & a_2 a_3 b_4 c_1 d_1 & a_2 a_3 b_1 c_4 d_1 & a_2 a_3 b_1 c_4 d_1 \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de deviner la manière d'opérer qui fournit ce dernier résultat. On pourrait aussi facilement en déduire une règle générale pour transformer de la sorte un déterminant d'un ordre quelconque ayant un élément nul.

71. **Définition I.** — Dans un déterminant, deux éléments sont dits *conjugués*, lorsque chacun d'eux occupe, dans les lignes horizontales, la même place que l'autre dans les colonnes verticales, et réciproquement.

Ainsi, dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

les éléments a_2 et b_1 sont conjugués; il en est de même des éléments a_3 et c_1, b_3 et c_2.

72. Définition II. — Un déterminant est *symétrique*, lorsque les éléments conjugués y sont égaux. Tel est le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ b & \beta & a \\ c & a & \gamma \end{vmatrix}.$$

73. Théorème VII. — *Lorsque, dans un déterminant, les éléments du terme principal sont des zéros, et que les éléments de la première ligne sont respectivement égaux à leurs éléments conjugués de la première colonne, ce déterminant peut se transformer* exactement *en un autre de même ordre, dans lequel, les éléments de la diagonale étant nuls, les autres éléments de la première ligne et de la première colonne sont tous égaux à l'unité.*

En effet, nous avons d'abord (70)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & z' & y \\ b & z & 0 & x' \\ c & y' & x & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & caz' & aby \\ b & bcz & 0 & abx' \\ c & bcy' & cax & 0 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_1}{abc}.$$

où nous avons multiplié les trois dernières colonnes par les produits respectifs bc, ca, ab; divisé la première ligne résultante par abc; puis divisé hors barres par abc.

Dans le second déterminant Δ_1, divisons les trois dernières lignes respectivement par a, b, c et multiplions hors barres par le produit abc; nous aurons

$$\Delta_1 = abc \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & cz' & by \\ 1 & cz & 0 & ax' \\ 1 & by' & ax & 0 \end{vmatrix};$$

donc il vient

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & z' & y \\ b & z & 0 & x' \\ c & y' & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & cz' & by \\ 1 & cz & 0 & ax' \\ 1 & by' & ax & 0 \end{vmatrix}.$$

On verrait de même que

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2 \\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2 \\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

74. Corollaire. — Dans l'égalité (I), posons

$$x = x' = a, \quad y = y' = b, \quad z = z' = c;$$

elle deviendra

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

75. Définition III. — Dans un déterminant, la diagonale qui contient les éléments du terme principal est dite *vide* ou *pleine*, suivant que ces éléments sont nuls ou différents de zéro.

76. Théorème VIII. — *Tout déterminant, à diagonale pleine, peut se décomposer en déterminants à diagonale vide.*

Dans le déterminant Δ du n° 13, remplaçons les éléments principaux $b_1, b_2, c_3, \ldots, l_n$ par autant de zéros; nous obtenons le nouveau déterminant

$$\Delta_0^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & \ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 & 0 & \ldots & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

où manquent tous les termes qui contiennent, comme facteurs, un ou plusieurs des éléments $a_1, b_2, c_3, \ldots, l_n$ de la diagonale.

Appelons C_i l'une des combinaisons i à i de ces n éléments évanouis et $\Delta_0^{(n-i)}$ le déterminant mineur à diagonale vide qui lui correspond; il est évident que $C_i\Delta_0^{(n-i)}$ sera l'un des termes supprimés. Par conséquent, l'ensemble des termes supprimés sera la somme $\Sigma C_i\Delta_0^{(n-i)}$, où il faudra donner à i successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., n.

On obtient ainsi la formule

$$\Delta^{(n)} = \Delta_0^{(n)} + \Sigma C_1\Delta_0^{(n-1)} + \Sigma C_2\Delta_0^{(n-2)} + \Sigma C_3\Delta_0^{(n-3)} + \ldots + \Sigma C_{n-2}\Delta_0^{(2)} + C_n,$$

attendu que $\Delta_0^{(1)} = 0$.

Si nous appliquons cette formule au déterminant du troisième ordre, nous voyons que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ a_1 \begin{vmatrix} 0 & c_2 \\ b_3 & 0 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} 0 & c_1 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} + a_1 b_2 c_3.$$

77. Les déterminants à diagonale vide se présentent dans un grand nombre de formules. Nous donnons ici plusieurs d'entre eux, que nous retrouverons plus loin dans les applications.

I. $$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc,$$

II. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

III. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2.$$

$$\text{IV.}\quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c' & b' \\ b & c' & 0 & a' \\ c & b' & a' & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 \\ \quad - 2bb'cc' - 2cc'aa' - 2aa'bb'. \end{cases}$$

$$\text{V.}\quad \begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} a^4a'^4 + b^4b'^4 + c^4c'^4 - 2b^2b'^2c^2c'^2 \\ \quad - 2c^2c'^2a^2a'^2 - 2a^2a'^2b^2b'^2. \end{cases}$$

78. **Théorème IX.** — *Dans un déterminant, lorsque le premier élément est zéro et que les autres éléments de la première ligne et de la première colonne sont égaux à l'unité, on peut augmenter ou diminuer d'une même quantité les éléments de chaque ligne dans le déterminant mineur, que l'on obtient par la suppression de la première ligne et de la première colonne* (SYLVESTER, *Philosophical Magazine*, 1852).

En effet, dans le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a' & b' & c' \\ 1 & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

multiplions la première ligne successivement par les trois quantités λ, λ', λ'', et ajoutons les produits respectifs aux trois autres lignes; nous obtenons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\lambda & b+\lambda & c+\lambda \\ 1 & a'+\lambda' & b'+\lambda' & c'+\lambda' \\ 1 & a''+\lambda'' & b''+\lambda'' & c''+\lambda'' \end{vmatrix}$$

qui est équivalent au déterminant Δ.

79. **Corollaire I.** — *On peut* de même *augmenter ou diminuer d'une même quantité les éléments de chaque colonne du déterminant mineur,* c'est-à-dire que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a' & b' & c' \\ 1 & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ 1 & a'+\alpha & b'+\beta & c'+\gamma \\ 1 & a''+\alpha & b''+\beta & c''+\gamma \end{vmatrix}.$$

80. Corollaire II. — On en conclut que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a' & b' & c' \\ 1 & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\alpha+\lambda & b+\beta+\lambda & c+\gamma+\lambda \\ 1 & a'+\alpha+\lambda' & b'+\beta+\lambda' & c'+\gamma+\lambda' \\ 1 & a''+\alpha+\lambda'' & b''+\beta+\lambda'' & c''+\gamma+\lambda'' \end{vmatrix}.$$

§ III. — Calcul abrégé des déterminants numériques et algébriques.

81. Nous avons indiqué au n° 50 la méthode générale, au moyen de laquelle on peut développer les déterminants. Cette méthode, dans la pratique, est souvent trop laborieuse pour être employée.

Un procédé bien plus simple consiste à ramener le déterminant à un autre de degré moindre; on traite ce nouveau déterminant de la même manière; et ainsi de suite.

Pour ramener un déterminant à un autre dont l'ordre soit abaissé d'une unité, on le transforme en un déterminant équivalent, dans lequel les éléments d'une ligne ou d'une colonne soient égaux à l'unité; il suffit, pour cela, d'opérer comme aux n°s 33 et 35.

Dans le déterminant obtenu, d'une ligne ou d'une colonne on retranche toutes les autres; on arrive ainsi à un déterminant dans lequel une ligne ou une colonne a un élément égal à l'unité et les autres égaux à zéro; ce déterminant est égal à *plus* ou *moins* le déterminant mineur qui a cette unité pour coefficient (64).

Pour mieux faire comprendre ce procédé, nous allons l'appliquer à une série d'exemples tant numériques qu'algébriques.

82. Exemple I. — On a successivement

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 12 \\ 7 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Le second déterminant se déduit du premier, en retran-

chant des éléments de la première colonne, puis de ceux de la seconde, *deux* fois, puis *trois* fois les éléments correspondants de la troisième.

Le troisième déterminant s'obtient au moyen du second, en retranchant la somme des deux premières colonnes de la troisième.

Enfin le quatrième déterminant se déduit du troisième, en retranchant la première colonne de chacune des deux suivantes, et en changeant les signes des deux dernières colonnes résultantes.

Le déterminant donné est donc égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12.$$

On aurait pu arriver au même résultat, d'une manière plus rapide, en opérant comme il suit :

On remarque de suite que les deux dernières colonnes sont divisibles l'une par 2 et l'autre par 3; effectuant ces divisions, on trouve que (28)

$$\begin{vmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 30 & 19 & 4 \\ 37 & 25 & 5 \end{vmatrix}.$$

Dans le second déterminant, on retranche 7 fois et 5 fois la dernière colonne des deux précédentes; on voit ainsi que le déterminant donné revient à

$$6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 12.$$

83. Exemple II. — On trouve par les mêmes procédés que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 16 & 24 & 33 \\ 20 & 25 & 35 & 45 \\ 20 & 27 & 36 & 55 \\ 28 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}.$$

Le second déterminant s'obtient en divisant, dans le premier, la première colonne par 4 et la seconde ligne par 5.

Le troisième déterminant se déduit du second, en retranchant, dans celui-ci, 3 fois, 5 fois et 7 fois la seconde ligne des trois autres. Il vient ainsi

$$\Delta = -20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}.$$

Retranchant maintenant 2 fois et 3 fois la première ligne des deux autres, on obtient

$$\Delta = -20 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -20 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -20(15-14) = -20.$$

84. Exemple III. — Il est aisé de voir que l'on a

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Dans le premier déterminant, on a ajouté la première ligne à chacune des deux suivantes.

85. Exemple IV. — En opérant de la même manière, on trouve que

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -2(2.4) = -16.$$

Dans le premier déterminant, on a ajouté la première ligne à chacune des trois autres; on a ainsi obtenu le second déterminant, qui, en vertu de n° 64, revient au troisième.

Dans celui-ci, on a retranché la troisième ligne de la deuxième; on a ainsi trouvé le quatrième déterminant qui, par suite de n° 64, est égal au cinquième multiplié par 2.

86. Exercices numériques.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 10, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 72, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 70,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -29, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -32 & -35 & 34 \\ 5 & -10 & 11 \end{vmatrix} = -1050, \quad \begin{vmatrix} 17 & 15 & 11 \\ 13 & 13 & 12 \\ 9 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & -10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ 5 & 5 & 9 & -5 \end{vmatrix} = 19440.$$

87. Carrés magiques (¹). — Les règles que nous venons d'employer s'appliquent avec avantage aux déterminants dont les éléments sont les n^2 premiers nombres entiers, disposés en *carré magique*. Dans ces déterminants, les sommes des éléments appartenant aux mêmes colonnes, aux mêmes lignes et aux mêmes diagonales sont égales entre elles et à $\frac{n}{2}(n^2+1)$.

(¹) *Voir* les *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet de Méziriac, 3e édition, revue par A. Labosne, p. 88 et suiv. Paris, chez Gauthier-Villars.

Ainsi on trouve facilement que

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 15 \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -8 & 4 \end{vmatrix} = -15 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -15.4.2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -15.8(2.5) = 360.$$

Dans le premier déterminant, à la première colonne, on a ajouté la somme des deux autres et l'on a divisé le résultat par 15; puis, dans le second déterminant, on a retranché la première ligne de chacune des deux suivantes.

88. Considérons, en second lieu, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix},$$

qui est formé par les 4^2 ou 16 premiers nombres entiers, disposés en carré magique.

Pour en calculer la valeur numérique, de la première ligne retranchons la quatrième, et de la deuxième retranchons la troisième; il nous vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} -12 & 12 & 12 & -12 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -12.4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix},$$

où nous avons divisé les deux premières lignes, l'une par -12 et l'autre par 4.

Or le dernier déterminant est évidemment nul, puisque les deux premières lignes y sont identiques; donc on a $\Delta = 0$.

89. Soit encore à calculer la valeur numérique du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 4 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 23 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 17 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 11 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix},$$

qui est formé par les 25 premiers nombres entiers, disposés en carré magique.

A la première colonne ajoutons les quatre suivantes, puis retranchons la première ligne des quatre suivantes, nous obtenons successivement

$$\Delta = 65 \begin{vmatrix} 1 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 1 & 12 & 25 & 8 & 16 \\ 1 & 6 & 19 & 2 & 15 \\ 1 & 5 & 13 & 21 & 9 \\ 1 & 24 & 7 & 20 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 65 \begin{vmatrix} 1 & 18 & 1 & 14 & 22 \\ 0 & -6 & 24 & -6 & -6 \\ 0 & -12 & 18 & -12 & -7 \\ 0 & -13 & 12 & 7 & -13 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & -19 \end{vmatrix} = 65 \begin{vmatrix} -6 & 24 & -6 & -6 \\ -12 & 18 & -12 & -7 \\ -13 & 12 & 7 & -13 \\ 6 & 6 & 6 & -19 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons actuellement diviser la première ligne par -6 et la seconde colonne par 2; il nous viendra, en changeant les signes dans la dernière colonne,

$$\Delta = 65.6.2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -12 & 9 & -12 & 7 \\ -13 & 6 & 7 & 13 \\ 6 & 3 & 6 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= 780 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -15 & 0 & -5 \\ -13 & -20 & 20 & 0 \\ 6 & 15 & 0 & 25 \end{vmatrix} = 780 \begin{vmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 20 & 20 & 0 \\ 15 & 0 & 25 \end{vmatrix}.$$

Dans le premier de ces déterminants, nous avons ajouté 2 fois la première colonne à la seconde, nous l'avons retranchée de la troisième et ajoutée à la quatrième; puis nous avons changé les signes de la seconde et de la troisième ligne dans le troisième déterminant.

Dans celui-ci tous les éléments, moins un, sont nuls à la seconde colonne; par suite il vient

$$\Delta = 780 \times -20 \begin{vmatrix} 15 & 5 \\ 15 & 25 \end{vmatrix}$$

$$= -780.20.15.5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -780.20.15.5.4 = -4680000.$$

90. Les *déterminants algébriques* peuvent se développer suivant les mêmes règles. Nous allons en fournir plusieurs exemples.

Exemple I. — On a successivement

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -b & a-b & b \\ 1 & a-c & -c & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -b & a-b \\ 1 & a-c & -c \\ 1 & b & c \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -b & a-b \\ 0 & a+b-c & b-c-a \\ 0 & 2b & b+c-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b-c & c+a-b \\ 2b & a-b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b-c)(a-b-c) - 2b(c+a-b)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab.$$

Dans le premier déterminant, on a retranché la dernière colonne de chacune des deux précédentes; on a ainsi obtenu le second déterminant, qui, en vertu du n° 64, se réduit au troisième. Dans celui-ci, on a retranché la première ligne de chacune des deux suivantes; on est ainsi arrivé au quatrième déterminant, qui se réduit au cinquième.

91. Exemple II.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & -a^2 & c^2-a^2 \\ 1 & b^2 & c^2-b^2 & -b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & -a^2 & c^2-a^2 \\ 1 & c^2-b^2 & -b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & -2a^2 & c^2-a^2-b^2 \\ 0 & c^2-a^2-b^2 & -2b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c^2 \\ a^2+b^2-c^2 & 2b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$= (a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$$

$$= [(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2]$$

$$= -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

On retranche la seconde colonne du premier déterminant de chacune des deux suivantes; on obtient ainsi le second déterminant, qui se réduit au troisième. Dans celui-ci, on retranche la première ligne de chacune des deux suivantes; on trouve ainsi le quatrième déterminant, qui se réduit au cinquième.

92. Exemple III.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(b+c-a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(b+c-a)\Delta'.$$

Dans le premier déterminant, on ajoute toutes les lignes; la première ligne devient ainsi divisible par $a+b+c$, qu'on met en facteur commun hors barres.

Dans le second déterminant, de la somme des deux premières colonnes on retranche la somme des deux dernières; la première colonne devient divisible par $b+c-a$, qu'on met en évidence hors barres.

Dans le dernier déterminant, que nous représentons par Δ', ajoutons la seconde ligne à chacune des deux dernières, nous obtenons

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & c & b \\ 0 & c & c & a+b \\ 0 & b & a+c & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & c & a+b \\ b & a+c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & a+b-c \\ b & c+a-b & 0 \end{vmatrix},$$

d'où nous tirons

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & a+b-c \\ c+a-b & 0 \end{vmatrix} = -(c+a-b)(a+b-c).$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

93. Exemple IV.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b)^2-c^2 & 0 & c^2 \\ 0 & (b+c)^2-a^2 & a^2 \\ b^2-(c+a)^2 & b^2-(c+a)^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & 0 & c^2 \\ 0 & b+c-a & a^2 \\ b-c-a & b-c-a & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= -2(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & 0 & c^2 \\ 0 & b+c-a & a^2 \\ a & c & -ac \end{vmatrix}.$$

Dans le premier déterminant, on a retranché la dernière colonne de chacune des deux précédentes, ce qui a fourni le second déterminant, dont les deux premières colonnes sont divisibles par $a+b+c$.

Dans le troisième déterminant, on a retranché la somme des deux premières lignes de la troisième, et l'on a divisé la troisième ligne résultante par -2.

Dans le quatrième déterminant, que nous représenterons par Δ', ajoutons la troisième colonne aux deux précédentes multipliées respectivement par c et a; nous obtenons

$$ac\Delta' = \begin{vmatrix} (a+b)c & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)a & a^2 \\ 0 & 0 & -ac \end{vmatrix} = -ac \begin{vmatrix} (a+b)c & c^2 \\ a^2 & (b+c)a \end{vmatrix}$$

$$= -a^2c^2 \begin{vmatrix} a+b & c \\ a & b+c \end{vmatrix} = -a^2c^2 \begin{vmatrix} a+b+c & c \\ a+b+c & b+c \end{vmatrix}$$

$$= -a^2c^2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & b+c \end{vmatrix} = -a^2bc^2(a+b+c).$$

Donc il vient

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

94. Exemple V.

$$\Delta = \begin{vmatrix} bb'+cc' & ba' & ca' \\ ab' & cc'+aa' & cb' \\ ac' & bc' & aa'+bb' \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abb'+acc' & baa' & caa' \\ abb' & bcc'+baa' & cbb' \\ acc' & bcc' & caa'+cbb' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 0 & -2bcc' & -2cbb' \\ -2acc' & 0 & -2caa' \\ -2abb' & -2baa' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -8abc \begin{vmatrix} 0 & c' & b' \\ c' & 0 & a' \\ b' & a' & 0 \end{vmatrix} = 16aa'.bb'.cc'.$$

Le second déterminant se déduit du premier, en multipliant les trois lignes respectives par a, b et c et en divisant hors barres par le produit $a.b.c = abc$; le troisième se tire du deuxième, en retranchant de chaque ligne la somme des deux autres; le quatrième s'obtient au moyen du troisième, en divisant les trois lignes respectivement par $-2bc$, $-2ca$ et $-2ab$ et en multipliant hors barres par leur produit $-8a^2b^2c^2$. La valeur du quatrième déterminant étant égale à $-2a'b'c'$, on trouve que $\Delta = 16abc.a'b'c'$.

95. Exercices algébriques.

I. $$\begin{vmatrix} a+b\sqrt{-1} & -c+d\sqrt{-1} \\ c+d\sqrt{-1} & a-b\sqrt{-1} \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2.$$

II. $$-\begin{vmatrix} 0 & -1 & b \\ -1 & 0 & a \\ A & B & C \end{vmatrix} = Aa+Bb+C.$$

III. $$-\begin{vmatrix} 0 & a' & b' \\ a & 1 & \cos\theta \\ b & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = aa'+bb'-(ab'+ba')\cos\theta.$$

IV. $$\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x'-a & y'-b \\ 1 & x''-a & y''-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix}.$$

V. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

VI. $$\frac{1}{\sin^2 A}\begin{vmatrix} a^2 & b\sin A & c\sin A \\ b\sin A & 1 & \cos A \\ c\sin A & \cos A & 1 \end{vmatrix} = a^2-(b^2+c^2-2bc\cos A).$$

VII. $$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 16a^2b^2c^2.$$

VIII. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-d)(a-b+c-d).$$

IX. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & c \\ 1 & b & c & -1 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} a^2-2bc-a-1 \\ \quad +b^2-2ca-b-1 \\ \quad +c^2-2ab-c-1. \end{array}\right.$$

X. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & p \\ 0 & 1 & b & q \\ 1 & 0 & a' & p' \\ 0 & 1 & b' & q' \end{vmatrix} = (a-a')(q-q')-(b-b')(p-p').$$

XI. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & a' & b' \\ 1 & 0 & a'' & b'' \\ 0 & 1 & a''' & b''' \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} ab'-ba'+a'b''-b'a'' \\ \quad +a''b'''-b''a'''+a'''b-b'''a. \end{array}\right.$$

XII. $$\begin{vmatrix} \lambda & a & b & c \\ a & \lambda & 0 & 0 \\ b & 0 & \lambda & 0 \\ c & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2-a^2-b^2-c^2).$$

XIII. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

XIV. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (a+b+c+d) \\ \quad \times (a-b)(a-c)(a-d) \\ \quad \times (b-c)(b-d)(c-d). \end{array} \right.$$

XV. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (ab+ac+ad+bc+bd+cd) \\ \quad \times (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d). \end{array} \right.$$

XVI. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (abc+abd+acd+bcd) \\ \quad \times (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d). \end{array} \right.$$

CHAPITRE III.

PRODUIT DE DEUX DÉTERMINANTS.

§ I. Multiplication de deux déterminants. — § II. Carré des déterminants. — § III. Les déterminants multiples.

§ I. — Multiplication de deux déterminants.

96. **Lemme.** — *Lorsqu'un déterminant de degré pair 2n est décomposé en quatre déterminants de degré n par deux traits, l'un horizontal et l'autre vertical, menés par le milieu, si les éléments de l'un de ces quatre déterminants sont égaux à zéro, le déterminant proposé sera égal au produit des deux déterminants mineurs qui sont adjacents au déterminant mineur à éléments nuls.*

Il s'agit de prouver qu'on a, par exemple,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ a_4 & b_4 & \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}.$$

Pour cela, permutons entre eux les éléments de la première et de la troisième colonne, puis ceux de la deuxième et de la quatrième, le déterminant conserve son signe (21), et l'on a encore

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & a_3 & b_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Si nous ordonnons ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, nous obtiendrons

$$\Delta = \alpha_3 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ \beta_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix} - \alpha_4 \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ \beta_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

ou (64)

$$\Delta = \alpha_3\beta_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} - \alpha_4\beta_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

donc il vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

ce qu'il fallait prouver.

97. On verrait de même que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} = P \times Q,$$

en représentant ces deux derniers déterminants l'un par P et l'autre par Q.

Ordonnons le déterminant du sixième ordre par rapport aux éléments de la quatrième colonne; il nous vient

$$\Delta = \alpha_4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & \beta_5 & \gamma_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} - \alpha_5 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ a_6 & b_6 & c_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix}$$

$$+ \alpha_6 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & \beta_5 & \gamma_5 \end{vmatrix}.$$

ou

$$(1) \qquad \Delta = \alpha_4 \Delta_{\alpha_4} - \alpha_5 \Delta_{\alpha_5} + \alpha_6 \Delta_{\alpha_6}.$$

Les trois déterminants mineurs Δ_{α_4}, Δ_{α_5}, Δ_{α_6} peuvent aussi être ordonnés par rapport aux éléments de leurs quatrièmes colonnes ; on trouve ainsi, pour le premier de ces déterminants,

$$\Delta_{\alpha_4} = \beta_5 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_6 & b_6 & c_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} - \beta_6 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 & \gamma_5 \end{vmatrix}$$

$$= \beta_5 \gamma_6 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \beta_6 \gamma_5 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta_{\alpha_4} = (\beta_5 \gamma_6 - \beta_6 \gamma_5) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = P(\beta_5 \gamma_6 - \beta_6 \gamma_5) = P \begin{vmatrix} \beta_5 & \gamma_5 \\ \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix}.$$

On verrait de même que

$$\Delta_{\alpha_5} = P \begin{vmatrix} \beta_4 & \gamma_4 \\ \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_{\alpha_6} = P \begin{vmatrix} \beta_4 & \gamma_4 \\ \beta_5 & \gamma_5 \end{vmatrix}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'égalité (1), il nous viendra

$$\Delta = P \left\{ \alpha_4 \begin{vmatrix} \beta_5 & \gamma_5 \\ \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} - \alpha_5 \begin{vmatrix} \beta_4 & \gamma_4 \\ \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} + \alpha_6 \begin{vmatrix} \beta_4 & \gamma_4 \\ \beta_5 & \gamma_5 \end{vmatrix} \right\}$$

ou

$$\Delta = P \times \begin{vmatrix} \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 \end{vmatrix} = P \times Q,$$

ce qu'il fallait prouver.

Il est facile d'étendre cette démonstration à un déterminant de degré pair quelconque, satisfaisant à l'énoncé.

98. Théorème. — *Le produit de deux déterminants de même ordre peut se mettre sous la forme d'un déterminant de cet ordre. Les éléments des produits sont les sommes des produits que l'on obtient, en multipliant les éléments de*

chaque colonne dans l'un des déterminants par les éléments correspondants de toutes les colonnes successives de l'autre.

Ainsi l'on a le produit de deux déterminants du second ordre

$$(\mathrm{I})\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}.$$

Pour le démontrer, prenons l'identité

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce dernier déterminant, à la première colonne, ajoutons a_1 fois la troisième plus a_2 fois la quatrième; puis à la deuxième ajoutons b_1 fois la troisième plus b_2 fois la quatrième colonne; nous obtenons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix};$$

mais ce déterminant est égal au produit des deux déterminants (96)

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

dont le dernier est égal à 1; donc on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix},$$

ce qu'il fallait prouver.

99. On obtiendra le produit des deux déterminants du troisième ordre,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

en opérant d'une manière analogue sur le déterminant équivalent à ce produit

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

qui est du sixième ordre.

On ajoutera à la première colonne la somme des produits des trois dernières colonnes par les éléments respectifs a_1, a_2, a_3; à la seconde colonne la somme des produits des trois dernières colonnes par les éléments respectifs b_1, b_2, b_3; à la troisième colonne la somme des produits des trois dernières colonnes par les éléments respectifs c_1, c_2, c_3. On obtiendra ainsi le déterminant équivalent

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 & c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Or ce déterminant est égal au produit négatif des deux déterminants mineurs du troisième degré, disposés en diagonale (97), dont l'un

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

est égal à -1; donc on a encore

$$\text{II}\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 & b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 & c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 \\ a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}. \end{array}\right.$$

100. Binet et Cauchy ont déduit cette proposition des cas particuliers qu'avaient donnés Lagrange, dans les *Mémoires de*

l'Académie de Berlin, 1773, p. 285, et Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*, 157, 158 et 268; ils l'ont énoncée et démontrée dans des Mémoires qui ont été publiés en même temps dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XVIe Cahier, p. 286, et XVIIe Cahier, p. 81 et 107.

101. Remarque I. — Le produit Δ de deux déterminants d et δ peut s'écrire sous quatre formes, en général différentes (Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe Cahier, 1815, p. 83).

En effet, on peut composer :

1° Les éléments de chaque ligne de δ avec les éléments de toutes les lignes de d;

2° Les éléments de chaque ligne de δ avec les éléments de toutes les colonnes de d;

3° Les éléments de chaque colonne de δ avec les éléments de toutes les lignes de d;

4° Les éléments de chaque colonne de δ avec les éléments de toutes les colonnes de d.

Ainsi l'on a le produit des deux déterminants du second ordre

$$(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\beta_1 & a_1\alpha_2 + a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1 + b_2\beta_1 & b_1\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on effectue et qu'on développe ces quatre produits et que l'on supprime dans chacun d'eux les termes égaux et de signes contraires, on trouve la même quantité

$$\begin{aligned}
&a_1\alpha_1 b_2\beta_2 + a_2\alpha_2 b_1\beta_1 - a_2\alpha_1 b_1\beta_2 - a_1\alpha_2 b_2\beta_1 \\
&\quad = a_1 b_2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) - a_2 b_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \\
&\quad = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).
\end{aligned}$$

102. Remarque II. — Si l'on avait à faire le produit de deux déterminants d'ordres différents, on transformerait celui de moindre degré en un déterminant de même ordre que l'autre (67).

Ainsi l'on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1\alpha_1 + c_1\beta_1 & b_1\alpha_2 + c_1\beta_2 \\ a_2 & b_2\alpha_1 + c_2\beta_1 & b_2\alpha_2 + c_2\beta_2 \\ a_3 & b_3\alpha_1 + c_3\beta_1 & b_3\alpha_2 + c_3\beta_2 \end{vmatrix}.$$

103. Exemples. — Nous donnons ici, comme exercices, quelques produits de deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Ax + By + C & A'x + B'y + C' & A''x + B''y + C'' \\ Ax' + By' + C' & A'x' + B'y' + C' & A''x' + B''y' + C'' \\ Ax'' + By'' + C'' & A'x'' + B'y'' + C' & A''x'' + B''y'' + C'' \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \\ 0 & 1 & c & \gamma \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 1 & 0 & b & \beta \\ 1 & 0 & c & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 + \alpha^2 & ab + \alpha\beta & ac + \alpha\gamma \\ 1 & ab + \alpha\beta & b^2 + \beta^2 & bc + \beta\gamma \\ 1 & ac + \alpha\gamma & bc + \beta\gamma & c^2 + \gamma^2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \\ 0 & 1 & c & \gamma \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a' & \alpha' \\ 1 & 0 & b' & \beta' \\ 1 & 0 & c' & \gamma' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & aa' + \alpha\alpha' & ba' + \beta\alpha' & ca' + \gamma\alpha' \\ 1 & ab' + \alpha\beta' & bb' + \beta\beta' & cb' + \gamma\beta' \\ 1 & ac' + \alpha\gamma' & bc' + \beta\gamma' & cc' + \gamma\gamma' \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 + \alpha^2 & -2a & -2\alpha \\ 1 & b^2 + \beta^2 & -2b & -2\beta \\ 1 & c^2 + \gamma^2 & -2c & -2\gamma \\ 1 & d^2 + \delta^2 & -2d & -2\delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a^2 + \alpha^2 & 1 & a & \alpha \\ b^2 + \beta^2 & 1 & b & \beta \\ c^2 + \gamma^2 & 1 & c & \gamma \\ d^2 + \delta^2 & 1 & d & \delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & (a-b)^2 + (\alpha-\beta)^2 & (a-c)^2 + (\alpha-\gamma)^2 & (a-d)^2 + (\alpha-\delta)^2 \\ (a-b)^2 + (\alpha-\beta)^2 & 0 & (b-c)^2 + (\beta-\gamma)^2 & (b-d)^2 + (\beta-\delta)^2 \\ (a-c)^2 + (\alpha-\gamma)^2 & (b-c)^2 + (\beta-\gamma)^2 & 0 & (c-d)^2 + (\gamma-\delta)^2 \\ (a-d)^2 + (\alpha-\delta)^2 & (b-d)^2 + (\beta-\delta)^2 & (c-d)^2 + (\gamma-\delta)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

V. $$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a+b+c+d & a-b+c+d & a+b-c+d & a+b+c- \\ b-a+d+c & -b+a+d+c & -b-a-d+c & -b-a-d- \\ c+d-a+b & -c-d-a+b & -c+d+a+b & -c+d-a- \\ d+c+b-a & -d-c+b-a & -d+c-b-a & -d+c+b- \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (b+c+d-a) & (c+d+a-b) & (d+a+b-c) & (a+b+c- \\ (b+c+d-a) & (c+d+a-b) & -(d+a+b-c) & -(a+b+c- \\ (b+c+d-a) & -(c+d+a-b) & (d+a+b-c) & -(a+b+c- \\ (b+c+d-a) & -(c+d+a-b) & -(d+a+b-c) & (a+b+c- \end{vmatrix}$$

$$= \cdot (b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)(a+b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)(a+b+c-d) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dans l'avant-dernier déterminant, on a changé les signes des trois dernières lignes, ce qui change le signe du déterminant.

Le second et le dernier déterminant étant identiques, on en conclut que

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} (b+c+d-a) \\ \times (c+d+a-b) \\ \times (d+a+b-c) \\ \times (a+b+c-d). \end{array} \right.$$

104. Application. — Nous pouvons appliquer la règle de la multiplication de deux déterminants du second ordre à la démonstration d'un théorème d'Euler.

Dans l'identité (I) du n° 98, posons

$$a_1 = +a + b\sqrt{-1}, \quad \alpha_1 = +a' - b'\sqrt{-1},$$
$$a_2 = +c + d\sqrt{-1}, \quad \alpha_2 = +c' + d'\sqrt{-1},$$
$$b_1 = -c + d\sqrt{-1}, \quad \beta_1 = -c' + d'\sqrt{-1},$$
$$b_2 = +a - b\sqrt{-1}, \quad \beta_2 = +a' - b'\sqrt{-1};$$

nous aurons, pour les deux facteurs du premier membre,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + b\sqrt{-1} & -c + d\sqrt{-1} \\ c + d\sqrt{-1} & a - b\sqrt{-1} \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' + b'\sqrt{-1} & -c' + d'\sqrt{-1} \\ c' + d'\sqrt{-1} & a' - b'\sqrt{-1} \end{vmatrix} = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2,$$

tandis que le déterminant du second membre aura pour éléments

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = (a + b\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1})(c' + d'\sqrt{-1}),$$
$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 = (a + b\sqrt{-1})(-c' + d'\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1})(a' - b'\sqrt{-1}),$$
$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 = (-c + d\sqrt{-1})(a' + b'\sqrt{-1}) + (a - b\sqrt{-1})(c' + d'\sqrt{-1}),$$
$$b_1\beta_1 + b_2\beta_2 = (-c + d\sqrt{-1})(-c' + d'\sqrt{-1}) + (a - b\sqrt{-1})(a' - b'\sqrt{-1})$$

ou bien

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = (aa' - bb' + cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' + dc')\sqrt{-1},$$
$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 = -(ac' + bd' - ca' - db') + (ad' - bc' - cb' + da')\sqrt{-1},$$
$$b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 = (ac' + bd' - ca' - db') + (ad' - bc' - cb' + da')\sqrt{-1},$$
$$b_1\beta_1 + b_2\beta_2 = (aa' - bb' + cc' - dd') - (ab' + ba' + cd' + dc')\sqrt{-1}.$$

Ce déterminant sera par suite

$$\begin{vmatrix} A + B\sqrt{-1} & C + D\sqrt{-1} \\ -C + D\sqrt{-1} & A - B\sqrt{-1} \end{vmatrix} = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

où

$$A = aa' - bb' + cc' - dd', \quad B = ab' + ba' + cd' + dc',$$
$$C = ac' + bd' - ca' - db', \quad D = ad' - bc' - cb' + da'.$$

Notre identité deviendra ainsi

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)\\ &= (aa'-bb'+cc'-dd')^2+(ab'+ba'+cd'+dc')^2\\ &+ (ac'+bd'-ca'-db')^2+(ad'-bc'-cb'+da')^2,\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème suivant :

Le produit de deux sommes de quatre carrés est lui-même la somme de quatre carrés [1].

Il reste à remarquer que l'égalité précédente peut s'écrire de plusieurs manières; car on a évidemment le droit de changer le signe de l'une quelconque ou de plusieurs des huit quantités a, b, c, d; a', b', c', d'.

Ainsi, en y changeant les signes de b et de d', elle devient

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)\\ &= (aa'+bb'+cc'+dd')^2+(ab'-ba'-cd'+dc')^2\\ &+ (ac'+bd'-ca'-db')^2+(ad'-bc'+cb'-da')^2.\end{aligned}$$

§ II. — Carré des déterminants.

105. Dans la formule (I) du n° 98 posons

$$(1)\qquad \alpha_1 = a_1,\quad \beta_1 = b_1,\quad \alpha_2 = a_2,\quad \beta_2 = b_2;$$

nous trouvons ainsi le carré du déterminant du second degré

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2 & a_1b_1+a_2b_2 \\ a_1b_1+a_2b_2 & b_1^2+b_2^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2 = (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2.$$

Ce résultat, qu'on peut écrire

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = (a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_1+a_2b_2)^2,$$

prouve que :

Le produit de deux sommes de deux carrés est lui-même la somme de deux carrés.

---

[1] *Voir* les *Propositions relatives à la théorie des nombres*, par M. E. Catalan (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1874, t. XIII, p. 522).

106. Si nous introduisons nos mêmes hypothèses dans les formules (III) du n° **101**, nous verrons que le carré du déterminant du second ordre peut se mettre sous les trois formes suivantes :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 \\ a_1a_2 + b_1b_2 & a_2^2 + b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2b_1 & a_1a_2 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + b_1b_2 & a_2b_1 + b_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1b_1 + a_2b_2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{vmatrix}.$$

107. Le carré du déterminant du troisième ordre s'obtient de même par la formule (II) du n° 99, en y posant

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_1 = b_1, \quad \gamma_1 = c_1,$$
$$\alpha_2 = a_2, \quad \beta_2 = b_2, \quad \gamma_2 = c_2,$$
$$\alpha_3 = a_3, \quad \beta_3 = b_3, \quad \gamma_3 = c_3.$$

Il vient, par suite,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Nous voyons, par ces résultats, que le carré d'un déterminant est un déterminant symétrique.

§ III. — Les déterminants multiples.

108. Lorsque, dans un déterminant, tous les éléments de la première ligne ou de la première colonne sont égaux à l'unité, on peut en simplifier la notation par la suppression de cette ligne ou de cette colonne et par le dédoublement de chacune des deux barres qui comprennent le déterminant.

Ainsi les deux notations

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|$$

représentent chacune la somme des trois déterminants

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ces trois déterminants sont liés entre eux par les deux relations

$$a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

qui reviennent aux égalités évidentes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

109. De même les quatre déterminants

$$(b_1c_2d_3), \quad -(a_1c_2d_3), \quad (a_1b_2d_3), \quad -(a_1b_2c_3),$$

compris dans la notation

$$\text{(II)} \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\|,$$

sont liés entre eux par quatre relations, dont la première, par exemple,

$$a_1(b_1c_2d_3) - b_1(a_1c_2d_3) + c_1(a_1b_2d_3) - d_1(a_1b_2c_3) = 0$$

exprime qu'on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est évident.

110. Définition. — De pareils déterminants peuvent se désigner par la dénomination de *déterminants multiples*.

Une notation, analogue à (I) et (II), peut être employée pour représenter $n+1$ déterminants du $n^{\text{ième}}$ ordre, dont chacun ne diffère de tous les autres que par une ligne ou par une colonne.

111. La règle donnée au n° 98 pour la multiplication des déterminants rdinaires peut aussi s'appliquer au produit des déterminants mulples.

Ainsi la somme des trois produits de déterminants que l'on peut forer, en multipliant chacun des déterminants de la série

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\|$$

ar le déterminant correspondant de la série

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{matrix} \right\|,$$

'est-à-dire la somme

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

st égale au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

In effet, considérons le déterminant du cinquième ordre

$$(1) \qquad \Delta = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & -1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix};$$

ous pouvons le décomposer en produits de deux déterminants, dont 'un est du second et l'autre du troisième ordre. Nous trouvons ainsi que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Si nous ordonnons les déterminants du troisième ordre suivant les éléments de la première ligne, nous verrons que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Changeant les lignes en colonnes dans les premiers facteurs, on a enfi

$$(2)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \\ \beta_2 & \end{vmatrix}$$

Nous pouvons obtenir une autre forme par l'expression de Δ. Dans l déterminant (1), aux deux premières colonnes, ajoutons les sommes de trois dernières colonnes multipliées, d'abord par a_1, b_1, c_1, ensuite pa a_2, b_2, c_2; nous trouvons que

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 \\ a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Or le second facteur est égal à -1; donc Δ est égal au premier facteu changé de signe.

On voit ainsi que *la somme des trois produits* (2) ou

$$(b_1c_2 - c_1b_2)(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) + (c_1a_2 - a_1c_2)(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) + (a_1b_2 - b_1a_2)(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$$

est égale à la différence des deux produits

$$(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1)(a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2) - (a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 c_1\gamma_2)(a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1).$$

112. La règle précédente nous conduit immédiatement à une formul que Lagrange a donnée dans son écrit *Sur les pyramides* (1).

Supposons que le second déterminant multiple soit identique avec l premier. En posant

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_1 = b_1, \quad \gamma_1 = c_1,$$
$$\alpha_2 = a_2, \quad \beta_2 = b_2, \quad \gamma_2 = c_2$$

dans l'égalité précédente, on obtient de suite la *formule de Lagrange*

$$(b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (c_1a_2 - a_1c_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2.$$

Cette formule fournit l'expression du sinus de l'angle des deux droites

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}, \quad \frac{x}{a_2} = \frac{y}{b_2} = \frac{z}{c_2},$$

sachant que le cosinus de l'angle de ces droites est

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}},$$

pour des axes de coordonnées rectangulaires.

LIVRE II.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A L'ALGÈBRE ET A LA TRIGONOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES EXPRIMÉES EN DÉTERMINANTS.

113. Lorsque le premier membre d'une équation algébrique se trouve mis sous la forme d'un déterminant, le développement de ce déterminant peut mettre en évidence une ou plusieurs racines de cette équation. Ces racines elles-mêmes peuvent s'obtenir souvent sous forme de déterminants.

Ainsi, dans l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1x+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2x+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3x+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

le premier membre se décompose dans les deux déterminants (56)

$$\begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

dont le premier est égal à (28)

$$x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

cette équation revient donc à

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

On verrait de même que l'équation

$$\begin{vmatrix} Cz + D & A & B \\ az + p & -1 & 0 \\ bz + q & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

donne

$$z = -\frac{Ap + Bq + D}{Aa + Bb + C}.$$

114. Le premier membre de l'équation

$$\begin{vmatrix} a^2 - x & ab - x\cos\theta \\ ab - x\cos\theta & b^2 - x \end{vmatrix} = 0$$

se décompose dans les quatre déterminants (**56**)

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -x & ab \\ -x\cos\theta & b^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a^2 & -x\cos\theta \\ ab & -x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -x & -x\cos\theta \\ -x\cos\theta & -x \end{vmatrix},$$

dont le premier est nul (**30**), dont les deux autres admettent les facteurs $-bx$ et $-ax$, et dont le dernier est divisible par x^2; notre équation revient par conséquent à la suivante :

$$-bx\begin{vmatrix} 1 & a \\ \cos\theta & b \end{vmatrix} - ax\begin{vmatrix} a & \cos\theta \\ b & 1 \end{vmatrix} + x^2\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$-bx(b - a\cos\theta) - ax(a - b\cos\theta) + x^2\sin^2\theta = 0$$

ou encore

$$x(x\sin^2\theta - a^2 - b^2 + 2ab\cos\theta) = 0,$$

et donne pour x les deux valeurs

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

115. Pour résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0,$$

où l'inconnue x occupe la diagonale, nous diviserons d'abord les trois dernières colonnes par x et nous multiplierons par x la première ligne; le déterminant aura été divisé par x^2, de sorte que l'équation deviendra

$$x^2 \begin{vmatrix} x^2 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Divisant ensuite les trois dernières colonnes respectivement par a, b, c, puis multipliant les trois dernières lignes par les mêmes quantités, on obtient

$$x^2 \begin{vmatrix} x^2 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & 1 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et, en développant,

$$x^2(x^2 - a^2 - b^2 - c^2) = 0;$$

d'où il vient

$$x' = 0, \quad x'' = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Si a, b, c sont les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède rectangle, x sera la diagonale de ce parallélipipède.

116. L'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

se résout immédiatement en développant le premier membre suivant les éléments de la première colonne; elle devient ainsi

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

et se réduit à

$$abc - x(bc + ca + ab) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Si a, b, c sont les rayons des trois cercles exinscrits à un triangle donné, x sera le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.

117. Dans le premier membre de l'équation

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0,$$

tous les éléments sont égaux entre eux, à l'exception de ceux de la diagonale, qui sont égaux à l'inconnue.

On retranchera la première ligne de chacune des trois suivantes, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a-x & x-a & 0 & 0 \\ a-x & 0 & x-a & 0 \\ a-x & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en divisant les trois dernières lignes par $x-a$,

$$(x-a)^3\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Mais il est facile de voir que ce déterminant est égal à $x+3a$; par conséquent, notre équation revient à

$$(x-a)^3(x+3a)=0;$$

donc trois racines sont égales à a et la quatrième est $-3a$.

118. Dans le déterminant de l'équation

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}=0,$$

à la première colonne ajoutons les trois suivantes; cette équation devient

$$\begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ a+x+c+b & x & c & b \\ b+c+x+a & c & x & a \\ c+b+a+x & b & a & x \end{vmatrix}=0,$$

dont le premier membre est divisible par $x+a+b+c$.

Si l'on avait ajouté les quatre colonnes multipliées respectivement par 1, 1, -1 et -1, on aurait trouvé que le déterminant est aussi divisible par $x+a-b-c$. On verrait de même qu'il est encore divisible par $x+b-c-a$ et par $x+c-a-b$.

Par conséquent, le premier membre de notre équation est divisible par le produit

$$(x+a+b+c)(x+b-c-a)(x+c-a-b)(x+a-b-c).$$

Or le premier terme de ce produit est x^4, de même que celui

de notre déterminant; donc l'équation donnée revient à

$$(x+a+b+c)(x+b-c-a)(x+c-a-b)(x+a-b-c)=0$$

et admet les quatre racines

$$x_1=b+c-a,\quad x_2=c+a-b,$$
$$x_3=a+b-c,\quad x_4=-a-b-c.$$

* 119. Le premier membre de l'équation

$$\begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & b & x & x \\ x & x & c & x \\ x & x & x & d \end{vmatrix}=0$$

a tous ses éléments égaux à l'inconnue, à l'exception de ceux de la diagonale.

Retranchons la première ligne de chacune des trois suivantes : il nous vient

$$\begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x-a & b-x & 0 & 0 \\ x-a & 0 & c-x & 0 \\ x-a & 0 & 0 & d-x \end{vmatrix}=0;$$

et, en développant suivant les éléments de la première colonne,

$$a\begin{vmatrix} b-x & 0 & 0 \\ 0 & c-x & 0 \\ 0 & 0 & d-x \end{vmatrix}-(x-a)\begin{vmatrix} x & x & x \\ 0 & c-x & 0 \\ 0 & 0 & d-x \end{vmatrix}$$
$$+(x-a)\begin{vmatrix} x & x & x \\ b-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-x \end{vmatrix}-(x-a)\begin{vmatrix} x & x & x \\ b-x & 0 & 0 \\ 0 & c-x & 0 \end{vmatrix}=0;$$

on en tire immédiatement

$$a(b-x)(c-x)(d-x)-x(x-a)(c-x)(d-x)$$
$$-x(x-a)(b-x)(d-x)-x(x-a)(b-x)(c-x)=0,$$

puis, en ajoutant et retranchant $x(x-b)(x-c)(x-d)$,

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-x\left[\begin{array}{l}(x-a)(x-b)(x-c)\\ +(x-b)(x-c)(x-d)\\ +(x-c)(x-d)(x-a)\\ +(x-d)(x-a)(x-b)\end{array}\right]=0.$$

Posons

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=\varphi(x),$$

le facteur entre crochets sera égal à $\varphi'(x)$ et notre équation deviendra

$$\varphi(x)-x\varphi'(x)=0,$$

ou encore

$$3x^4-2(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-abcd=0.$$

120. Proposons-nous encore de résoudre l'équation

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ (a+x)^3 & (b+x)^3 & (c+x)^3 \\ (2a+x)^3 & (2b+x)^3 & (2c+x)^3 \end{vmatrix}=0.$$

Des deux dernières lignes retranchons la première multipliée respectivement par 1 et 8; nous obtenons, en divisant chaque fois par x,

$$x^2\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ 3a^2+3ax+x^2 & 3b^2+3bx+x^2 & 3c^2+3cx+x^2 \\ 12a^2+6ax+x^2 & 12b^2+6bx+x^2 & 12c^2+6cx+x^2 \end{vmatrix}=0;$$

retranchons maintenant la seconde de la troisième et divisons par 3 la ligne résultante; il nous vient

$$3x^2\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ 3a^2+3ax+x^2 & 3b^2+3bx+x^2 & 3c^2+3cx+x^2 \\ 3a^2+ax & 3b^2+bx & 3c^2+cx \end{vmatrix}=0;$$

enfin retranchons la dernière ligne de la deuxième, puis divisons par x; nous trouvons

$$3x^3\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ 2a+x & 2b+x & 2c+x \\ 3a^2+ax & 3b^2+bx & 3c^2+cx \end{vmatrix}=0.$$

Cette équation peut encore se simplifier. Retranchons la première colonne de chacune des deux suivantes et divisons par $b-a$ et $c-a$; nous obtenons

$$3x^3(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a^3 & a^2+ab+b^2 & a^2+ac+c^2 \\ 2a+x & 2 & 2 \\ 3a^2+ax & 3a+3b+x & 3a+3c+x \end{vmatrix}=0;$$

retranchons la seconde colonne de la troisième et divisons par $c-b$;

nous avons

$$3x^3(b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} a^3 & a^2+ab+b^2 & a+b+c \\ 2a+x & 2 & 0 \\ 3a^2+ax & 3a+3b+x & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cela fait, à la première colonne ajoutons à la fois la seconde multipliée par $-a$ et la troisième multipliée par ab; puis de la seconde retranchons la troisième multipliée par $a+b$; nous trouvons l'équation

$$3x^3(b-a)(c-a)(c-b)\begin{vmatrix} abc & -(bc+ca+ab) & a+b+c \\ x & 2 & 0 \\ 0 & x & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui revient à

$$3x^3(b-a)(c-a)(c-b)[(a+b+c)x^2+3(bc+ca+ab)x+6abc] = 0.$$

Les trois premières racines sont nulles et les deux dernières sont fournies par l'équation du second degré

$$(a+b+c)x^2+3(bc+ca+ab)x+6abc = 0.$$

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

§ I. Résolution des équations linéaires non homogènes. — § II. Résolution des équations linéaires homogènes. — § III. Résolution d'équations linéaires en nombre différent de celui des inconnues.

§ I. — Résolution des équations linéaires non homogènes.

121. Proposons-nous de résoudre le système des trois équations du premier degré à trois inconnues

$$(1)\quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3. \end{cases}$$

Appelons Δ le déterminant du système des premiers membres de ces équations, c'est-à-dire posons

$$(2)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Afin d'obtenir la valeur de l'inconnue x qui satisfait au système (1), multiplions ces trois équations respectivement par les déterminants mineurs $(b_2 c_3)$, $-(b_1 c_3)$, $+(b_1 c_2)$, pris alternativement avec le signe $+$ et le signe $-$, qui correspondent aux éléments a_1, a_2, a_3 de la première colonne du déterminant Δ, et ajoutons; nous obtenons l'équation

$$(3)\quad \begin{cases} x[a_1(b_2 c_3) - a_2(b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2)] \\ + y[b_1(b_2 c_3) - b_2(b_1 c_3) + b_3(b_1 c_2)] \\ + z[c_1(b_2 c_3) - c_2(b_1 c_3) + c_3(b_1 c_2)] \\ = k_1(b_2 c_3) - k_2(b_1 c_3) + k_3(b_1 c_2). \end{cases}$$

Or nous savons que (42 et 47)

$$a_1(b_2c_3) - a_2(b_1c_3) + a_3(b_1c_2) = \Delta,$$
$$b_1(b_2c_3) - b_2(b_1c_3) + b_3(b_1c_2) = 0,$$
$$c_1(b_2c_3) - c_2(b_1c_3) + c_3(b_1c_2) = 0;$$

d'ailleurs il est évident que

$$k_1(b_2c_3) - k_2(b_1c_3) + k_3(b_1c_2) = (k_1b_2c_3);$$

par conséquent notre équation (3) se réduit à

$$\Delta x \quad \text{ou} \quad (a_1b_2c_3) \times x = (k_1b_2c_3)$$

et donne

$$\text{(I)} \qquad x = \frac{(k_1b_2c_3)}{(a_1b_2c_3)} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Pour avoir la valeur de y, il suffirait de multiplier les trois équations (1) respectivement par les déterminants mineurs (a_2c_3), $-(a_1c_3)$, $+(a_1c_2)$ des éléments b_1, b_2, b_3 de la seconde colonne de Δ, et d'ajouter. On aurait la valeur de z en multipliant (1) par les déterminants mineurs (a_2b_3), $-(a_1b_3)$, $+(a_1b_2)$ et en ajoutant. On trouverait ainsi que

$$\text{(II)} \; y = \frac{(a_1k_2c_3)}{(a_1b_2c_3)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{(a_1b_2k_3)}{(a_1b_2c_3)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

On étendrait facilement cette méthode à un nombre quelconque d'équations linéaires non homogènes à autant d'inconnues.

L'inspection des valeurs (I) et (II) nous fournit l'énoncé suivant :

Règle. — *Étant données n équations non homogènes du premier degré à n inconnues, dont les seconds membres sont des quantités connues, la valeur de chaque inconnue est égale à une fraction ayant pour dénominateur le déterminant des inconnues et pour numérateur la valeur que prend ce déterminant, lorsqu'on y remplace les coefficients de l'inconnue par les termes connus.*

Cette solution a été indiquée pour la première fois par Leibnitz (*Lettre à L'Hospital du* 28 *avril* 1639), puis découverte de nouveau par Cramer (*Analyse des courbes algébriques*, 1750; Appendice, p. 658).

122. Exemple I.

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 3z &= 48, \\ 2x + 6y - 3z &= 18, \\ 8x - 3y + 2z &= 21. \end{aligned}$$

On a

$$\Delta = (a_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \\ 8 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -231,$$

$$(k_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} 48 & 3 & 3 \\ 18 & 6 & -3 \\ 21 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -693,$$

$$(a_1 k_2 c_3) = \begin{vmatrix} 5 & 48 & 3 \\ 2 & 18 & -3 \\ 8 & 21 & 2 \end{vmatrix} = -1155,$$

$$(a_1 b_2 k_3) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 48 \\ 2 & 6 & 18 \\ 8 & -3 & 21 \end{vmatrix} = -1386;$$

de sorte que

$$x = \frac{-693}{-231} = 3, \quad y = \frac{-1155}{-231} = 5, \quad z = \frac{-1386}{-231} = 6.$$

123. Exemple II.

$$4y - 3z = 1,$$
$$3x - 2z = 8,$$
$$5x - 7y = 2.$$

On trouve ici

$$\Delta = (a_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 23, \quad (k_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 8 & 0 & -2 \\ 2 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$(a_1 k_2 b_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 92, \quad (a_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

de sorte que

$$x = \frac{138}{23} = 6, \quad y = \frac{92}{23} = 4, \quad z = \frac{115}{23} = 5.$$

124. D'après la règle du n° **121**, le système des quatre équations

$$(3) \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u = k_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u = k_3, \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 u = k_4, \end{cases}$$

fournit pour les quatre inconnues les valeurs

$$\text{(III)} \quad x = \frac{(k_1 b_2 c_3 d_4)}{(a_1 b_2 c_3 d_4)}, \quad y = \frac{(a_1 k_2 c_3 d_4)}{(a_1 b_2 c_3 d_4)}, \quad z = \frac{(a_1 b_2 k_3 d_4)}{(a_1 b_2 c_3 d_4)}, \quad u = \frac{(a_1 b_2 c_3}{(a_1 b^2 c_3}$$

125. Exemple III. — Pour le système des quatre équations

$$y + z + u = a,$$
$$z + u + x = b,$$
$$u + x + y = c,$$
$$x + y + z = d,$$

on a, en désignant par D le dénominateur commun et

par N_x, N_y, N_z, N_u les numérateurs respectifs des valeurs des inconnues,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - b - c - d, \quad N_y = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & c & 0 & 1 \\ 1 & d & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2b - c - d - a.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix} = 2c - d - a - b, \quad N_u = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} = 2d - a - b - c;$$

de sorte que

$$x = \frac{b + c + d - 2a}{3}, \quad y = \frac{c + d + a - 2b}{3},$$

$$z = \frac{d + a + b - 2c}{3}, \quad u = \frac{a + b + c - 2d}{3}.$$

126. Considérons en général un système de n équations non homogènes du premier degré à autant d'inconnues

$$(4) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + l_1u = k_1 & \text{ou} \quad S_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + l_2u = k_2 & \text{ou} \quad S_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + l_3u = k_3 & \text{ou} \quad S_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \quad \ldots\ldots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + l_nu = k_n & \text{ou} \quad S_n = 0, \end{cases}$$

et soit Δ le déterminant des premiers membres de ces équations, *que nous supposerons différent de zéro.*

Pour avoir la valeur de x, multiplions ces équations, à partir de la première, par les déterminants mineurs Δ_{a_1}, Δ_{a_2}, Δ_{a_3}, ..., Δ_{a_n}, respectivement pris avec le signe $+$ et -1, qui correspondent aux coefficients a_1, a_2, a_3, ..., a_n de l'inconnue x. Si nous faisons la somme des

produits, il nous viendra l'équation

$$\begin{aligned}
& x\left[a_1\Delta_{a_1} - a_2\Delta_{a_2} + a_3\Delta_{a_3} - \ldots - (-1)^{n-1}a_n\Delta_{a_n}\right] \\
& + y\left[b_1\Delta_{a_1} - b_2\Delta_{a_2} + b_3\Delta_{a_3} - \ldots - (-1)^{n-1}b_n\Delta_{a_n}\right] \\
& + z\left[c_1\Delta_{a_1} - c_2\Delta_{a_2} + c_3\Delta_{a_3} - \ldots - (-1)^{n-1}c_n\Delta_{a_n}\right] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + u\left[l_1\Delta_{a_1} - l_2\Delta_{a_2} + l_3\Delta_{a_3} - \ldots - (-1)^{n-1}l_n\Delta_{a_n}\right] \\
& = \left[k_1\Delta_{a_1} - k_2\Delta_{a_2} + k_3\Delta_{a_3} - \ldots - (-1)^{n-1}k_n\Delta_{a_n}\right].
\end{aligned}$$

Le coefficient de l'inconnue x est égal au déterminant Δ (**42**); les coefficients de toutes les autres inconnues sont nuls, puisqu'ils s'obtiennent en remplaçant dans Δ la première colonne successivement par chacune des autres colonnes (**47**). Le terme connu est ce que devient Δ, lorsqu'on y remplace les a par les k qui représentent les termes connus dans le système (4). On a donc, en faisant usage de la notation abrégée **17** *bis*),

$$\text{(IV)}\quad x = \frac{(k_1 b_2 c_3 \ldots l_n)}{(a_1 b_2 c_3 \ldots l_n)},\ y = \frac{(a_1 k_2 c_3 \ldots l_n)}{(a_1 b_2 c_3 \ldots l_n)},\ z = \frac{(a_1 b_2 k_3 \ldots l_n)}{(a_1 b_2 c_3 \ldots l_n)},\ \ldots,\ u = \frac{(a_1 b_2 c_3 \ldots}{(a_1 b_2 c_3 \ldots}$$

Toutes ces fractions ont même dénominateur Δ; le numérateur de chaque fraction est le déterminant que l'on obtient, en remplaçant dans Δ les coefficients de l'inconnue correspondante par les termes connus. Cette composition est bien conforme à la règle du n° **121**.

127. *Les valeurs* (IV) *des inconnues satisfont toujours au système* (4) *des équations proposées.*

En effet, pour avoir les inconnues, nous avons formé les équations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
& S_1\Delta_{a_1} - S_2\Delta_{a_2} + S_3\Delta_{a_3} - \ldots - (-1)^{n-1}S_n\Delta_{a_n} = 0, \\
& S_1\Delta_{b_1} - S_2\Delta_{b_2} + S_3\Delta_{b_3} - \ldots - (-1)^{n-1}S_n\Delta_{b_n} = 0, \\
& S_1\Delta_{c_1} - S_2\Delta_{c_2} + S_3\Delta_{c_3} - \ldots - (-1)^{n-1}S_n\Delta_{c_n} = 0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& S_1\Delta_{l_1} - S_2\Delta_{l_2} + S_3\Delta_{l_3} - \ldots - (-1)^{n-1}S_n\Delta_{l_n} = 0.
\end{aligned}\right.$$

D'abord il est évident que toutes les valeurs des inconnues, qui vérifient le système (4), satisfont à ce dernier système (5).

Je dis que réciproquement toutes les valeurs des inconnues, qui satisfont à ce dernier système (5), vérifient le système donné (4).

En effet, multiplions les équations (5) respectivement par a_1, $-b_1$, $+c_1$, ..., $(-1)^{n-1}l_1$, et ajoutons verticalement; dans le résultat les

coefficients de $S_2, S_3, \ldots, S_n$ s'annulent (47), et il reste

$$\left[a_1\Delta_{a_1} - b_1\Delta_{b_1} + c_1\Delta_{c_1} - \ldots - (-1)^{n-1} l_1\Delta_{l_1}\right] S_1 = 0$$

ou

$$\Delta S_1 = 0;$$

et, comme Δ est différent de zéro, il s'ensuit qu'on a $S_1 = 0$.

On verrait de même que les valeurs des inconnues qui satisfont au système (5) annulent aussi les polynômes $S_2, S_3, \ldots, S_n$; par suite, les valeurs fournies par le système (5) ou par son équivalent (IV) vérifient les équations (4).

Donc les valeurs (IV) *satisfont au système donné* (4).

128. Nous avons supposé jusqu'ici que le déterminant Δ des coefficients des inconnues n'est pas nul.

Voyons maintenant ce qui arrive lorsque *le déterminant* Δ *se réduit à zéro*. Dans ce cas, généralement, les n^2 déterminants mineurs de Δ ne sont pas tous nuls.

Admettons que le déterminant mineur Δ_{e_i}, par exemple, soit différent de zéro.

Soit ξ l'inconnue qui, dans les équations (4), est affectée des coefficients e. Dans le système (5) se trouve l'équation

$$(6) \quad S_1\Delta_{e_1} - S_2\Delta_{e_2} + \ldots + (-1)^{i-1} S_i\Delta_{e_i} + \ldots + (-1)^{n-1} S_n\Delta_{e_n} = 0,$$

où le coefficient Δ_{e_i} de S_i n'est pas nul; par conséquent cette équation peut remplacer l'équation $S_i = 0$ dans le système (4).

Si dans cette équation (6) nous ordonnons par rapport aux inconnues $x, y, \ldots$, elle deviendra

$$\begin{aligned} &x(a_1\Delta_{e_1} - a_2\Delta_{e_2} + \ldots) + y(b_1\Delta_{e_1} - b_2\Delta_{e_2} + \ldots) + z(c_1\Delta_{e_2} - c_2\Delta_{e_2} + \ldots) + \ldots \\ &\quad + \xi(e_1\Delta_{e_1} - c_2\Delta_{e_2} + \ldots) + \ldots + u(l_1\Delta_{e_1} - l_2\Delta_{e_2} + \ldots) \\ &= k_1\Delta_{e_1} - k_2\Delta_{e_2} + \ldots + (-1)^{n-1} k_n\Delta_{e_n}; \end{aligned}$$

mais les coefficients des inconnues, autres que ξ, s'annulent (47) et celui de ξ est égal à Δ; par conséquent notre équation (6) se réduit à

$$(7) \qquad \Delta\xi = k_1\Delta_{e_1} - k_2\Delta_{e_2} + \ldots + (-1)^{n-1} k_n\Delta_{e_n}.$$

Or nous avons supposé que $\Delta = 0$; par conséquent, si le second membre

$$(8) \qquad k_1\Delta_{e_1} - k_2\Delta_{e_2} + \ldots + (-1)^{n-1} k_{n-1}\Delta_{e_n}$$

de (7) est différent de zéro, cette équation est impossible. Donc dans ce cas le système proposé (4) est impossible.

Si au contraire le second membre (8) s'annule, l'équation (7) se changera

en une identité; par suite l'équation $S_i = 0$ du système (4), qu'elle remplace, est une conséquence de toutes les autres équations ou d'une partie d'entre elles; donc le système (4) se réduit à un système de $n-1$ équations

$$(9) \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad \ldots, \quad S_{i-1} = 0, \quad S_{i+1} = 0, \quad \ldots, \quad S_n = 0,$$

à n inconnues.

Dans le système réduit (9) faisons passer dans le second membre les termes $e_1\xi, e_2\xi, \ldots, e_{i-1}\xi, e_{i+1}\xi, \ldots, e_n\xi$, qui contiennent l'inconnue ξ. Si nous traitons ξ comme une quantité connue, nous aurons un système de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues, dans lequel le déterminant Δ' des inconnues est précisément Δ_{e_i}. En effet, dans Δ' n'existe aucun des éléments e qui servent de coefficients à ξ; de plus il ne s'y trouve aucun des coefficients $a_i, b_i, \ldots, l_i$ de l'équation $S_i = 0$ qui a été supprimée; par conséquent Δ' peut se déduire de Δ en y supprimant la ligne et la colonne qui contiennent l'élément e_i; donc on a $\Delta' = \Delta_{e_i}$.

Puisque Δ_{e_i} est supposé différent de zéro, il s'ensuit que le système des équations (9) admet, pour les inconnues $x, y, z, \ldots$, une solution et une seule.

Ces valeurs de $x, y, z, \ldots$, étant exprimées en fonctions de ξ, le système des équations (4) est nécessairement indéterminé; car à chaque valeur arbitraire donnée à ξ correspond un système de valeurs pour $x, y, z, \ldots$.

Donc, *lorsque le déterminant Δ est égal à zéro et que l'un au moins Δ_{e_i} des déterminants mineurs est différent de zéro, le système des équations* (4) *est* impossible *ou* indéterminé, *suivant que le polynôme*

$$k_1\Delta_{e_1} - k_2\Delta_{e_2} + \ldots + (-1)^{n-1}k_n\Delta_{e_n}$$

est *ou* non *différent de zéro.*

129. Si les n^2 déterminants mineurs du premier ordre étaient tous nuls dans Δ, l'un au moins des $\frac{n^2(n-1)^2}{1.4}$ déterminants mineurs du second ordre sera en général différent de zéro.

Dans ce cas on verrait, d'une manière analogue, que le système (4) est ou impossible ou indéterminé, et que, s'il est indéterminé, il se réduit à $n-2$ équations à n inconnues.

En général, si tous les déterminants mineurs de Δ, jusqu'à l'ordre $n-p$ inclusivement, étaient nuls, le système (4) se réduirait, dans le cas de l'indétermination, à $n-p$ équations à n inconnues.

130. Résolution d'un système de n équations linéaires à n inconnues, dont une seule n'est pas homogène. — Supposons que dans les équations (1) du n° **121** les seconds membres

soient nuls, à l'exception d'un seul, k_1 par exemple. Le numérateur de la valeur (I) de x se réduira à

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k_1 \Delta_{a_1},$$

et il viendra

$$\Delta . x = k_1 \Delta_{a_1}.$$

On verrait de même, au moyen des valeurs (II), que

$$\Delta . y = - k_1 \Delta_{b_1}, \quad \Delta . z = k_1 \Delta_{c_1}.$$

On en tire

$$\text{(V)} \qquad \frac{x}{\Delta_{a_1}} = \frac{y}{-\Delta_{b_1}} = \frac{z}{\Delta_{c_1}} = \frac{k_1}{\Delta}.$$

L'inspection de ces valeurs nous fournit l'énoncé suivant :

Lorsque, dans un système de n équations linéaires à n inconnues, les seconds membres de $n - 1$ de ces équations sont nuls, les valeurs des inconnues sont proportionnelles aux multiplicateurs, dans Δ, des coefficients qui affectent les inconnues dans l'équation non homogène.

La résolution des équations proposées se trouve ainsi ramenée à celle des équations (V).

§ II. — Résolution des équations linéaires homogènes.

131. Condition pour que n équations homogènes du premier degré à n inconnues soient compatibles. — Les équations (1) du n° 121 seront homogènes, si l'on a en même temps

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0.$$

Si ces conditions sont remplies, le système (1) du n° 121 se réduira au suivant :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0. \end{cases}$$

Les égalités (V) du n° 130 subsistent, quel que soit k_1; elles auront donc encore lieu si $k_1 = 0$, ce qui exige que l'on ait $\Delta = 0$ ou bien

$$(\mathrm{I}) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, *pour que n équations homogènes du premier degré à n inconnues soient compatibles, il faut et il suffit que le déterminant des inconnues soit nul.*

Si ce déterminant Δ était différent de zéro, il faudrait que l'on eût à la fois $x = y = z = 0$.

Nous voyons en même temps, par les égalités (V) du n° 130, que :

Les valeurs des inconnues sont proportionnelles aux multiplicateurs, dans Δ, des coefficients qui affectent les inconnues dans l'une quelconque des équations proposées.

132. La condition (I) peut d'ailleurs se déterminer directement de la manière suivante :

Multiplions la première des équations (1) par le déterminant mineur $(b_2 c_3)$, la seconde par $-(b_1 c_3)$ et la troisième par $(b_1 c_2)$ et ajoutons; nous formons ainsi l'équation

$$\begin{aligned} &[a_1(b_2 c_3) - a_2(b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2)]x \\ &+ [b_1(b_2 c_3) - b_2(b_1 c_3) + b_3(b_1 c_2)]y \\ &+ [c_1(b_2 c_3) - c_2(b_1 c_3) + c_3(b_1 c_2)]z = 0, \end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = 0.$$

Les coefficients de y et z, étant des déterminants à deux colonnes identiques, sont nuls (26); il reste donc l'égalité

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = 0,$$

qui fournit la relation (I), à moins que l'on n'ait à la fois $x = y = z = 0$.

133. Lorsque cette condition (I) est remplie, on peut obtenir directement le rapport des inconnues x, y et z.

En effet, éliminons successivement z et x entre les deux premières des équations (1); nous obtenons les égalités

$$(c_1 a_2 - a_1 c_2)x - (b_1 c_2 - c_1 b_2)y = 0,$$
$$(a_1 b_2 - b_1 a_2)y - (c_1 a_2 - a_1 c_2)z = 0,$$

qui donnent

$$(2) \qquad \frac{x}{b_1 c_2 - c_1 b_2} = \frac{y}{c_1 a_2 - a_1 c_2} = \frac{z}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

Or la relation de condition $\Delta = 0$, revenant à l'égalité

$$(3) \quad \Delta = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + c_1 a_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 - c_1 b_2 a_3 = 0,$$

peut s'écrire

$$\Delta = a_3(b_1 c_2 - c_1 b_2) + b_3(c_1 a_2 - a_1 c_2) + c_3(a_1 b_2 - b_1 a_2) = 0;$$

en la comparant aux équations (2), on voit de suite que les inconnues sont proportionnelles aux multiplicateurs, dans Δ, des coefficients a_3, b_3, c_3 qui affectent les inconnues dans la troisième des équations (1).

Multiplions par c_1 l'expression (3) de Δ, après l'avoir augmentée et diminuée de $c_1 b_2 a_3$; nous en tirons l'égalité

$$(4) \qquad \frac{b_1 c_3 - c_1 b_3}{b_1 c_3 - c_1 b_3} = \frac{c_1 a_3 - a_1 c_3}{c_1 a_3 - a_1 c_3} = \frac{a_1 b_3 - b_1 a_3}{a_1 b_3 - b_1 a_3},$$

et cette dernière par extension. Si nous multiplions actuellement les rapports (2) et (4) par ordre, nous obtenons aussi les égalités

$$\frac{x}{b_1 c_3 - c_1 b_3} = \frac{y}{c_1 a_3 - a_1 c_3} = \frac{z}{a_1 b_3 - b_1 a_3},$$

qu'il suffit de comparer à l'expression (3) de Δ, mise sous la forme

$$a_3(b_1 c_3 - c_1 b_3) + b_3(c_1 a_3 - a_1 c_3) + c_3(a_1 b_3 - b_1 a_3),$$

pour établir notre proposition relativement à la seconde des équations (1).

§ III. — Résolution d'équations linéaires en nombre différent de celui des inconnues.

134. Condition pour que n équations non homogènes du premier degré, à $n-1$ inconnues, soient compatibles. — Soit donné le système des *quatre* équations à *trois* inconnues x, y, z,

$$(1)\quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + k_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + k_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + k_3 = 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + k_4 = 0, \end{cases}$$

que nous supposerons simultanées, c'est-à-dire admettant pour x, y, z un même système de valeurs. Nous pouvons rendre ces équations homogènes, en y remplaçant les inconnues par leurs rapports à une quantité arbitraire u; elles deviennent ainsi

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + k_1u &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + k_2u &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + k_3u &= 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + k_4u &= 0. \end{aligned}$$

Celles-ci, en vertu de la condition établie au n° **131**, ne sont compatibles que si le déterminant des inconnues est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$(\mathrm{I})\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & k_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & k_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc:

Pour que n équations non homogènes du premier degré, à $n-1$ inconnues, soient compatibles, il faut et il suffit qu'on

obtienne zéro pour la valeur du déterminant des mêmes équations rendues homogènes.

135. Deuxième méthode pour résoudre un système de n équations non homogènes du premier degré, à n inconnues. — Soit à résoudre le système des trois équations à trois inconnues

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons adjoindre à ce système l'équation du premier degré à trois inconnues

$$(3)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

où les coefficients α, β, γ et δ sont encore indéterminés.

Si nous supposons que l'équation (3) soit satisfaite par les valeurs des inconnues x, y, z qui vérifient le système (2), nous aurons un système de *quatre* équations (3) et (2) à *trois* inconnues x, y, z, lesquelles équations devront admettre les mêmes valeurs pour ces inconnues.

Or ces équations, d'après la condition établie au numéro précédent, ne seront compatibles que si leur déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

est nul, c'est-à-dire si

$$(4)\qquad \alpha D_\alpha - \beta D_\beta + \gamma D_\gamma - \delta\Delta = 0,$$

où l'on a

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad D_\beta = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

$$D_\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Il s'ensuit donc que, les coefficients α, β, γ, δ devant satisfaire à la relation de condition (4), si trois d'entre eux, α, β et γ, restent indéterminés, la valeur du quatrième δ sera fournie par l'équation (4) et se

trouvera exprimée en fonction de α, β, γ et des coefficients donnés des équations (2).

Cela étant, éliminons δ entre (3) et (4); nous obtenons l'égalité

$$\alpha\left(x+\frac{D_\alpha}{\Delta}\right)+\beta\left(y-\frac{D_\beta}{\Delta}\right)+\gamma\left(z+\frac{D_\gamma}{\Delta}\right)=0.$$

Celle-ci, devant être satisfaite quels que soient α, β et γ, exige que l'on ait

$$x=-\frac{D_\alpha}{\Delta}=-\frac{(d_1b_2c_3)}{(a_1b_2c_3)},\quad y=\frac{D_\beta}{\Delta}=-\frac{(a_1d_2c_3)}{(a_1b_2c_3)},\quad z=-\frac{D_\gamma}{\Delta}=-\frac{(a_1b_2d_3)}{(a_1b_2c_3)}.$$

Ce qui fournit, pour les inconnues, des valeurs qui deviendront identiques avec celles du n° 121, si l'on a soin de remplacer d_1, d_2, d_3 par $-k_1$, $-k_2$, $-k_3$.

$$* \frac{(b_1 c_2 d_3)}{(a_1 b_2 c_3)} \qquad * \frac{(a_1 c_2 d_3)}{(a_1 b_2 c_3)}$$

CHAPITRE III.

LES RÉSULTANTS.

§ I. Résultante de deux équations algébriques. — § II. Méthodes d'élimination entre deux équations. — § III. Calcul des racines communes à deux équations. — § IV. Calcul des racines doubles d'une équation. — § V. Les différences des racines d'une équation. — § VI. Résolution de l'équation du troisième degré. — § VII. Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

§ I. — Résultante de deux équations algébriques.

136. Définition. — Étant donné un système de n équations non homogènes entre $n-1$ variables, si l'on combine ces n équations entre elles, de manière à éliminer les $n-1$ variables, on obtient une équation $R=0$, dont le premier membre ne contient que les coefficients des n équations données. Le premier membre R de cette *équation résultante* a été nommé par Bezout le *résultant* ou l'éliminant du système donné (*Histoire de l'Académie de Paris*, 1764, p. 288), et l'équation elle-même $R=0$ porte le nom de *résultante* (*æquatio finalis genua*).

C'est en cherchant la résultante de n équations du premier degré à $n-1$ inconnues ou celle de deux équations algébriques à une inconnue que Leibnitz a découvert les déterminants (*Œuvres mathématiques de Leibnitz*, publiées par Gerhardt, t. II, p. 239).

La résultante forme une relation entre les coefficients du système donné; elle exprime la condition pour que les équations proposées soient compatibles, c'est-à-dire pour qu'elles puissent être satisfaites par un même système de valeurs attribuées aux inconnues.

137. Résultante d'un système de deux équations du premier degré à une inconnue. — La résultante des deux équations

$$ax + b = 0, \quad a'x + b' = 0$$

s'obtient en éliminant la variable x entre ces deux équations. Or, en vertu du théorème du n° 134, ces équations ne seront compatibles que si le déterminant de leurs premiers membres est nul. On trouve ainsi l'équation

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad ab' - ba' = 0,$$

qui est la résultante demandée.

138. Résultante d'un système de deux équations du second degré à une inconnue. — Pour avoir la résultante du système des deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

on multiplie la première par a', la seconde par a, et l'on retranche le premier résultat du second; on obtient ainsi l'équation

$$(ab' - ba')x - (ca' - ac') = 0;$$

elle donne pour x la valeur

$$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'},$$

qu'il suffit de substituer dans l'une des deux équations données, pour avoir l'équation résultante

$$(ca' - ac')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0.$$

Cette équation exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations proposées soient compatibles, c'est-à-dire pour qu'elles aient une racine commune. La racine commune est

$$x = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} = \frac{bc' - cb'}{ca' - ac'}.$$

139. Résultante d'un système de deux équations algébriques à une inconnue. — Soient données les deux équations

$$(1) \qquad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

$$(2) \qquad \varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0,$$

l'une du degré m et l'autre du degré n, n pouvant être égal à m. Nous allons déterminer la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations aient une racine commune.

Admettons qu'on connaisse les m racines de l'équation (1) et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ces racines. Si toutes ces racines sont finies, le coefficient a_0 sera différent de zéro et l'on aura

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Pour que l'une des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ satisfasse à l'équation (2), il faut et il suffit que l'un des résultats

$$\varphi(\alpha_1), \quad \varphi(\alpha_2), \quad \ldots, \quad \varphi(\alpha_m)$$

soit nul, ce qui exige que l'on ait

$$\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m) = 0.$$

Réciproquement, si ce produit est nul, l'un de ses facteurs se réduit nécessairement à zéro; par suite, l'une des racines de l'équation (1) satisfait à l'équation (2).

Ainsi, *pour que l'équation $f(x) = 0$, dont les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont différentes de l'infini, ait une racine commune avec l'équation $\varphi(x) = 0$, il faut et il suffit que le produit*

$$P = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m)$$

soit égal à zéro.

On verrait de même que l'égalité

$$Q = f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_n) = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'une des racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, supposées finies, de l'équation $\varphi(x) = 0$ satisfasse à l'équation $f(x) = 0$.

140. Cas où les deux équations admettent l'une ou toutes les deux des racines infinies. — Supposons que la racine α_1 soit infinie. Au lieu de substituer α_1 dans l'équation $\varphi(x) = 0$, on remplace l'inconnue par $\frac{1}{\alpha_1}$ dans l'équation aux inverses $y^n \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = 0$.

Le premier membre résultant $\frac{\varphi(\alpha_i)}{\alpha_i^n}$, ayant ses deux termes infinis, est indéterminé; on calculera donc la vraie valeur R_i de ce rapport et l'équation $R_i = 0$ exprimera la condition pour que la racine α_i satisfasse à l'équation $\varphi(x) = 0$.

Il s'ensuit que, si l'équation $f(x) = 0$ admet plusieurs racines infinies $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$, pour qu'elle ait une racine commune avec l'équation $\varphi(x) = 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\alpha_1} \times \frac{\varphi(\alpha_2)}{\alpha_2} \times \ldots \times \frac{\varphi(\alpha_i)}{\alpha_i} \times \varphi(\alpha_{i+1})\varphi(\alpha_{i+2})\ldots\varphi(\alpha_m) = 0.$$

Or on sait que

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\ldots\alpha_m = \pm\frac{a_m}{a_0},$$

selon que m est pair ou impair, de sorte que

$$\frac{1}{\alpha_1^n\alpha_2^n\ldots\alpha_i^n} = \frac{\pm a_0^n(\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\ldots\alpha_m)^n}{a_m^n};$$

par suite, la condition précédente revient à l'égalité

$$\pm(\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\ldots\alpha_m)^n \times \frac{\alpha_0^n\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m)}{a_m^n} = 0,$$

où l'on peut diviser le premier membre par le produit

$$\pm\frac{1}{a_m^n}(\alpha_{i+1}\alpha_{i+2}\ldots\alpha_m)^n,$$

qui est fini et différent de zéro; donc l'équation

$$(3) \qquad a_0^n\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m) = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations données (1) et (2) aient une racine commune [1].

Mais nous avons trouvé que l'équation

$$\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m) = 0$$

---

[1] Cette démonstration suppose que toutes les racines $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_m$, qui ne sont pas infinies, soient toutes différentes de zéro. Si l'une ou plusieurs d'entre elles étaient nulles, on conçoit qu'en modifiant les coefficients de (1) et de (2) on puisse rendre ces racines différentes de zéro (144, 1°). Or le théorème est vrai pour des racines très-petites; donc il existera encore, à la limite, pour des racines nulles.

exprime la condition pour que les équations données aient une racine commune, lorsque l'équation (1) n'admet que des racines finies; comme dans ce cas le coefficient a_0 est différent de zéro, on voit que cette deuxième équation de condition est une conséquence de la première (3).

Donc, *quelle que soit la nature des racines* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *de l'équation* $f(x) = 0$, *la relation*

$$\text{(I)} \qquad R = a_0^n \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m) = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ *admettent une racine commune.*

On verrait de même que la relation

$$\text{(II)} \qquad R_1 = b_0^m f(\beta_1) f(\beta_2)\ldots f(\beta_n) = 0$$

exprime la même condition, et cela quelles que soient les racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ de l'équation $\varphi(x) = 0$.

141. ***Les deux produits*** **R** ***et*** **R**$_1$ ***ne diffèrent que par un facteur constant,*** attendu qu'ils expriment chacun le résultant du système des deux équations (1) et (2).

Pour le prouver, d'ailleurs, prenons les deux identités

$$\varphi(x) = b_0(x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_n),$$
$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_m);$$

dans la première, remplaçons x successivement par les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de l'équation $f(x) = 0$, et dans la seconde remplaçons x successivement par les racines $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ de l'équation $\varphi(x) = 0$. Si nous faisons chaque fois le produit des résultats, nous obtiendrons les deux égalités

$$\begin{aligned}
P = {} & b_0(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)\ldots(\alpha_1 - \beta_n) \\
& \times b_0(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)\ldots(\alpha_2 - \beta_n) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \times b_0(\alpha_m - \beta_1)(\alpha_m - \beta_2)\ldots(\alpha_m - \beta_n), \\
Q = {} & a_0(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_1 - \alpha_2)\ldots(\beta_1 - \alpha_m) \\
& \times a_0(\beta_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)\ldots(\beta_2 - a_m) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \times a_0(\beta_n - \alpha_1)(\beta_n - \alpha_2)\ldots(\beta_n - \alpha_m).
\end{aligned}$$

Dans les deux produits P et Q, les facteurs binômes sont

respectivement égaux et de signes contraires; ils sont au nombre de m fois n dans P et de n fois m dans Q, c'est-à-dire de mn fois dans chacun d'eux. Les autres facteurs b^m de P et a_0^n de Q deviendront égaux, si l'on multiplie P par a_0^n et Q par b_0^m; donc on a

$$a_0^n P = (-1)^{mn} b_0^m Q$$

ou, en ayant égard aux expressions (I) et (II),

$$R = (-1)^{mn} R_1.$$

Ainsi *les deux résultants* R *et* R_1 *ne diffèrent que par un facteur constant, qui est* $+1$ *ou* -1, *suivant que le produit mn est pair ou impair.*

141 *bis*. Applications. — 1° Reprenons les deux équations du second degré à une inconnue du n° 138, et soient α et β les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

α' et β' celles de la seconde

$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Le résultant $a_0^n P$ sera ici

$$\begin{aligned} R &= a'^2(a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c) \\ &= a'^2[a^2\alpha'^2\beta'^2 + ab\alpha'\beta'(\alpha' + \beta') + ac(\alpha'^2 + \beta'^2) + b^2\alpha'\beta' + bc(\alpha' + \beta') + c^2]; \end{aligned}$$

or on sait que

$$\alpha'\beta' = \frac{c'}{a'}, \quad \alpha' + \beta' = -\frac{b'}{a'}, \quad \text{d'où} \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = \frac{b'^2 - 2a'c'}{a'^2};$$

par suite on trouve que

$$R = a^2c'^2 - abb'c' + ac(b'^2 - 2a'c') + b^2a'c' - bca'b' + c'^2a'^2$$

ou

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

pour le résultant de nos deux équations.

Ce résultat a été obtenu plus rapidement au n° 138 par l'élimination directe de x entre les deux équations données.

2° Considérons encore l'équation du troisième degré

$$f(x) = x^3 + px + q = 0$$

et sa dérivée

$$f'(x) = 3x^2 + p = 0.$$

Si nous désignons par a, b, c les trois racines de la première et par α, $-\alpha$ celles de la seconde, le résultant des deux polynômes $f(x)$ et $f'(x)$ sera

$$f'(a)f'(b)f'(c) = -(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$$

ou

$$3^3 f(\alpha)f(-\alpha) = 27(\alpha^3 + p\alpha + q)(-\alpha^3 - p\alpha + q) = 4p^3 + 27q^2,$$

en remplaçant α^2 par sa valeur $-\frac{p}{3}$.

Nous avons donc

$$R = -(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 = 4p^3 + 27q^2.$$

Cette égalité prouve que l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$ 1° a ses racines réelles, si la quantité $4p^3 + 27q^2$ est négative; 2° a deux racines égales, si cette même quantité est égale à zéro.

142. Nature du résultant de deux équations à une inconnue. — Nous voyons, par les expressions (I) et (II) du n° 140, que si l'on connaissait les racines de deux équations (1) et (2), on pourrait mettre leur résultant sous deux formes distinctes.

Considérons la première forme

$$R = a_0^n \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m),$$

qui est exprimée en valeur des racines de l'équation (1). La quantité $\varphi(\alpha_1)$ y est une fonction algébrique rationnelle et entière du premier degré des coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$ de l'équation $\varphi(x) = 0$; de même $\varphi(\alpha_2)$ est une fonction algébrique rationnelle et entière du premier degré des mêmes coefficients, et ainsi de suite. Le produit de ces m facteurs de R sera donc une fonction algébrique rationnelle et entière du $m^{\text{ième}}$ degré des coefficients de l'équation (2).

Si nous considérons la seconde forme

$$R_1 = b_0^m f(\beta_1)f(\beta_2)\ldots f(\beta_n),$$

qui est exprimée en valeur des racines de l'équation (2), nous voyons que $f(\beta_1)$ y est une fonction algébrique rationnelle et entière des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m$ de l'équation $f(x) = 0$; il en est de même des $n-1$ facteurs suivants; par suite, le produit de ces n facteurs est une fonction algébrique rationnelle et entière du $n^{\text{ième}}$ degré des coefficients de l'équation (1).

Or les deux expressions R et R_1 diffèrent tout au plus par le signe. Donc *le résultant de deux équations à une inconnue, l'une du $m^{ième}$ et l'autre du $n^{ième}$ degré, est une fonction algébrique, rationnelle et entière des coefficients de ces deux équations; il est du $n^{ième}$ degré par rapport aux coefficients de la première équation et du $m^{ième}$ degré par rapport à ceux de la seconde.*

143. Réciproquement, *lorsqu'une fonction algébrique, rationnelle et entière Δ est du $m^{ième}$ degré par rapport aux coefficients d'une équation du $n^{ième}$ degré $\varphi(x) = 0$, et du $n^{ième}$ degré par rapport aux coefficients d'une équation du $m^{ième}$ degré $f(x) = 0$, si de plus cette fonction Δ s'annule chaque fois que les deux équations ont une racine connue, Δ ne diffère du résultant* R *que par un facteur numérique; en d'autres termes, la fonction Δ est le résultant des deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$.*

Considérons, en effet, l'un quelconque des coefficients de l'une des deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$, ou (1) et (2), par exemple le coefficient a_i de la première.

La fonction Δ est un polynôme du degré n par rapport à a_i; le résultant R est aussi un polynôme du même degré en a_i.

Soient a_i', a_i'', ..., $a_i^{(n)}$ les n racines de l'équation $R = 0$, que l'on obtient en égalant à zéro le résultant R considéré comme une fonction de a_i. Toutes les fois que a_i sera égal à l'une des n racines de cette équation $R = 0$, le résultant R sera nul; par suite les deux équations (1) et (2) ont une racine commune; donc la fonction proposée Δ s'annulera aussi.

Ainsi la fonction Δ devient nulle pour toutes les valeurs de a_i qui annulent le résultant R; d'ailleurs Δ et R sont du même degré par rapport à a_i; ils ne diffèrent donc que par un facteur indépendant de a_i.

On verrait de même que la fonction Δ et le résultant R ne peuvent différer que par des facteurs indépendants de tout autre coefficient de $f(x)$ et $\varphi(x)$; donc la fonction Δ est, à un facteur numérique près, le résultant des deux équations (1) et (2).

144. Propriétés du résultant de deux équations à une inconnue. — 1° *Le résultant* R *ne change pas lorsqu'on change x en $x + h$ dans les deux équations;* car cela revient à diminuer toutes les racines des deux équations d'une même quantité h, ce qui ne change pas les différences $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_1 - \beta_2$, ..., $\alpha_m - \beta_n$ entre les racines de la première équation et celles de la seconde, et par suite n'altère pas les valeurs de P et de Q.

2° *Le résultant* R *ne change pas* non plus *lorsqu'on remplace x par $\frac{1}{x}$ dans les deux équations;* car la différence entre une racine a_i de la

première équation et une racine β_j de la seconde devenant

$$\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\beta_j} = \frac{\beta_j - \alpha_i}{\alpha_i \beta_j},$$

le nouveau produit P′ sera égal à la $m^{\text{ième}}$ puissance du nouveau premier coefficient b_n de $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ par

$$\frac{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)\ldots(\beta_n - \alpha_m)}{(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)^n (\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n)^m}.$$

Or dans cette fraction le numérateur est égal (139) à $\frac{(-1)^{mn} P}{b_0^{mn}}$, et le dénominateur est égal à $\pm \frac{a_m^n b_n^m}{a_0^n b_0^m}$; donc on a

$$P' = \pm \frac{(-1)^{mn} a_0^n P}{a_m^n};$$

il viendra donc pour le nouveau résultant

$$R' = a_m^n P' = \pm (-1)^{mn} a_0^n P = \pm R.$$

Donc le résultant change tout au plus de signe.

§ II. — Méthodes d'élimination entre deux équations algébriques.

145. Méthode d'élimination d'Euler [1]. — Lorsque deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, des degrés m et n, admettent une racine commune $x = \alpha$, leurs premiers membres sont divisibles par $x - \alpha$; par conséquent, si l'on multiplie $f(x)$ par le produit des $n - 1$ autres facteurs de $\varphi(x)$, et $\varphi(x)$ par le produit des $m - 1$ autres facteurs de $f(x)$, on devra obtenir des résultats identiques.

Il s'ensuit que, si l'on multiplie $f(x)$ par une fonction arbitraire de x du degré $n - 1$, qui y introduit n constantes arbitraires; puis $\varphi(x)$ par une fonction arbitraire de x du degré $m - 1$, qui y introduit m constantes arbitraires; et que

[1] *Histoire de l'Académie de Berlin*, 1764, p. 96.

l'on égale terme à terme les deux fonctions de degré $m+n-1$ ainsi formées, on aura $m+n$ équations homogènes et du premier degré par rapport aux $m+n$ constantes introduites.

Pour que ces $m+n$ équations soient compatibles, il faudra que leur déterminant soit nul (131). On obtiendra ainsi la résultante des deux équations données.

Supposons que les deux équations

$$ax^2+bx+c=0, \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

aient une racine commune. Nous devons avoir identiquement, quel que soit x,

$$(A'x+B')(ax^2+bx+c)=(Ax+B)(a'x^2+b'x+c')$$

ou

$$\begin{aligned}(A'a-Aa')x^3+(A'b+B'a-Ab'-Ba')x^2\\ +(A'c+B'b-Ac'-Bb')x+B'c-Bc'=0.\end{aligned}$$

Égalant à zéro les coefficients des différents termes en x, nous formons les quatre équations homogènes

$$\begin{aligned}A'a \qquad\quad -Aa' \qquad\quad &=0,\\ A'b+B'a-Ab'-Ba' &=0,\\ A'c+B'b-Ac'-Bb' &=0,\\ +B'c \qquad\quad -Bc' &=0,\end{aligned}$$

entre les quatre inconnues A', B', — A et — B. Éliminant ces constantes, on obtient l'équation résultante

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0\\ b & a & b' & a'\\ c & b & c' & b'\\ 0 & c & 0 & c' \end{vmatrix}=0,$$

ou

$$(1) \qquad (ca'-ac')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0;$$

c'est la condition déjà trouvée aux n°s 138 et 141 *bis*.

146. Méthode d'élimination de M. Sylvester [1]. — Dans la *méthode dialytique* du géomètre anglais, les puissances de la variable x sont traitées comme autant de variables indépendantes. Pour la faire comprendre, il nous suffira de l'appliquer à un ou deux exemples.

Proposons-nous d'éliminer x entre les deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c'.$$

Multiplions chacune de ces équations par $x^1 = x$ et $x^0 = 1$; nous formons les quatre équations

$$\begin{aligned} a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x \quad &= 0, \\ a\,x^2 + b\,x + c &= 0, \\ a'x^3 + b'x^2 + c'x \quad &= 0, \\ a'x^2 + b'x' + c' &= 0, \end{aligned}$$

entre les trois puissances successives x^3, x^2, x de la variable x. Si nous considérons ces puissances comme autant d'inconnues, nous aurons un système de quatre équations du premier degré entre trois inconnues. Ces équations ne seront compatibles que si leur déterminant est nul (134); nous trouvons ainsi la résultante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

qui est identique avec celle du numéro précédent.

147. Soit encore à éliminer x entre les deux équations

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

M. Sylvester multiplie la première équation successivement par x^1 et x^0 et la seconde par x^2, x^1 et x^0, ce qui lui

[1] *Philosophical Magazine*, 1840, n° 101, et *Journal de Crelle*, t. XXI, p. 226.

fournit les cinq équations

$$\begin{aligned} a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x \quad &= 0, \\ a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d &= 0, \\ a'\,x^4 + b'\,x^3 + c'\,x^2 \quad &= 0, \\ a'\,x^3 + b'\,x^2 + c'\,x \quad &= 0, \\ a'\,x^2 + b'\,x + c' &= 0, \end{aligned}$$

entre les quatre inconnues x^4, x^3, x^2 et x. Éliminant ces inconnues, on obtient l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

148. En général, supposons qu'il s'agisse d'éliminer x entre les deux équations

$$\begin{aligned} a x^m + b x^{m-1} + \ldots + k x + l &= 0, \\ a' x^n + b' x^{n-1} + \ldots + k' x + l' &= 0, \end{aligned}$$

dont l'une est du $m^{\text{ième}}$ et l'autre du $n^{\text{ième}}$ degré.

On multiplie la première par les puissances successives de x

$$x^{n-1},\ x^{n-2},\ \ldots,\ x^2,\ x^1,\ x^0,$$

et la seconde par les puissances successives de x

$$x^{m-1},\ x^{m-2},\ \ldots,\ x^2,\ x^1,\ x^0;$$

on obtient ainsi $m+n$ équations entre les $m+n-1$ puissances successives

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots,\ x^2,\ x^1 \text{ de } x.$$

Éliminant ces $m+n-1$ puissances de x, considérées comme autant d'inconnues distinctes, on trouve la résultante des deux équations proposées.

149. Méthode d'élimination de Bezout [1]. — Cette méthode donne aussi le résultant sous la forme d'un déterminant; mais

---

[1] *Histoire de l'Académie de Paris*, 1764, p. 298 et 317.

le déterminant affecte une forme plus simple, qui en rend le calcul plus facile.

Pour en faire saisir l'esprit, nous l'appliquerons au cas particulier des deux équations du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0.$$

On multiplie ces deux équations successivement par

$$a' \text{ et } a,$$
$$a'x + b' \text{ et } ax + b,$$
$$a'x^2 + b'x + c' \text{ et } ax^2 + bx + c,$$

et l'on retranche chaque fois les deux produits obtenus; on forme ainsi les trois nouvelles équations

$$\begin{aligned}
&(ab')x^2 + (ac')x + (ad') = 0,\\
&(ac')x^2 + [(ad') + (bc')]x + (bd') = 0,\\
&(ad')x^2 + (bd')x + (cd') = 0,
\end{aligned}$$

qui, par l'élimination de x^2 et x, donnent l'équation résultante

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') \\ (ac') & (ad') + (bc') & (bd') \\ (ad') & (bd') & (cd') \end{vmatrix} = 0$$

du système donné.

La méthode de M. Sylvester aurait donné le résultant sous la forme d'un déterminant de sixième degré

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & a' & b' & c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0.$$

150. Méthode d'élimination de M. Cayley [1]. — Cette méthode n'est

[1] *Philosophical Transactions*, 1853, p. 516, et *Journal de Crelle*, t. LII, p. 47; t. LIII, p. 366.

qu'une modification de celle de Bezout et fournit la même forme pour le résultant.

Supposons que les deux équations $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ admettent une racine commune; il sera possible, dans ce cas, de satisfaire à l'équation $f(x) + \lambda\varphi(x)$, quel que soit λ; par suite, si nous posons $\lambda = \frac{f(x')}{\varphi(x')}$, l'équation qui en résulte

$$f(x)\varphi(x') - \varphi(x)f(x') = 0$$

devra être vérifiée pour toute valeur de x'.

Comme cette dernière équation est satisfaite par $x = x'$, nous pouvons d'abord diviser le premier membre par $x - x'$; puis égaler à zéro les coefficients des diverses puissances de x' dans le quotient; enfin éliminer les puissances successives de x, comme si elles étaient des variables indépendantes.

Soit à éliminer x entre les deux équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Nous formons l'équation

$$(ax^2 + bx + c)(a'x'^2 + b'x' + c') - (a'x^2 + b'x + c')(ax'^2 + bx' + c) = 0,$$

qui, après réduction, devient

$$(ab' - ba')(x - x')xx' + (ac' - ca')(x^2 - x'^2) + (bc' - cb')(x - x') = 0;$$

divisant par $x - x'$ et ordonnant par rapport à x', on la change en

$$[(ab' - ba')x + (ac' - ca')]x' + (ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0.$$

Celle-ci, devant être satisfaite pour toute valeur de x', exige que l'on ait

$$(ac' - ca')x + (bc' - cb') = 0 \quad \text{ou} \quad (ac')x + (bc') = 0,$$
$$(ab' - ba')x + (ac' - ca') = 0 \quad \text{ou} \quad (ab')x + (ac') = 0.$$

On en tire l'équation résultante

$$\begin{vmatrix} (ac') & (bc') \\ (ab') & (ac') \end{vmatrix} = 0,$$

qui revient à

$$(ac')^2 - (ab')(bc') = 0.$$

151. Méthode d'élimination de Cauchy [1]. — Cette méthode n'est que celle de Bezout perfectionnée.

---

[1] Cauchy, *Exercices d'Analyse*, 1840, p. 393.

Considérons d'abord deux équations du même degré, du troisième par exemple, telles que

$$(1)\quad ax^3+bx^2+cx+d=0,\quad a'x^3+b'x^2+c'x+d'=0.$$

Si entre ces équations nous éliminons la puissance la plus élevée x^3 de l'inconnue, nous obtiendrons l'équation du second degré

$$(ab'-ba')x^2+(ac'-ca')x+ad'-da'=0,$$

ou, en suivant la notation abrégée du n° 17 *bis*,

$$(2)\qquad (ab')x^2+(ac')x+(ad')=0.$$

On peut mettre x^2 en facteur commun dans les deux premiers termes des équations (1), et les écrire

$$(ax+b)x^2+cx+d=0,\quad (a'x+b')x^2+c'x+d'=0.$$

Si nous éliminons x^2, il nous viendra (17 *bis*)

$$(3)\qquad (ac')x^2+[(ad')+(bc')]x+(bd')=0.$$

Enfin nous pouvons mettre x en facteur commun dans les trois premiers termes et mettre les équations (1) sous la forme

$$(ax^2+bx+c)x+d=0,\quad (a'x^2+b'x+c')x+d'=0.$$

Éliminant x, on obtient

$$(4)\qquad (ad')x^2+(bd')x+(cd')=0.$$

Nous avons ainsi formé trois équations (2), (3) et (4), qui doivent être vérifiées par la racine commune aux deux équations (1). Pour que ces trois équations

$$\begin{aligned}
&(ab')x^2 && +(ac')x && +(ad')=0,\\
&(ac')x^2 && +[(ad')+(bc')]x && +(bd')=0,\\
&(ad')x^2 && +(bd')x && +(cd')=0,
\end{aligned}$$

entre les deux inconnues x^2 et x, soient compatibles, il faut et il suffit qu'on ait le déterminant

$$\begin{vmatrix}
(ab') & (ac') & (ad')\\
(ac') & (ad')+(bc') & (bd')\\
(ad') & (bd') & (cd')
\end{vmatrix}=0.$$

C'est la résultante du système (1). Le premier membre est un déterminant symétrique.

152. En général, soit à éliminer x entre les deux équations

$$(5)\qquad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0,$$

$$(6)\qquad \varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m = 0,$$

que, pour plus de simplicité, nous supposerons d'abord du même degré m.

Pour trouver le résultant de ces deux équations, on procède, d'après Cauchy, de la manière suivante.

On isole dans le premier membre de chacune des deux équations, d'abord le premier terme, puis les deux premiers, ensuite les trois premiers, ..., enfin les m premiers termes; on forme ainsi m groupes de deux équations; on divise membre à membre les deux équations de chaque groupe et l'on supprime dans les deux termes des fractions de gauche les puissances x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x^2, x, que ces deux termes admettent comme facteurs communs.

On obtient ainsi les m équations

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

$$\frac{a_0 x + a_1}{b_0 x + b_1} = \frac{a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

$$\frac{a_0 x^2 + a_1 x + a_2}{b_0 x^2 + b_1 x + b_2} = \frac{a_3 x^{m-3} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_3 x^{m-3} + \ldots + b_{m-1} x + b_m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2}}{b_0 x^{m-2} + b_1 x^{m-3} + \ldots + b_{m-2}} = \frac{a_{m-1} x + a_m}{b_{m-1} x + b_m},$$

$$\frac{a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2} x + a_{m-1}}{b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-2} x + b_{m-1}} = \frac{a_m}{b_m}.$$

Si les équations (5) et (6) ont une racine commune, toutes ces m équations seront vérifiées par cette racine commune.

Mettons toutes ces équations sous forme entière, elles deviendront

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}
A_1 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + C_1 x^{m-3} + \ldots + G_1 x + H_1 = 0,\\
A_2 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + C_2 x^{m-3} + \ldots + G_2 x + H_2 = 0,\\
A_3 x^{m-1} + B_3 x^{m-2} + C_3 x^{m-3} + \ldots + G_3 x + H_3 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{m-1} x^{m-1} + B_{m-1} x^{m-2} + C_{m-1} x^{m-3} + \ldots + G_{m-1} x + H_{m-1} = 0,\\
A_m\ x^{m-1} + B_m\ x^{m-2} + C_m\ x^{m-3} + \ldots + G_m\ x + H_m = 0.
\end{array}\right.$$

où nous avons

$$A_1 = a_0 b_1 - a_1 b_0, \quad B_1 = a_0 b_2 - a_2 b_0, \quad C_1 = a_0 b_3 - a_3 b_0, \quad \ldots,$$

et, en employant la notation abrégée des déterminants (17 *bis*),

$$\begin{array}{llll}
A_1 = (a_0 b_1), & B_1 = (a_0 b_2), & \ldots, & H_1 = (a_0 b_m), \\
A_2 = (a_0 b_2), & B_2 = (a_0 b_3) + (a_1 b_2), & \ldots, & H_2 = (a_1 b_m), \\
A_3 = (a_0 b_3), & B_3 = (a_0 b_4) + (a_1 b_3), & \ldots, & H_3 = (a_2 b_m), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_{m-1} = (a_0 b_{m-1}), & B_{m-1} = (a_0 b_m) + (a_1 b_{m-1}), & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_m = (a_0 b_m), & B_m = (a_1 b_m), & \ldots, & H_m = (a_{m-1} b_m).
\end{array}$$

Par ces dernières valeurs on voit que chacune des équations (7) est du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré en x et que les coefficients y sont des fonctions du premier degré des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m$ de l'équation (5), ainsi que des coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_m$ de l'équation (6).

Nous avons ainsi obtenu m équations (7), qui sont du premier degré par rapport à leurs $m-1$ inconnues

$$x^{m-1}, \; x^{m-2}, \; x^{m-3}, \; \ldots, \; x^2, \; x.$$

Si les équations (5) et (6) ont une racine commune, cette racine satisfera aux équations (7); par suite celles-ci sont compatibles; donc leur déterminant

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix}
A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & G_1 & H_1 \\
A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & G_2 & H_2 \\
A_3 & B_3 & C_3 & \ldots & G_3 & H_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{m-1} & B_{m-1} & C_{m-1} & \ldots & G_{m-1} & H_{m-1} \\
A_m & B_m & C_m & \ldots & G_m & H_m
\end{vmatrix}$$

est forcément nul.

Ce déterminant est du $m^{\text{ième}}$ degré par rapport aux coefficients de chacune des deux équations (5) et (6). Il est nul chaque fois que ces équations (5) et (6) ont une racine commune, c'est-à-dire chaque fois qu'on a $R = 0$. Il s'ensuit que les fonctions R et Δ ne diffèrent que par un coefficient numérique (143); donc Δ est bien le résultant des deux équations proposées; et, pour que celles-ci aient une racine commune, il faut et il suffit que ce déterminant soit nul.

153. Considérons actuellement deux équations, qui ne soient pas du même degré, par exemple

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad \text{et} \quad a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

et proposons-nous aussi de déterminer leur résultant.

Multiplions tous les termes de la seconde par x^2, nous formons l'équation

$$(8) \qquad a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 = 0,$$

qui est du même degré que la première

$$(9) \qquad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Isolons, dans le premier membre des équations (9) et (8), d'abord le premier terme, puis les deux premiers, ensuite divisons membre à membre; nous formons les équations

$$\frac{a}{a'} = \frac{bx^3 + cx^2 + dx + e}{b'x^3 + c'x^2},$$

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{cx^2 + dx + e}{c'x^2},$$

qui reviennent aux suivantes :

$$(ab')x^3 + (ac')x^2 - da'x - ea' = 0,$$

$$(ac')x^3 + [(bc') - da']x^2 - (db' + ea')x - eb' = 0.$$

Si l'on adjoint à celles-ci les deux équations

$$a'x^3 + b'x^2 + c'x = 0,$$

$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

on aura un système de quatre équations du premier degré entre les trois inconnues x^3, x^2 et x. Pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul, ce qui fournit la résultante demandée

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & da' & ea' \\ (ac') & (bc') - da' & db' + ea' & eb' \\ a' & b' & -c' & 0 \\ 0 & a' & -b' & -c' \end{vmatrix} = 0.$$

154. Soient données, en général, les deux équations de degrés différents

$$(10) \qquad f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

$$(11) \qquad \varphi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

où $m > n$. Si l'on multiplie tous les termes de la seconde (11) par x^{m-n}, on forme une équation

$$(12) \qquad b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_n x^{m-n} = 0$$

de même degré que (10).

Opérant sur les équations (10) et (12) comme on a fait sur les équations (5) et (6), jusqu'à ce qu'on ait isolé les n premiers termes, on obtient les n équations

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_n x^{m-n}},$$

$$\frac{a_0 x + a_1}{b_0 x + b_1} = \frac{a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m}{b_2 x^{m-2} + \ldots + b_n x^{m-n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}} = \frac{a_n x^{m-n} + \ldots + a_m}{b_n x^{m-n}},$$

qui se ramènent à la forme

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_1 x^{m-1} + B_1 x^{m-2} + \ldots + H_1 = 0, \\ A_2 x^{m-1} + B_2 x^{m-2} + \ldots + H_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_n x^{m-1} + B_n x^{m-2} + \ldots + H_n = 0. \end{array} \right.$$

A ces n équations on adjoindra les $m - n$ équations

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{r} b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ b_0 x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_0 x^n + \ldots + b_n = 0, \end{array} \right.$$

que l'on forme en multipliant la seconde (11) des deux équations données par les $m - n$ premières puissances de x, $x^{m-1-n}, x^{m-2-n}, \ldots, x^2, x^1, x^0$. On a ainsi un système de m équations (13) et (14) à $m - 1$ inconnues $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x^2, x$, qui, pour être compatibles, exigent que leur déterminant

$$(\mathrm{II}) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & B_n & C_n & \ldots & H_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

soit nul. Ce déterminant est du degré n par rapport aux coefficients a de l'équation $f(x) = 0$ et du degré m par rapport aux coefficients b de l'équation $\varphi(x) = 0$; donc il est égal au résultant de ces deux équations.

Le calcul de la racine commune s'effectue par le procédé du n° 166.

* **155. Méthode de M. Cayley, modifiée par le P. Joubert.** — Si l'on parvient, par un moyen quelconque, à former l'équation

$$(15) \qquad F(u) = B_0 u^n + B_1 u^{n-1} + B_2 u^{n-2} + \ldots + B_n = 0,$$

qui admette pour racines les n quantités

$$f(\beta_1), \quad f(\beta_2), \quad \ldots, \quad f(\beta_n),$$

on pourra obtenir immédiatement le résultant R des deux équations

$$(16) \qquad f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

$$(17) \qquad \varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ désignent les n racines de cette dernière équation.

Il suffira, en effet, de diviser le terme connu B_n de l'équation (15) par le coefficient B_0 du premier terme et de multiplier le quotient par b_0^m, pour avoir, en valeur absolue, le résultant demandé (II) du n° 140.

* **156. Premier cas.** — Supposons d'abord que les deux équations données (16) et (17) soient de même degré, de sorte que $n = m$.

Pour former l'équation $F(u) = 0$, considérons la fonction

$$(18) \qquad \Phi = \frac{[f(x) - u]\varphi(y) - [f(y) - u]\varphi(x)}{y - x},$$

qui est entière par rapport à x et y, puisque l'hypothèse $y = x$ annule le numérateur. Cette expression est du premier degré par rapport à u; elle devient nulle, quel que soit y, si l'on y pose en même temps

$$(19) \qquad x = \beta_r, \quad u = f(\beta_r),$$

où β_r est l'une quelconque des $n = m$ racines de l'équation (17).

Par conséquent, les m coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ des diverses puissances $y^{m-1}, y^{m-2}, y^{m-3}, \ldots, y^1, y^0$ sont nuls dans (18) pour toutes les valeurs de x qui satisfont aux conditions (19).

Pour calculer ces coefficients, je remarque que la fonction (18) ou Φ peut s'écrire

$$\frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{y - x} - u\,\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x},$$

ou bien

$$(20)\quad \Phi = \Sigma C_{ik} x^i y^k - u \left\{ \begin{array}{l|l|l} b_0 y^{m-1} + b_0 x & y^{m-2} + b_0 x^2 & y^{m-3} + \ldots + b_0 x^{m-1} \\ \quad + b_1 & \quad + b_1 x & \quad + b_1 x^{m-2} \\ & \quad + b_2 & \quad \vdots \\ & & \quad + b_m \end{array} \right\},$$

où les quantités i et k doivent recevoir les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$.

J'obtiens le coefficient A_0 de y^{m-1}, en posant $k = m-1$ et en donnant à i les valeurs successives $0, 1, 2, \ldots, m-1$; je l'égale à zéro, ce qui me fournit une première équation

$$A_0 = C_{0,m-1} - b_0 u + C_{1,m-1} x + C_{2,m-1} x^2 + \ldots + C_{m-1,m-1} x^{m-1} = 0.$$

Je trouve ensuite le coefficient A_1 de y^{m-2}, en posant $k = m-2$, et en donnant à i les valeurs successives $0, 1, 2, \ldots m-1$; je l'égale à zéro, ce qui me fournit une deuxième équation

$$A_1 = C_{0,m-2} - b_1 u + (C_{1,m-2} - b_0 u) x + C_{2,m-2} x^2 + \ldots + C_{m-1,m-2} x^{m-1} = 0.$$

Calculant de même le coefficient A_2 de y^{m-3} et l'égalant à zéro, on forme une troisième équation

$$\begin{aligned} A_2 = C_{0,m-3} - b_2 u &+ (C_{1,m-3} - b_1 u) x \\ &+ (C_{2,m-3} - b_2 u) x^2 + \ldots + C_{m-1,m-3} x^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on continue de la sorte, on finira par arriver à la $m^{\text{ième}}$ équation, qui est la dernière,

$$\begin{aligned} A_{m-1} = C_{0,0} - b_{m-1} u &+ (C_{1,0} - b_{m-2} u) x \\ &+ (C_{2,0} - b_{m-3} u) x^2 + \ldots + (C_{m-1,0} - b_0 u) x^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Ces m équations, entre les $m-1$ premières puissances de x, existent pour toutes les valeurs de x et de u qui satisfont aux conditions (19); si l'on considère ces $m-1$ puissances

$$x, \; x^2, \; \ldots, \; x_{m-1}$$

comme autant d'inconnues, on aura un système de m équations du premier degré à $m-1$ inconnues. Or, pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul (134). On obtient ainsi l'équation demandée en u (135)

$$F(u) = \begin{vmatrix} C_{0,m-1} - b_0 u & C_{1,m-1} & C_{2,m-1} & \ldots & C_{m-1,m-1} \\ C_{0,m-2} - b_1 u & C_{1,m-2} - b_0 u & C_{2,m-2} - & \ldots & C_{m-1,m-2} \\ C_{0,m-3} - b_2 u & C_{1,m-3} - b_1 u & C_{2,m-3} - b_0 u & \ldots & C_{m-1,m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{0,0} - b_{m-1} u & C_{1,0} - b_{m-2} u & C_{2,0} - b_{m-3} u & \ldots & C_{m-1,0} - b_6 u \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux équations (15) et (21) doivent être identiques; par conséquent on obtiendra le terme B_m, qui est indépendant de u, en faisant $u = 0$ dans (21), ce qui donne

$$(\text{III}) \qquad B_m = \begin{vmatrix} C_{0,m-1} & C_{1,m-1} & C_{2,m-1} & \dots & C_{m-1,m-1} \\ C_{0,m-2} & C_{1,m-2} & C_{2,m-2} & \dots & C_{m-1,m-2} \\ C_{0,m-3} & C_{1,m-3} & C_{2,m-3} & \dots & C_{m-1,m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{0,0} & C_{1,0} & C_{2,0} & \dots & C_{m-1,0} \end{vmatrix}$$

Le terme qui, dans (21), contient u à la plus haute puissance $n = m$, est évidemment fourni par le terme principal du déterminant (21), terme dont les éléments appartiennent à la diagonale. Or ce terme est le produit de m facteurs binômes dans lesquels la seconde partie est égale à $-b_0 u$; la puissance la plus élevée de u dans ce produit se trouvera ainsi dans $(-1)^m b_0^m u^m$, de sorte qu'il vient

$$B_0 = (-1)^m b_0^m.$$

On a donc (II du n° 140)

$$R = \frac{B_m}{B_0} \times b_0^m = \frac{B_m}{(-1)^m b_0^m} \times b_0^m = (-1)^m B_m;$$

donc ce dernier déterminant B_m ou (III) est, en valeur absolue, le résultant cherché.

*157. Il convient de remarquer que le *résultant* (III) *est un déterminant symétrique;* car la fonction Φ ou (18) restant égale à elle-même, quand on y change x en y et *vice versâ,* le coefficient de $x^i y^k$ doit être le même que celui de $x^k y^i$; par conséquent on a $C_{ik} = C_{ki}$.

*158. **Calcul des éléments du résultant** (III). — Les coefficients C_{ik}, qui constituent les éléments dans le déterminant (III), sont fournis par le quotient

$$(22) \qquad \frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{y - x},$$

où les polynômes $f(x)$ et $\varphi(y)$ sont chacun du $m^{\text{ième}}$ degré.

Nous allons transformer cette expression, pour mieux en déduire les coefficients C_{ik}.

Puisque

$$f(x) = a_m + a_{m-1}x + \ldots + a_0 x^m,$$
$$\varphi(y) = b_m + b_{m-1}y + \ldots + b_0 y^m,$$

nous voyons que $a_{m-p}x^p$ est le terme général de $f(x)$ et que ce terme fournira l'ensemble des termes de cette fonction, si l'on y remplace p successivement par les $m+1$ nombres de la suite naturelle $0, 1, 2, \ldots, m$.

De même le terme général de $\varphi(y)$ peut être représenté par $b_{m-q}y^q$, où q devra recevoir la suite des valeurs 0, 1, 2, ... m; par conséquent on a

$$f(x)\varphi(y) = \Sigma a_{m-p} b_{m-q} x^p y^q.$$

Changeant x en y et y en x, on en déduit

$$f(y)\varphi(x) = \Sigma a_{m-p} b_{m-q} x^q y^p.$$

Le numérateur de notre fraction (22) est donc

$$(23) \qquad f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x) = \Sigma a_{m-p} b_{m-q} (x^p y^q - x^q y^p),$$

où le terme général

$$(24) \qquad a_{m-p} b_{m-q} (x^p y^q - x^q y^p)$$

fournira tous les termes du développement (23), si l'on a soin de donner d'abord à p les $m+1$ valeurs successives 0, 1, 2, ..., m, puis de donner, dans chacun des $m+1$ résultats obtenus, les mêmes $m+1$ valeurs 0, 1, 2, ..., m à q. On trouve ainsi que la différence (23) se compose de $(m+1)^2$ termes, dont (24) est l'expression générale. Or les $m+1$ de ces termes, pour lesquels p et q sont égaux, s'annulent évidemment; donc la différence (23) ne contient en tout que $(m+1)^2 - (m+1)$ ou $m(m+1)$ termes.

Ces $m(m+1)$ termes peuvent encore se grouper deux par deux. En effet, prenons deux quelconques α et β des nombres de la suite 0, 1, 2, ... m, et posons d'abord $p = \alpha$, $q = \beta$; puis $p = \beta$, $q = \alpha$; nous obtiendrons les deux termes

$$a_{m-\alpha} b_{m-\beta} (x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha) \quad \text{et} \quad a_{m-\beta} b_{m-\alpha} (x^\beta y^\alpha - x^\alpha y^\beta),$$

dont la somme est

$$(a_{m-\alpha} b_{m-\beta} - a_{m-\beta} b_{m-\alpha})(x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha)$$

ou

$$(25) \qquad c_{\alpha\beta} (x_\alpha y_\beta - x^\beta y^\alpha),$$

en posant

$$(\text{IV}) \qquad c_{\alpha-\beta} = a_{m-\alpha} b_{m-\beta} - a_{m-\beta} b_{m-\alpha}.$$

Or, si dans le produit (25) on change α en β et β en α, les deux facteurs changent seulement de signe, de sorte que le produit reste le même; donc on obtiendra tous les termes du développement (23) au moyen du produit (25), en y donnant à α les valeurs 0, 1, 2, ..., jusqu'à la moitié de m exclusivement, et à β les valeurs entières depuis la moitié de m inclusivement jusqu'à m.

Il s'ensuit qu'on peut écrire l'égalité

$$f(x)\varphi(y)-f(y)\varphi(x)=\Sigma c_{\alpha\beta}(x^\alpha y^\beta-x^\beta y^\alpha)=\Sigma c_{\alpha\beta}x^\alpha y^\alpha(y^{\beta-\alpha}-x^{\beta-\alpha}),$$

où α est moindre que β et où le second membre se compose de $\frac{m(m+1)}{2}$ termes.

Divisant par $y-x$, on obtient le développement

$$\text{(V)}\qquad \frac{f(x)\varphi(y)-f(y)\varphi(x)}{y-x}=\Sigma c_{\alpha\beta}x^\alpha y^\alpha(y^{\beta-\alpha-1}+xy^{\beta-\alpha-2}+\ldots+x^{\beta-\alpha-1}).$$

C'est au moyen de cette expression (V) que nous allons calculer les éléments C_{ik} du résultant R ou (III).

La quantité C_{ik} est la somme d'un certain nombre de coefficients $c_{\alpha\beta}$ fournis par (IV); or le coefficient $c_{\alpha\beta}$, dans (V), n'entre que dans des termes où la somme des exposants de x et y est égale à $\alpha+\beta-1$; par suite, on doit toujours avoir $i+k=\alpha+\beta-1$. Il faudra donc résoudre cette équation de toutes les manières possibles, en prenant toujours α moindre que β.

Ainsi l'on donnera à α successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots, i$, et l'on déterminera les valeurs correspondantes de β; de cette manière

Pour	$\alpha=0$,	on trouve	$\beta=i+k+1$,
»	$\alpha=1$,	»	$\beta=i+k$,
»	$\alpha=2$,	»	$\beta=i+k-1$,
»	.....,	»	.....,
»	$\alpha=i$,	»	$\beta=k+1$.

On voit donc que l'on a

$$\text{(VI)}\qquad C_{ik}=c_{0,i+k+1}+c_{1,i+k}+c_{2,i+k-1}+\ldots+c_{i,k+1}$$

avec la condition (IV).

D'après ce que nous avons dit relativement au calcul de $c_{\alpha\beta}$, on ne doit donner à i que des valeurs inférieures à la moitié de $i+k+1$.

*159. Comme application immédiate, proposons-nous de calculer le résultant des deux équations du troisième degré

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$
$$\varphi(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3.$$

Ce résultant se déduit de (III) du n° 156, en y faisant $m=3$; il est

$$R=\begin{vmatrix} C_{02} & C_{12} & C_{22} \\ C_{01} & C_{11} & C_{21} \\ C_{00} & C_{10} & C_{20} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C_{02} & C_{12} & C_{22} \\ C_{01} & C_{11} & C_{12} \\ C_{00} & C_{01} & C_{02} \end{vmatrix},$$

puisque (157)

$$C_{10} = C_{01}, \quad C_{20} = C_{02} \quad \text{et} \quad C_{21} = C_{12}.$$

Pour déterminer les éléments de ce résultant, nous avons recours à la formule (VI), qui, combinée avec (IV), nous donne

$$\begin{aligned}
C_{00} &= c_{01} &&= a_3 b_2 - a_2 b_3 &&= (a_3 b_2),\\
C_{01} &= c_{02} &&= a_3 b_1 - a_1 b_3 &&= (a_3 b_1),\\
C_{02} &= c_{03} &&= a_3 b_0 - a_0 b_3 &&= (a_3 b_0),\\
C_{11} &= c_{03} + c_{12} &&= a_3 b_0 - a_0 b_3 + a_2 b_1 - a_1 b_2 &&= (a_3 b_0) + (a_2 b_1),\\
C_{12} &= c_{13} &&= a_2 b_0 - a_0 b_2 &&= (a_2 b_0),\\
C_{22} &= c_{23} &&= a_1 b_0 - a_0 b_1 &&= (a_1 b_0).
\end{aligned}$$

Il nous vient donc

$$R = \begin{vmatrix} (a_3 b_0) & (a_2 b_0) & (a_1 b_0) \\ (a_3 b_1) & (a_3 b_0) + (a_2 b_1) & (a_2 b_0) \\ (a_3 b_2) & (a_3 b_1) & (a_3 b_0) \end{vmatrix}.$$

* **160. Deuxième cas.** — Les deux équations données (16) et (17) sont de degrés différents. Supposons que m soit plus grand que n. La fonction (18) ou

$$\frac{f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x)}{y - x} - u\,\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$$

peut s'écrire

$$(26)\quad \Phi = \Sigma C_{ik} x^i y^k - u \left\{ \begin{array}{l|l|l} b_0 y^{n-1} + b_0 x & y^{n-2} + b_0 x^2 & y^{n-3} + \ldots + b_0 x^{n-1} \\ \quad\quad + b_1 & \quad\quad + b_1 x & \quad\quad + b_1 x^{n-2} \\ & \quad\quad + b_2 & \quad\quad \vdots \\ & & \quad\quad + b_{n-1} \end{array} \right\};$$

elle est du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré par rapport à y. Les coefficients $y^{m-1}, y^{m-2}, \ldots;$ $y^n, y^{n-1}, \ldots, y^2, y$ des diverses puissances de y doivent encore être nuls pour toutes les valeurs de x qui satisfont aux conditions (19).

Je détermine d'abord les coefficients des n dernières puissances de y, ceux de $y^{n-1}, y^{n-2}, \ldots, y^1, y^0$. Pour cela, il me suffit d'attribuer à k, dans (26), successivement les valeurs $n-1$, $n-2$, ..., 2, 1, 0 et de donner à i, dans chaque résultat, les valeurs successives 0, 1, 2, ..., $m-1$. En égalant à zéro ces coefficients ainsi calculés, j'obtiens les n équations

$$\left\{ \begin{array}{l}
(C_{0,n-1} - b_0 u) + C_{1,n-1} x + C_{2,n-1} x^2 + \ldots + C_{m-1,n-1} = 0,\\
(C_{0,n-2} - b_1 u) + (C_{1,n-2} - b_0 u) x + C_{2,n-2} x^2 + \ldots + C_{m-1,n-2} = 0,\\
(C_{0,n-3} - b_2 u) + (C_{1,n-3} - b_1 u) x + (C_{2,n-3} - b_0 u) x^2 + \ldots + C_{m-1,n-3} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(C_{0,0} - b_{n-1} u) + (C_{1,0} - b_{n-2} u) x + (C_{2,0} - b_{n-3} u) x^2 + \ldots + (C_{m-1} - b_0 u) = 0.
\end{array} \right.$$

Il reste à égaler à zéro les $m-n$ coefficients de y^{m-1}, y^{m-2}, ..., y^n, qui, d'après la composition (26) de Φ, sont indépendants de u. Les termes qui contiennent ces puissances de y ne se trouvent évidemment que dans la partie

$$\frac{f(x)\varphi(y)-f(y)\varphi(x)}{y-x}$$

de la fonction Φ; or la quantité $f(x)\,\varphi(y)$, qui figure au numérateur de cette première partie, est du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à y; par suite le quotient

$$\frac{f(x)\varphi(y)}{y-x}$$

n'est que du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré par rapport à y; donc ce quotient ne contient aucun des termes cherchés, et ces termes ne peuvent provenir que du quotient

$$-\frac{f(y)\varphi(x)}{y-x}=-\varphi(x)\,\frac{f(y)}{y-x}.$$

En effectuant la division, on trouve que

$$-\varphi(x)\,\frac{f(x)}{y-x}=-\varphi(x)\left\{\begin{array}{r|r|c} a_0y^{m-1}+a_0x & y^{m-2}+a_0x^2 & y^{m-3}+\ldots \\ +a_1 & +a_1x & \ddots \\ & +a_2 & \end{array}\right\}.$$

Égalant à zéro les coefficients des puissances de y, qui sont supérieures à la $(n-1)^{\text{ième}}$, on obtient les $m-n$ équations

$$\begin{aligned} &a_0\varphi(x)=0,\\ &(a_0x+a_1)\varphi(x)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &(a_0x^{m-n-1}+a_1x^{m-n-2}+\ldots+a_{m-n})\varphi(x)=0, \end{aligned}$$

qui se réduisent à la seule équation $\varphi(x)=0$.

Aux n équations (27) déjà écrites, je n'ai donc qu'à adjoindre les $m-n$ équations

$$\varphi(x)=0,\quad x\varphi(x)=0,\quad x^2\varphi(x)=0,\quad \ldots,\quad x^{m-n-1}\varphi(x)=0$$

ou

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} b_n+b_{n-1}x+b_{n-2}x^2+\ldots\ldots\ldots+b_0x^n \qquad = \\ \qquad b_n\;x+b_{n-1}x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+b_0x^{n+1} \qquad = \\ \qquad\qquad b_n\;x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+b_0x^{n+2} \qquad = \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad b_nx^{m-n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+b_0x^{m-1}= \end{array}\right.$$

pour avoir un système de m équations du premier degré à $m-1$ inconnues. Ces équations, devant être vérifiées pour toutes les valeurs de x et de u qui satisfont aux conditions (19), exigent que leur déterminant soit nul. On trouve ainsi l'équation demandée en u

$$\begin{vmatrix} (C_{0,n-1}-b_0u) & C_{1,n-1} & \dots & C_{m-1,n-1} \\ (C_{0,n-2}-b_1u) & (C_{1,n-2}-b_0u) & \dots & C_{m-1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (C_{0,0}-b_{n-1}u) & (C_{1,0}-b_{n-2}u) & \dots & (C_{m-1,0}-b_0u) \\ b_n & b_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit, comme au n° 156, la valeur du résultant, qui est

$$R = \begin{vmatrix} C_{0,n-1} & C_{1,n-1} & \dots & C_{m-2,n-1} & C_{m-1,n-1} \\ C_{0,n-2} & C_{1,n-2} & \dots & C_{m-2,n-2} & C_{m-1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{0,0} & C_{1,0} & \dots & C_{m-2,0} & C_{m-1,0} \\ b_n & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

* **161.** D'après cela on trouve facilement que le résultant des deux équations

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,$$
$$b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

est le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} a_3b_0 & a_2b_0-a_0b_2 & a_1b_0-a_0b_1 \\ a_3b_1 & a_2b_1-a_1b_2 & a_2b_0-a_0b_2 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

§ III. — Calcul des racines communes a deux équations.

162. Nous savons que, si le résultant des deux équations

$$ax^2+bx+c=0, \quad a'x^2+b'x+c'=0$$

est nul, ces équations admettent une racine commune.

Pour calculer cette racine, nous mettrons les deux équations sous la forme

$$(ax+b)x+c=0,$$
$$(a'x+b')x+c'=0;$$

éliminant la variable x qui est en évidence, nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} ax+b & c \\ a'x+b' & c' \end{vmatrix}=0,$$

d'où nous tirons

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}=0$$

et par suite, eu égard à l'égalité (I) du n° 145,

$$x=\frac{(bc')}{(ca')}=\frac{(ca')}{(ab')},$$

pour la valeur de la racine commune.

163. Supposons que les deux équations

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad a'x^3+b'x+c'=0$$

admettent aussi une même racine. Si nous adjoignons à ces deux équations celle que donne la multiplication de la seconde par x, nous formons le système des trois équations

$$(ax+b)x^2+cx+d=0,$$
$$(a'x+b')x^2+c'x \qquad =0,$$
$$a'x^2+b'x+c'=0,$$

entre lesquelles nous pouvons éliminer les puissances x^2 et x, qui sont en évidence. Nous trouvons ainsi l'équation du premier degré

$$\begin{vmatrix} ax+b & c & d \\ a'x+b' & c' & 0 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0,$$

qui nous donnera la racine commune. Cette équation pouvant

s'écrire

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ a' & c' & 0 \\ 0 & b' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & 0 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

notre racine sera

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & 0 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c & d \\ a' & c' & 0 \\ 0 & b' & c' \end{vmatrix}} = \frac{c'(bc' - cb') + d(b'^2 - a'c')}{c'(ca' - ac') - d.a'b'}.$$

164. Enfin considérons encore les deux équations, toutes deux du troisième degré,

$$(1)\quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

auxquelles nous attribuons une racine commune. En leur adjoignant les deux équations que fournit leur multiplication par x, on forme le système des quatre équations

$$\begin{aligned} (ax + b)x^3 + cx^2 + dx \quad &= 0, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ (a'x + b')x^3 + c'x^2 + d'x \quad &= 0, \\ a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' &= 0 \end{aligned}$$

entre les trois inconnues x^3, x^2 et x. Éliminant ces variables, considérées comme indépendantes, on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} ax + b & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ a'x + b' & c' & d' & 0 \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & c & d & 0 \\ 0 & b & c & d \\ a' & c' & d' & 0 \\ 0 & b' & c' & d' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c & d & 0 \\ a & b & c & d \\ b' & c' & d' & 0 \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne la valeur de la racine commune.

165. Si les deux équations (1) avaient deux racines communes, on les mettrait sous la forme

$$(a x^2 + b x + c) x + d = 0,$$
$$(a' x^2 + b' x + c') x + d' = 0;$$

éliminant x entre celles-ci, on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} a x^2 + b x + c & d \\ a' x^2 + b' x + c' & d' \end{vmatrix} = 0,$$

qui revient à

$$(a x^2 + b x + c) d' - (a' x^2 + b' x + c') d = 0,$$

ou à

$$(a d' - d a') x^2 + (b d' - d b') x + (c d' - d c') = 0,$$

et donne, pour les deux racines communes, les valeurs

$$x = \frac{d b' - b d' \pm \sqrt{(b d' - d b')^2 - 4 (a d' - d a')(c d' - d c')}}{2 (a d' - d a')}.$$

166. En général, considérons les deux équations (5) et (6) du n° 152, qui sont toutes les deux du $m^{\text{ième}}$ degré.

Si ces deux équations ont une racine commune, leur résultant (I) du n° 152 sera nul.

Supposons que, dans ce déterminant (I), l'un des déterminants mineurs, correspondant aux éléments de la dernière colonne des H, ne soit pas nul, par exemple, le déterminant mineur qui correspond à l'élément H_m. Si nous supprimons, dans le système (7) du n° 152, l'équation qui contient cet élément H_m, nous aurons un système de $m - 1$ équations à $m - 1$ inconnues, savoir :

$$\begin{array}{llllll}
A_1 x^{m-1} & + B_1 x^{m-2} & + C_1 x^{m-3} & + \ldots + G_1 x & + H_1 & = 0, \\
A_2 x^{m-1} & + B_2 x^{m-2} & + C_2 x^{m-3} & + \ldots + G_2 x & + H_2 & = 0, \\
A_3 x^{m-1} & + B_3 x^{m-2} & + C_3 x^{m-3} & + \ldots + G_3 x & + H_3 & = 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
A_{m-1} x^{m-1} & + B_{m-1} x^{m-2} & + C_{m-1} x^{m-3} & + \ldots + G_{m-1} x & + H_{m-1} & = 0,
\end{array}$$

qui sont du premier degré par rapport à chacune des $m - 1$ puissances $x^{m-1}, x^{m-2}, \ldots, x^2, x$ de l'inconnue x.

Si nous voulons avoir la première puissance de la racine commune, nous résoudrons ce dernier système par rapport à la première puissance

de x. Nous trouvons ainsi l'équation du premier degré

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \dots & G_1 \\ A_2 & B_2 & \dots & G_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & \dots & G_{m-1} \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \dots & H_1 \\ A_2 & B_2 & \dots & H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m-1} & B_{m-1} & \dots & H_{m-1} \end{vmatrix} = 0,$$

qui nous donne la valeur de la racine commune.

Si l'on voulait avoir la $i^{\text{ième}}$ puissance de la racine commune, où i est un nombre entier inférieur à m, on résoudrait le système précédent par rapport à l'inconnue x^i.

On opérerait et l'on raisonnerait d'une manière analogue sur le système des deux équations (10) et (11) du n° 154, qui sont l'une du $m^{\text{ième}}$ et l'autre du $n^{\text{ième}}$ degré.

167. Pour mieux nous faire comprendre, appliquons cette théorie au système des deux équations du quatrième degré

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$
$$a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' = 0.$$

Cherchons le résultant de ces deux équations par la méthode de Cauchy (n° 152). Nous formons le système des équations

$$\frac{a}{a'} = \frac{bx^3 + cx^2 + dx + e}{b'x^3 + c'x^2 + d'x + e'},$$

$$\frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{cx^2 + dx + e}{c'x^2 + d'x + e'},$$

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{dx + e}{d'x + e'},$$

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'} = \frac{e}{e'},$$

qui, mises sous forme entière, se réduisent au système

$$(11)\quad \begin{cases} (ab')x^3 + (ac')x^2 + (ad')x + (ae') = 0, \\ (ac')x^3 + [(ad') + (bc')]x^2 + [(ae') + (bd')]x + (be') = 0, \\ (ad')x^3 + [(ac') + (bd')]x^2 + [(bc') + (cd')]x + (ce') = 0, \\ (ae')x^3 + (be')x^2 + (ce')x + (de') = 0 \end{cases}$$

de quatre équations aux trois inconnues x^3, x^2 et x.

Si les deux équations proposées ont une racine commune, cette racine satisfait au système (1), ce qui exige que l'on ait

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') & (ae') \\ (ac') & (ad')+(bc') & (ae')+(bd') & (be') \\ (ad') & (ac')+(bd') & (bc')+(cd') & (ce') \\ (ae') & (be') & (ce') & (de') \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition étant remplie, on peut calculer la racine commune.

Admettons que les déterminants mineurs, qui correspondent aux éléments de la dernière colonne, ne soient pas tous nuls, et que, par exemple, le déterminant mineur

$$(3)\qquad \delta = \begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') \\ (ac') & (ad')+(bc') & (ae')+(bd') \\ (ad') & (ac')+(bd') & (bc')+(cd') \end{vmatrix},$$

qui correspond à l'élément (de') de la quatrième colonne, soit différent de zéro.

On aura le système des trois équations

$$(4)\qquad \begin{cases} (ab')x^3 + (ac')x^2 + (ad')x + (ae') = 0, \\ (ac')x^3 + [(ad')+(bc')]x^2 + [(ae')+(bd')]x + (be') = 0, \\ (ad')x^3 + [(ac')+(bd')]x^2 + [(bc')+(cd')]x + (ce') = 0, \end{cases}$$

qu'on résoudra par rapport à l'inconnue x. On en déduira

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ad') \\ (ad') & (ad')+(bc') & (ae')+(be') \\ (ad') & (ac')+(bd') & (bc')+(cd') \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} (ab') & (ac') & (ae') \\ (ac') & (ad')+(bc') & (be') \\ (ad') & (ac')+(bd') & (ce') \end{vmatrix} = 0,$$

pour la valeur de la racine commune.

Si tous les déterminants mineurs relatifs aux éléments de la dernière colonne dans Δ (2) sont nuls, on aura un système de trois équations (4) à trois inconnues dont le déterminant est nul. Par suite, il y a indétermination, puisqu'il ne saurait y avoir impossibilité, attendu que le système (4) est satisfait par la racine commune des deux équations données, racine dont l'existence est constatée par la relation $\Delta = 0$.

Dans ce cas les équations proposées admettent au moins deux racines communes.

Le déterminant δ (3) étant nul, supposons que dans δ les déterminants mineurs relatifs aux éléments de la dernière colonne ne soient pas tous

nuls, et que, par exemple, le déterminant mineur

$$\delta' = \begin{vmatrix} (ab') & (ac') \\ (ac') & (ad') + (bc') \end{vmatrix},$$

qui correspond à l'élément $(be') + (ed')$ de la troisième colonne, soit différent de zéro.

On prendra le système des deux équations

$$(ab')x^3 + (ac')x^2 + (ad')x + (ae') = 0,$$
$$(ac')x^3 + [(ad') + (be')]x^2 + [(ae') + (bd')]x + (be') = 0,$$

entre les deux inconnues x^3 et x^2, et on le résoudra par rapport à l'inconnue x^2. On trouve ainsi l'équation du second degré

$$\begin{vmatrix} (ab') & (ac') \\ (ac') & (ad') + (bc') \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} (ab') & (ad')x + (ae') \\ (ae') & [(ae') + (bd')]x + (be') \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne les deux racines communes.

De ce qui précède on conclut que :

Chaque fois que les coefficients des équations (5) *et* (6) *du n° 152 sont réels, si ces équations admettent une racine commune, cette racine est réelle ;*

S'il y a deux racines communes, elles sont ou réelles toutes les deux ou imaginaires conjuguées ;

S'il y en a trois, elles sont ou toutes les trois réelles, ou bien l'une est réelle et les deux autres sont imaginaires conjuguées.

§ IV. — Calcul des racines doubles d'une équation.

168. La méthode que nous allons employer est générale. Nous la donnons pour l'équation du troisième degré

$$(1) \qquad f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0.$$

Si cette équation admet une racine double $x = \alpha$, la racine sera commune à l'équation donnée (1) et à celle

$$(2) \qquad f'(x) = x^2 + 2ax + b = 0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée première de $f(x)$.

La résultante des deux équations (1) et (2) fournit la con-

dition pour qu'elles admettent une racine commune, et par suite aussi la condition pour que l'équation (1) ait deux racines égales.

Pour éliminer x entre les équations (1) et (2), nous emploierons la méthode d'Euler, en posant

$$\frac{x^3+3ax^2+3bx+c}{x-\alpha}=x^2+Ax+B,\quad \frac{x^2+2ax+b}{x-\alpha}=x+C,$$

et en multipliant ces deux égalités en croix. Nous obtenons ainsi l'équation

$$(x^2+Ax+B)(x^2+2ax+b)-(x+C)(x^3+3ax^2+3bx+c)=0,$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned}(A-C-a)x^3+(2Aa+B-3Ca-2b)x^2\\ +(Ab+2Ba-3Cb-c)x+BbCc=0.\end{aligned}$$

Égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, nous formons les quatre équations, à trois inconnues A, B, C,

$$\begin{aligned} A \qquad\qquad -C-a &= 0,\\ 2aA+\quad B-3aC-2b &= 0,\\ bA+2aB-3bC-c &= 0,\\ +\quad bB-\quad cC \qquad &= 0,\end{aligned}$$

qui, pour être compatibles, exigent que leur déterminant soit nul (134). On trouve ainsi l'équation de condition

$$0=\begin{vmatrix}1&0&1&a\\2a&1&3a&2b\\b&2a&3b&c\\0&b&c&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&a\\2a&1&a&2b\\b&2a&2b&c\\0&b&c&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&a&2b\\2a&2b&c\\b&c&0\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}2a&1&a\\b&2a&2b\\0&b&c\end{vmatrix},$$

qui se réduit à

$$(3)\qquad 4a^3c-3a^2b^2-6abc+4b^3+c^2=0.$$

Lorsque cette condition est remplie, on obtient la valeur

de la racine double, en éliminant x^2 et x entre les trois équations

$$\begin{aligned}(x+3a)x^2+3bx+c&=0,\\(x+2a)x^2+\quad bx\qquad&=0,\\x^2+2ax+b&=0,\end{aligned}$$

dont la seconde s'obtient en multipliant (2) par x, et où les coefficients de x^2 sont regardés comme des constantes.

La racine double est donc fournie par l'équation

$$\begin{vmatrix} x+3a & 3b & c \\ x+2a & b & 0 \\ 1 & 2a & b \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne

$$(4)\qquad x = -\frac{\begin{vmatrix} 3a & 3b & c \\ 2a & b & 0 \\ 1 & 2a & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3b & c \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}} = \frac{3a(b^2-ac)+c(b-a^2)}{2(b^2-ac)}$$

ou

$$x = \frac{4b(b^2-ac)+c(c-ab)}{2a(b^2-ac)},$$

en ayant égard à la relation (3).

Si l'équation du troisième degré est donnée sous la forme

$$(5)\qquad x^3+px+q=0,$$

il suffira de poser, dans la relation (3) et la valeur (4),

$$a=0,\quad b=\frac{p}{3},\quad c=q.$$

On trouve ainsi que l'équation (5) admettra une racine double si l'on a

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0,$$

et que cette racine double sera $-\dfrac{3q}{2p}$.

§ V. — Résolution de l'équation du troisième degré.

169. Considérons le déterminant du troisième ordre

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

nous en obtenons la valeur développée, en l'ordonnant suivant les éléments de la première colonne; il nous vient ainsi

$$\Delta = a\begin{vmatrix} c & a \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & c \\ a & b \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} b & c \\ c & a \end{vmatrix}$$
$$= a(bc - a^2) + b(ca - b^2) + c(ab - c^2),$$

ou

$$(2) \qquad \Delta = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3).$$

Nous trouverons une autre expression de Δ, en augmentant, dans (1), la première colonne de la somme des deux autres; ce qui nous donne

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ b+c+a & c & a \\ c+a+b & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix},$$

et prouve que le polynôme (2) admet le diviseur $a + b + c$.

Soit α l'une des deux racines cubiques imaginaires de l'unité, l'autre sera α^2. Si dans (2) nous remplaçons a et b respectivement par $a\alpha$ et $b\alpha^2$, ce polynôme devient

$$3a\alpha . b\alpha^2 . c - (a^3\alpha^3 + b^3\alpha^6 + c^3)$$
$$= 3abc . \alpha^3 - (a^3 + b^3\alpha^3 + c^3)\alpha^3 = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3),$$

attendu que $\alpha^3 = 1$; ce polynôme n'a donc pas changé et l'on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} a\alpha & b\alpha^2 & c \\ b\alpha^2 & c & a\alpha \\ c & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\alpha^2 + c & b\alpha^2 & c \\ b\alpha^2 + c + a\alpha & c & a\alpha \\ c + a\alpha + b\alpha^2 & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix},$$

ou

$$\Delta = (a\alpha + b\alpha^2 + c)\begin{vmatrix} 1 & b\alpha^2 & c \\ 1 & c & a\alpha \\ 1 & a\alpha & b\alpha^2 \end{vmatrix};$$

donc le polynôme (2) est aussi divisible par $a\alpha + b\alpha^2 + c$.

On verrait de même qu'il est encore divisible par $a\alpha^2 + b\alpha + c$.

Il vient ainsi, quels que soient a, b et c,

$$\begin{aligned} &3abc - (a^3 + b^3 + c^3) \\ &\quad = (a + b + c)(a\alpha + b\alpha^2 + c)(a\alpha^2 + b\alpha + c) \times q; \end{aligned}$$

or, pour $a = 0$ et $b = 0$, les deux membres se réduisent à $-c^3$ et $c^3 q$; par suite, q est égal à -1 et l'on a

$$(3) \quad a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a\alpha + b\alpha^2 + c)(a\alpha^2 + b\alpha + c).$$

Dans cette identité remplaçons c par $-x$; elle devient, par le changement des signes,

$$x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = (x - a - b)(x - a\alpha - b\alpha^2)(x - a\alpha^2 - b\alpha).$$

et donne

$$(4) \qquad x_1 = a + b, \quad x_2 = a\alpha + b\alpha^2, \quad x_3 = a\alpha^2 + b\alpha$$

pour les trois racines de l'équation

$$(5) \qquad x^3 - 3abx - a^3 - b^3 = 0.$$

Si l'on avait à résoudre l'équation

$$(6) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

il suffirait de poser dans (5)

$$ab = -\frac{p}{3}, \quad a^3 + b^3 = -q,$$

ce qui donnerait pour a et b les valeurs connues

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Les trois racines de l'équation (6) seront donc

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{-3} - 1}{2} \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} - \frac{\sqrt{-3} + 1}{2} \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{-3} - 1}{2} \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} - \frac{\sqrt{-3} + 1}{2} \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

170. Nous venons de voir que le déterminant (1) du troisième ordre se décompose en un produit de trois facteurs du premier degré par rapport aux quantités a, b et c. Cette décomposition constitue un cas particulier de la proposition suivante.

Théorème. — *Lorsqu'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre*

$$(7) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & \dots & k & l \\ b & c & \dots & k & l & a \\ c & \dots & k & l & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l & a & b & c & \dots & k \end{vmatrix}$$

a pour lignes ou pour colonnes les n permutations circulaires que l'on peut former avec une suite de n quantités

$$a, \quad b, \quad c, \quad \dots, \quad k, \quad l,$$

ce déterminant est le produit de n facteurs du premier degré par rapport à ces quantités. Ces facteurs sont les sommes des produits que l'on obtient, en multipliant ces quantités par les n puissances successives de chacune des n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. A la première colonne de Δ ajoutons les $n-1$ autres colonnes multipliées respectivement par les $n-1$ premières puissances de α; nous aurons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a + b\alpha + c\alpha^2 + \dots + k\alpha^{n-2} + l\alpha^{n-1} & b & c & \dots & k & l \\ b + c\alpha + \dots\dots + l\alpha^{n-2} + a\alpha^{n-1} & c & \dots & k & l & a \\ c + \dots\dots\dots + a\alpha^{n-2} + b\alpha^{n-1} & \dots & k & l & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l + a\alpha + b\alpha^2 + \dots\dots\dots + k\alpha^{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & k \end{vmatrix}.$$

Appelons A le premier élément

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{n-1}$$

de la première colonne; nous avons le second élément de cette colonne

$$b + c\alpha + \ldots + l\alpha^{n-2} + a\alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{n-1} + a) = \alpha^{n-1}.\mathrm{A},$$

attendu que

$$\alpha^{n-1}.\alpha = \alpha^n = 1, \quad \alpha^{n-1}.\alpha^2 = \alpha^n.\alpha = \alpha, \quad \ldots, \quad \alpha^{n-1}.\alpha^{n-1} = \alpha^n.\alpha^{n-2} = \alpha^{n-2};$$

il s'ensuit que le premier élément A de la première colonne divise le second élément de cette colonne; il est facile de voir que A divise aussi le troisième élément, le quatrième et jusqu'au dernier élément de la première colonne; donc le déterminant Δ est divisible par

$$\mathrm{A} = a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{n-1}.$$

On verrait de même qu'il est divisible par

$$\mathrm{B} = a + b\beta + c\beta^2 + \ldots + l\beta^{n-1},$$
$$\mathrm{C} = a + b\gamma + c\gamma^2 + \ldots + l\gamma^{n-1},$$

et ainsi de suite. Ce déterminant Δ est donc de la forme

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta = \mathrm{K}(a + b\alpha + c\alpha^2 + \ldots + l\alpha^{n-1}) \\ \qquad \times (a + b\beta + c\beta^2 + \ldots + l\beta^{n-1}) \\ \qquad \times (a + b\gamma + c\gamma^2 + \ldots + l\gamma^{n-1}) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \times (a + b\lambda + c\lambda^2 + \ldots + l\lambda^{n-1}); \end{array} \right.$$

mais l'hypothèse $a = b = c = \ldots = k = 0$ réduit le déterminant (7) à sa seconde diagonale, qui est composée de n éléments égaux à l; la valeur de ce déterminant se réduit donc à $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} l^n$. La même hypothèse réduit le déterminant (8) à $\mathrm{K}l^n$. Donc on a $\mathrm{K} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

§ VI. — Les différences des racines d'une équation.

171. Produit des différences de n quantités. — Soient données les n quantités quelconques

$$(1) \qquad a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad k, \quad l$$

et le déterminant

$$(2)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & \dots & l \\ a^2 & b^2 & c^2 & \dots & l^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \dots & l^{n-1} \end{vmatrix}$$

formé avec les n premières puissances de ces quantités, comptées à partir de la puissance zéro. Si dans Δ nous posons $b = a$, les deux premières colonnes deviendront identiques et le déterminant s'annulera; par suite Δ est divisible par $a - b$. On verrait de même que Δ est divisible par la différence de deux quelconques des n quantités (1). Donc on a

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta = \mathrm{K}(a-b)(a-c)(a-d)\dots(a-k)(a-l) \\ \times(b-c)(b-d)\dots(b-k)(b-l) \\ \times(c-d)\dots(c-k)(c-l) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \times(h-k)(h-l) \\ \times(k-l), \end{aligned} \right.$$

où K désigne le coefficient par lequel il faut multiplier le produit des différences des n quantités (1) pour avoir Δ.

Or le degré de ce produit est $1+2+3+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ et le degré du déterminant (2) est aussi $\frac{n(n-1)}{2}$; donc K ne peut représenter qu'un facteur numérique.

Supposons que les n quantités (2) soient rangées par ordre de grandeurs croissantes; chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ différences du produit (3) sera négative; par suite on a $\mathrm{K} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

172. Produit des carrés des différences des racines d'une équation algébrique. — Supposons que les n quantités (1) soient les racines d'une équation $f(x) = 0$, et désignons par $s_0, s_1, s_2, \dots, s_{2n-2}$ les sommes des puissances zéro, première,

deuxième, ..., $(2n-2)^{\text{ième}}$ de ces racines. Si nous élevons au carré le déterminant (2), nous aurons

$$\begin{vmatrix} 1+1+1+\ldots+1 & a+b+\ldots+l & \ldots & a^{n-1}+b^{n-1}+\ldots+l^{n-1} \\ a+b+\ldots+l & a^2+b^2+\ldots+l^2 & \ldots & a^n+b^n+\ldots+l^n \\ a^2+b^2+\ldots+l^2 & a^3+b^3+\ldots+l^3 & \ldots & a^{n+1}+b^{n+1}+\ldots+l^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1}+b^{n-1}+\ldots+l^{n-1} & a^n+b^n+\ldots+l^n & \ldots & a^{2n-2}+b^{2n-2}+\ldots+l^{2n-2} \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

pour le produit des carrés des différences des racines de notre équation.

Si l'équation a deux racines égales, ce dernier déterminant est forcément nul.

Ainsi l'équation du troisième degré aura deux racines égales, si l'on a

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2+1 & 2\alpha+\beta & 2\alpha^2+\beta^2 \\ 2\alpha+\beta & 2\alpha^2+\beta^2 & 2\alpha^3+\beta^3 \\ 2\alpha^2+\beta^2 & 2\alpha^3+\beta^3 & 2\alpha^4+\beta^4 \end{vmatrix},$$

où α représente la racine double et β la racine simple, est égal à zéro.

173. Somme des carrés des différences des racines de l'équation du troisième degré. — Nous savons que (108)

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{matrix} \right\| = (b-a)+(c-b)+(a-c);$$

or la somme des carrés des trois déterminants compris dans cette notation est (112)

$$\begin{vmatrix} 1+1+1 & a+b+c \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix};$$

par conséquent il vient

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons supposer que a, b et c soient les racines de l'équation du troisième degré.

§ VII. — Résolution d'un système de deux équations a deux inconnues.

174. Proposons-nous de résoudre le système des deux équations à deux inconnues x et y,

$$f(x,y)=0, \quad \varphi(x,y)=0,$$

dont nous supposerons la première du $m^{\text{ième}}$ degré par rapport à x et y et la seconde du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à ces inconnues.

Ordonnons les deux équations par rapport aux puissances décroissantes de x et soient

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x,y) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m = 0, \\ \varphi(x,y) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = 0 \end{cases}$$

les formes résultantes de ces deux équations, dans lesquelles les coefficients a_0, a_1, ..., a_m et b_0, b_1, ..., b_m seront des fonctions de y. Le coefficient a_0 sera du degré zéro par rapport à y, a_1 du degré 1 au plus, a_2 du degré 2, ..., a_m du degré m en y; de même les coefficients b_0, b_1, ..., b_n seront au plus des degrés 0, 1, ..., n par rapport à y.

Soit $x=\alpha$, $y=\beta$ une solution du système donné (1). Si dans ces équations nous posons $y=\beta$, nous aurons deux

équations en x,

$$(2) \qquad f(x,\beta)=0, \quad \varphi(x,\beta)=0,$$

qui admettront une racine commune α.

Éliminant x entre ces deux équations (2), d'après la méthode de Cauchy (152 et 154), nous obtenons l'équation résultante $R=0$, qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (2) aient une racine commune.

Si, dans l'équation $R=0$, nous remettons y à la place de β, la relation $R=0$ sera une équation en y.

175. *Cette équation sera au plus du degré mn par rapport à y.*

En effet, le résultant R est une fonction algébrique, entière et rationnelle, des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n$ des équations (1) et (2); il est du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à $a_0, a_1, \ldots, a_m$ et du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Mais, parmi les premiers coefficients, a_m contient y à la puissance la plus élevée qui ne dépasse pas la $m^{\text{ième}}$; par suite R, qui est du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport aux a, est au plus du $mn^{\text{ième}}$ degré en y.

De même, parmi les seconds coefficients, b_n contient y à la puissance la plus élevée qui ne dépasse pas la $n^{\text{ième}}$; par suite R, qui est du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport aux b, est au plus du $mn^{\text{ième}}$ degré en y.

176. Pour résoudre le système (1), de l'équation résultante $R=0$, qui est du degré mn en y, on tire les mn valeurs de y

$$y=y_1, \quad y=y_2, \quad \ldots, \quad y=y_{mn}.$$

On les substitue dans les deux équations (1). On obtient ainsi mn groupes de deux équations en x, qui sont

$$\begin{array}{ll} f(x,y_1)=0, & \varphi(x,y_1)=0; \\ f(x,y_2)=0, & \varphi(x,y_2)=0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ f(x,y_{mn})=0, & \varphi(x,y_{mn})=0. \end{array}$$

On détermine ensuite la racine commune aux deux équations de chaque groupe. Si $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$ désignent les racines communes à ces mn groupes respectifs, les couples de valeurs

$$\begin{array}{ll} x = x_1, & y = y_1, \\ x = x_2, & y = y_2, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ x = x_{mn}, & y = y_{mn} \end{array}$$

formeront les solutions du système proposé.

177. Lorsque les deux équations (1) sont du même degré m, l'équation du degré m^2 en y sera (**152**)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \ldots & H_1 \\ A_2 & B_2 & \ldots & H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_m & B_m & \ldots & H_m \end{vmatrix} = 0,$$

où $A_1, B_1, \ldots, A_2, \ldots, H_m$ ont les valeurs (**152**)

$$\begin{array}{l} A_1 = a_0 b_1 - a_1 b_0, \quad B_1 = a_0 b_2 - a_2 b_0, \quad \ldots, \\ A_2 = a_0 b_2 - a_2 b_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \quad H_m = a_{m-1} b_m - a_m b_{m-1}. \end{array}$$

Si, au contraire, les deux équations sont de degrés différents m et n, l'équation du degré mn en y sera (**154**)

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & \ldots & H_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \ldots & H_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & B_n & C_n & \ldots & H_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_m \end{vmatrix} = 0.$$

CHAPITRE IV.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA TRIGONOMÉTRIE.

178. Relation entre les cosinus des trois angles d'un triangle. — Soient A, B, C les trois angles d'un triangle et a, b, c les côtés respectivement opposés. Sur chacun des trois côtés projetons l'ensemble des deux autres côtés; nous formons les trois équations homogènes du premier degré entre les trois inconnues a, b, c

$$(1)\quad \begin{cases} -a + b\cos C + c\cos B = 0, \\ a\cos C - b + c\cos A = 0, \\ a\cos B + b\cos A - c = 0, \end{cases}$$

qui, devant être compatibles, exigent que leur déterminant soit nul. On trouve ainsi la relation

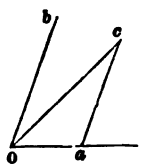
$$(1)\quad \begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(1)\quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C - 1 = 0.$$

179. Condition pour que trois droites Oa, Ob, Oc (*fig.* 1),

Fig. 1.



issues d'un même point O, soient situées dans un même plan. — Posons les angles aOc = A, bOc = B, aOb = C. Par un

point quelconque a de la droite Oa menons une parallèle ac à Ob. Si la droite Ob est située dans le plan aOc, cette parallèle rencontre la ligne Oc en un point c et forme avec elle et Oa le triangle Oac.

Les trois angles de ce triangle seront

$$aOc = A, \quad Oca = bOc = B, \quad Oac = \pi - aOb = \pi - C;$$

par conséquent nous avons entre ces angles la relation (178)

$$\begin{vmatrix} -1 & -\cos C & \cos B \\ -\cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous pouvons multiplier la première et la deuxième ligne par -1, puis multiplier aussi par -1 la troisième colonne résultante; nous obtenons ainsi la condition demandée

$$\text{(II)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & 1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dont le développement est

$$(2) \qquad 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 0.$$

Si α et β désignent les angles que fait une droite Oc avec les deux axes de coordonnées Oa et Ob, et que θ soit l'angle de ces axes, on aura entre ces trois angles la relation

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\theta \\ \cos\beta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

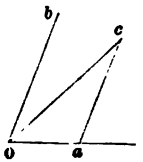
ou

$$(3) \qquad \sin^2\theta = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta.$$

180. Réciproquement, *si la condition* (II) *ou* (2) *est remplie, les trois droites* Oa, Ob, Oc (*fig.* 2) *sont situées dans un même plan.*

Car, si l'on augmente et que l'on diminue à la fois le pre-

Fig. 2.



mier membre du produit $\cos^2 A \cos^2 B$, l'égalité précédente (2) devient

$$1 - \cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \cos^2 B$$
$$+ 2\cos A \cos B \cos C - \cos^2 C = 0$$

ou

$$(1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) - (\cos A \cos B - \cos C)^2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\sin^2 A \sin^2 B - (\cos A \cos B - \cos C)^2 = 0,$$

ou encore

$$(\sin A \sin B + \cos A \cos B - \cos C)$$
$$\times (\sin A \sin B - \cos A \cos B + \cos C) = 0.$$

Le premier facteur est égal à

$$\cos(A - B) - \cos C = 2 \sin \frac{C + A - B}{2} \sin \frac{C - A + B}{2};$$

le second facteur est égal à

$$\cos C - \cos(A + B) = 2 \sin \frac{A + B + C}{2} \sin \frac{A + B - C}{2}.$$

Notre relation (2) revient donc à l'équation

$$4 \sin \frac{A + B + C}{2} \sin \frac{B + C - A}{2} \sin \frac{C + A - B}{2} \sin \frac{A + B - C}{2} = 0.$$

Or celle-ci exprime que la somme des trois angles A, B, C est égale à quatre angles droits, ou que l'un d'eux est égal à la somme des deux autres; donc les trois droites O*a*, O*b*, O*c* sont situées dans un même plan.

* **181.** Nous pouvons donner une application curieuse de la formule (II), en l'employant à déterminer le rayon du cercle tangent à trois cercles donnés.

Soient O_1, O_2, O_3 les centres de ces trois cercles; r_1, r_2, r_3 leurs rayons. Considérons le cercle qui est tangent extérieurement à nos cercles et soit O son centre et x son rayon.

Joignons le centre O aux centres des trois cercles donnés et menons les droites O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2.

Afin de simplifier les calculs, posons

$$(5)\quad OO_1 = x + r_1 = R_1,\quad OO_2 = x + r_2 = R_2,\quad OO_3 = x + r_3 = R_3,$$

et faisons

$$(6)\qquad O_2O_3 = a,\quad O_3O_1 = b,\quad O_1O_2 = c,$$

puis

$$\text{l'angle } O_2OO_3 = A,\quad O_3OO_1 = B,\quad O_1OO_2 = C.$$

Les angles A, B, C, étant compris entre trois droites OO_1, OO_2, OO_3 issues, dans le plan, d'un même point O, satisfont nécessairement à la relation (II).

Or le triangle OO_1O_2 nous donne

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{OO_1}^2 + \overline{OO_2}^2 - 2OO_1\,OO_2\cos C,$$

ou, en ayant égard aux égalités (5) et (6),

$$c^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos C;$$

par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} 2R_2R_3\cos A &= R_2^2 + R_3^2 - a^2,\\ 2R_3R_1\cos B &= R_3^2 + R_1^2 - b^2,\\ 2R_1R_2\cos C &= R_1^2 + R_2^2 - c^2. \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans la relation (II), après avoir multiplié les trois lignes respectivement par $2R_1$, $2R_2$, $2R_3$ et les trois colonnes par R_1, R_2, R_3; nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} 2R_1^2 & R_2^2 + R_1^2 - c^2 & R_3^2 + R_1^2 - b^2 \\ R_1^2 + R_2^2 - c^2 & 2R_2^2 & R_3^2 + R_2^2 - a^2 \\ R_1^2 + R_3^2 - b^2 & R_2^2 + R_3^2 - a^2 & 2R_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

que nous pouvons mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & -R_1^2 & -R_2^2 & -R_3^2 \\ 0 & 2R_1^2 & R_2^2 + R_1^2 - c^2 & R_3^2 + R_1^2 - b^2 \\ 0 & R_1^2 + R_2^2 - c^2 & 2R_2^2 & R_3^2 + R_2^2 - a^2 \\ 0 & R_1^2 + R_3^2 - b^2 & R_2^2 + R_3^2 - a^2 & 2R_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut simplifier le premier membre, en ajoutant la première ligne à chacune des trois suivantes, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 1 & -R_1^2 & -R_2^2 & -R_3^2 \\ 1 & R_1^2 & R_1^2-c^2 & R_1^2-b^2 \\ 1 & R_2^2-c^2 & R_2^2 & R_2^2-a^2 \\ 1 & R_3^2-b^2 & R_3^2-a^2 & R_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -R_1^2 & -R_2^2 & -R_3^2 \\ 1 & -R_1^2 & R_1^2 & R_1^2-c^2 & R_1^2-b^2 \\ 1 & -R_2^2 & R_2^2-c^2 & R_2^2 & R_2^2-a^2 \\ 1 & -R_3^2 & R_3^2-b^2 & R_3^2-a^2 & R_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette équation on peut aussi simplifier le premier membre, en ajoutant la seconde colonne à chacune des trois suivantes. Nous trouvons ainsi, après avoir changé les signes de la première ligne, puis des quatre dernières colonnes,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & R_1^2 & R_2^2 & R_3^2 \\ 1 & R_1^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & R_2^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & R_3^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il nous suffira ici de mettre à la place de R_1, R_2, R_3 leurs valeurs (5), pour avoir l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x+r_1)^2 & (x+r_2)^2 & (x+r_3)^2 \\ 1 & (x+r_1)^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & (x+r_2)^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & (x+r_3)^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui nous donne le rayon x du cercle tangent aux trois cercles donnés.

182. Relation en déterminant entre les trois côtés a, b, c d'un triangle et l'angle A opposé à l'un d'eux. — Dans les équations (1) considérons comme inconnues les angles B et C.

Ces équations pouvant s'écrire

$$a - b\cos C - c\cos B = 0,$$
$$b - c\cos A - a\cos C - 0.\cos B = 0,$$
$$c - b\cos A - 0.\cos C - a\cos B = 0,$$

on voit que l'élimination de $-\cos C$ et $-\cos B$ donne immédiatement la relation

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b - c\cos A & a & 0 \\ c - b\cos A & 0 & a \end{vmatrix} = 0,$$

qui devient, en divisant les deux dernières colonnes par a, puis en multipliant par a la première ligne résultante,

$$\begin{vmatrix} a^2 & b & c \\ b - c\cos A & 1 & 0 \\ c - b\cos A & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire

$$a^2 = -\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ b - c\cos A & 1 & 0 \\ c - b\cos A & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\text{(IV)} \quad a^2 = -\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ b & 1 & \cos A \\ c & \cos A & 1 \end{vmatrix} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

183. Résoudre l'équation

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 & 0 \\ \cos x & 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ 0 & \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De la seconde ligne retranchons la première multipliée

par $\cos x$; il nous vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 x & \cos\alpha & \cos\beta \\ 0 & \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ 0 & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce dernier déterminant par la règle de Sarrus (52), on trouve de suite que

$$\sin^2\gamma \sin^2 x = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

d'où

$$\sin x = \frac{\pm\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\gamma}.$$

184. Vérifier l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ 1 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ 1 & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = -16\sin^2\frac{\lambda}{2}\sin^2\frac{\mu}{2}\sin^2\frac{\nu}{2}.$$

Représentons ce déterminant par Δ. Retranchons la première ligne de chacune des trois suivantes; nous trouvons que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cos\nu - 1 & \cos\mu - 1 \\ 0 & \cos\nu - 1 & 0 & \cos\lambda - 1 \\ 0 & \cos\mu - 1 & \cos\lambda - 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos\nu - 1 & \cos\mu - 1 \\ \cos\nu - 1 & 0 & \cos\lambda - 1 \\ \cos\mu - 1 & \cos\lambda - 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant est du troisième ordre; on peut en calculer immédiatement la valeur développée par la règle de Sarrus. On trouve ainsi que

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(\cos\lambda - 1)(\cos\mu - 1)(\cos\nu - 1) \\ &= -2(1 - \cos\lambda)(1 - \cos\mu)(1 - \cos\nu), \end{aligned}$$

ou bien

$$\Delta = -16 \sin^2 \frac{\lambda}{2} \sin^2 \frac{\mu}{2} \sin^2 \frac{\nu}{2},$$

en se rappelant que $1 - \cos\lambda = 2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}$.

185. Prouver que

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} \\ &= \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta). \end{aligned} \right.$$

Retranchons la première colonne de chacune des deux suivantes; il nous vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \sin\beta - \sin\alpha & \sin\gamma - \sin\alpha \\ \cos\alpha & \cos\beta - \cos\alpha & \cos\gamma - \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\beta - \sin\alpha & \sin\gamma - \sin\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \cos\gamma - \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (\sin\beta - \sin\alpha)(\cos\gamma - \cos\alpha) - (\sin\gamma - \sin\alpha)(\cos\beta - \cos\alpha$$

$$= (\sin\beta \cos\gamma - \sin\gamma \cos\beta)$$
$$+ (\sin\gamma \cos\alpha - \sin\alpha \cos\gamma) + (\sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha);$$

donc on a

$$\Delta = \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta).$$

186. Démontrer qu'on a encore

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} \\ &= -4 \sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \end{aligned} \right.$$

Nous venons de voir que

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\beta - \sin\alpha & \sin\gamma - \sin\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \cos\gamma - \cos\alpha \end{vmatrix};$$

or on sait que

$$\sin\beta - \sin\alpha = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$
$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

par conséquent il vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) & 2\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \\ 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) & -2\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \end{vmatrix}$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} -\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) & \cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \\ \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) & -\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant est égal à

$$\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha-\alpha-\beta) = -\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma);$$

donc on a aussi

$$\Delta = -4\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Si l'on rapproche les deux valeurs (7) et (8), on verra que

$$\sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$= -4\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

187. Faire voir, en troisième lieu, qu'on a aussi

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) & \cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) & \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \\ \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) & \cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) & \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) & \sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) & \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \end{vmatrix}$$
$$= \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) + \sin(\alpha-\beta).$$

Prenons l'égalité trouvée plus haut (185)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha - \sin\gamma & \sin\beta - \sin\alpha \\ \cos\alpha - \cos\gamma & \cos\beta - \cos\alpha \end{vmatrix},$$

et multiplions les deux membres par l'identité

$$\Delta = \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) + \sin(\alpha-\beta);$$

nous obtenons une égalité que nous pouvons mettre sous la forme suivante :

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta) & \sin(\gamma-\alpha) & \sin(\alpha-\beta \\ 0 & \sin\alpha-\sin\gamma & \sin\beta-\sin \\ 0 & \cos\alpha-\cos\gamma & \cos\beta-\cos \end{vmatrix}$$

De la première colonne retranchons la somme des deux autres; il nous viendra

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} \sin(\beta-\gamma) & \sin(\gamma-\alpha) & \sin(\alpha-\beta) \\ \sin\gamma-\sin\beta & \sin\alpha-\sin\gamma & \sin\beta-\sin\alpha \\ \cos\gamma-\cos\beta & \cos\alpha-\cos\gamma & \cos\beta-\cos\alpha \end{vmatrix};$$

puis, en remplaçant les éléments par des produits équivalents et en changeant les signes de la seconde ligne,

$$\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) & 2\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) & 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma- \\ 2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) & 2\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) & 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma- \\ 2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) & 2\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) & 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma- \end{vmatrix}$$

Actuellement divisant les trois colonnes par les quantités respectives $2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, $2\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$, $2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, le déterminant aura été divisé par le produit

$$8\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = -2\Delta;$$

de sorte que nous aurons en définitive

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) & \cos\frac{1}{2}(\gamma-\alpha) & \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \\ \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma) & \cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) & \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ \sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma) & \sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha) & \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \end{vmatrix}.$$

LIVRE III.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS A LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS.

§ I. La droite dans le plan. — § II. Le cercle dans le plan. — § III. Les courbes du second degré.

§ I. — La droite dans le plan.

188. Distance d'un point à une droite. — Soit

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0$$

l'équation de la droite MN, qui rencontre les deux axes de coordonnées en M et N, et soient x', y' les coordonnées du point donné P.

De ce point P abaissons sur la droite MN (1) la perpendiculaire $PQ = p$, qui la rencontre en Q, et désignons par α et β les angles qu'elle fait avec les axes de coordonnées. Par le point P menons aussi à la droite MN (1) la parallèle M'N'

$$(2) \qquad Ax + By = Ax' + By',$$

qui rencontre les axes de coordonnées en M' et N'.

Les deux lignes MN (1) et M'N' (2) coupent l'axe des x à des distances de l'origine qui sont respectivement

$$OM = a = -\frac{C}{A}, \quad OM' = a' = \frac{Ax' + By'}{A},$$

et l'axe des y aux distances

$$ON = b = -\frac{C}{B}, \quad ON' = b' = \frac{Ax' + By'}{B}.$$

Par les points M et N menons à la perpendiculaire PQ les parallèles MR et NS jusqu'à la droite M'N' qu'elles rencontrent en R et S.

D'après cela, il est évident qu'on a

$$MR = MM' \cos RMM',$$
$$NS = NN' \cos SNN'$$

ou

$$p = (a' - a)\cos\alpha = \frac{Ax' + By' + C}{A}\cos\alpha,$$
$$p = (b' - b)\cos\beta = \frac{Ax' + By' + C}{B}\cos\beta;$$

d'où nous tirons

$$\cos\alpha = \frac{Ap}{Ax' + By' + C}, \quad \cos\beta = \frac{Bp}{Ax' + By' + C}.$$

Substituons ces valeurs dans le déterminant (III) du n° 179; cette relation devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{Ap}{Ax' + By' + C} & \frac{Bp}{Ax' + By' + C} \\ \frac{Ap}{Ax' + By' + C} & 1 & \cos\theta \\ \frac{Bp}{Ax' + By' + C} & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\frac{Ax' + By' + C}{p}$, nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{(Ax' + By' + C)^2}{p^2} & A & B \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne

$$\frac{(Ax' + By' + C)^2 \sin^2\theta}{p^2} = -\begin{vmatrix} 0 & A & B \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta.$$

Nous en tirons

$$\text{(I)} \qquad p = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

La distance de l'origine à la droite (1) s'obtiendra en posant $x' = 0$, $y' = 0$, et sera

$$\text{(II)} \qquad p = \frac{C\sin\theta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

189. Angle de deux droites OD, OD′ en valeur des inclinaisons de ces deux droites sur les axes de coordonnées. — Nous supposons ces deux droites issues de l'origine O. Soient toujours α et β les angles que fait la première droite OD avec les deux axes; α' et β' ceux que fait la seconde droite OD′ avec les mêmes axes, et γ l'angle DOD′ de ces deux droites.

Sur la première droite prenons une longueur $OM = 1$ et soient x, y les coordonnées du point M. Menons MP parallèle à l'axe des y jusqu'à sa rencontre en P avec l'axe des x.

Projetons la longueur OM et la ligne brisée OP + PM successivement sur la seconde droite OD′ et sur les deux axes; nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned} \cos\gamma - x\cos\alpha' - y\cos\beta' &= 0, \\ \cos\alpha - x \qquad\quad - y\cos\theta &= 0, \\ \cos\beta - x\cos\theta - y \qquad &= 0, \end{aligned}$$

entre lesquelles il suffit d'éliminer les coordonnées $-x$ et $-y$ pour obtenir la relation demandée. Celle-ci est ainsi

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha' & \cos\beta' \\ \cos\alpha & 1 & \cos\theta \\ \cos\beta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

190. Angle de deux droites données par leurs équations

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0.$$

Soient p et p' les perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces deux droites; nous avons

$$\cos\alpha = -\frac{Ap}{C}, \quad \cos\beta = -\frac{Bp}{C};$$

$$\cos\alpha' = -\frac{A'p'}{C'}, \quad \cos\beta' = -\frac{B'p'}{C'}.$$

Si nous mettons ces valeurs dans la relation (III), après avoir multiplié la première colonne par $-\frac{C}{p}$ et la première ligne par $-\frac{C'}{p'}$, elle deviendra

$$\text{(IV)} \qquad \begin{vmatrix} \frac{CC'\cos\gamma}{pp'} & A' & B' \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et donnera

$$\frac{CC'\sin^2\theta\cos\gamma}{pp'} = -\begin{vmatrix} 0 & A' & B' \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$= AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta.$$

Nous en tirons

$$(3) \qquad \cos\gamma = \frac{[AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta]\,pp'}{CC'\sin^2\theta}.$$

Or, en vertu de la formule (II), nous avons

$$pp' = \frac{CC'\sin^2\theta}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta)(A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta)}};$$

par suite nous obtenons, en substituant dans (3),

$$\text{(V)} \quad \cos\gamma = \frac{AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta)(A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta)}}.$$

191. Condition de perpendicularité de deux droites. — Elle s'obtient en posant $\cos\gamma = 0$ dans chacune des relations (III), (IV) et (V); elle est donc exprimée par l'une quelconque des trois égalités

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha' & \cos\beta' \\ \cos\alpha & 1 & \cos\theta \\ \cos\beta & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A' & B' \\ A & 1 & \cos\theta \\ B & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$AA' + BB' - (AB' + BA')\cos\theta = 0,$$

dont la dernière peut aussi se mettre sous la forme

$$\text{(VI)} \qquad \frac{A}{B' - A'\cos\theta} + \frac{B}{A' - B'\cos\theta} = 0.$$

192. Équation de la droite passant par deux points donnés. — La droite

$$C + Ax + By = 0$$

passera par les deux points (x', y'), (x'', y''), si l'on a en même temps

$$C + Ax' + By' = 0,$$
$$C + Ax'' + By'' = 0.$$

Ces trois équations sont homogènes et du premier degré par rapport aux coefficients C, A et B; pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul (**131**), c'est-à-dire que l'on ait

$$\text{(VII)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation demandée de la droite.

Elle exprime en même temps la *condition nécessaire et suffisante, pour que les trois points* (x, y), (x', y') et (x'', y'') *soient situés en ligne droite.*

193. Expressions générales des coordonnées des points situés sur la droite, qui passe par deux points donnés (x', y') et (x'', y''). — Nous avons identiquement

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

A la première ligne de ce déterminant ajoutons les deux suivantes multipliées respectivement par 1 et λ; nous avons encore

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & x'+\lambda x'' & y'+\lambda y'' \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

où λ est une indéterminée quelconque. Si nous divisons la première ligne par $1+\lambda$, nous obtiendrons la relation

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{x'+\lambda x''}{1+\lambda} & \dfrac{y'+\lambda y''}{1+\lambda} \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

qui, étant comparée à (VII), fait voir que le point

$$\text{(VIII)} \qquad x = \frac{x'+\lambda x''}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y'+\lambda y''}{1+\lambda}$$

appartient à la droite (VII), quel que soit λ.

194. Condition pour que trois droites se coupent au même point. — Soient

$$Ax+By+C=0, \quad A'x+B'y+C'=0, \quad A''x+B''y+C''=0$$

les équations de trois droites. Pour qu'elles passent par un même point (x', y'), il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$\begin{aligned} Ax'+By'+C &= 0, \\ A'x'+B'y'+C' &= 0, \\ A''x'+B''y'+C'' &= 0, \end{aligned}$$

conditions qui exigent que leur déterminant soit nul, ou que l'on ait

$$\text{(IX)} \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

§ II. — Le cercle dans le plan.

195. Expression en déterminant de l'équation du cercle en valeurs des dérivées et du rayon [1]. — Soient a, b les coordonnées du centre C d'un cercle, R le rayon de ce cercle; et x, y les coordonnées d'un point quelconque M de la circonférence. L'équation du cercle sera

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 \\ \qquad\qquad + 2(x-a)(y-b)\cos\theta - R^2 = 0, \end{cases}$$

où θ représente l'angle des axes des coordonnées. On en tire

$$f'_x = 2(x-a) + 2(y-b)\cos\theta, \quad f'_y = 2(y-b) + 2(x-a)\cos\theta.$$

Or l'équation (1) du cercle peut se mettre sous la forme

$$(x-a)[(x-a) + (y-b)\cos\theta] \\ + (y-b)[(y-b) + (x-a)\cos\theta] - R^2 = 0,$$

ou

$$(x-a)f'_x + (y-b)f'_y - 2R^2 = 0.$$

Nous avons ainsi trois équations

$$2R^2 + (a-x)f'_x + (b-y)f'_y = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'_x + (a-x) + (b-y)\cos\theta = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'_y + (a-x)\cos\theta + (b-y) = 0$$

---

[1] Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1874, t. LVI, p. 104.

entre les deux quantités variables $a - x$ et $b - y$. Éliminant ces deux quantités, il nous vient

$$\begin{vmatrix} 2R^2 & f'_x & f'_y \\ \frac{1}{2}f'_x & 1 & \cos\theta \\ \frac{1}{2}f'_y & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous multiplions la première colonne par 2, nous obtenons

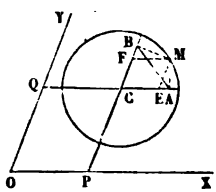
$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} 4R^2 & f'_x & f'_y \\ f'_x & 1 & \cos\theta \\ f'_y & \cos\theta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pour l'*équation du cercle*. En développant le premier membre, on ramène l'équation à la forme

$$\text{(II)} \qquad f'^2_x + f'^2_y - 2\cos\theta\, f'_x f'_y = 4R^2 \sin^2\theta.$$

196. Il est aisé de donner de cette équation une interprétation géométrique. Par le centre C menons (*fig.* 3) les parallèles CA

Fig. 3.



et CB aux axes de coordonnées OX et OY, et du point M (x, y) abaissons les perpendiculaires MA et MB sur ces parallèles; si nous tirons en même temps ME et MF parallèlement à BC et à AC, nous aurons

$$AC = CE + EA = x - a + (y - b)\cos\theta = \tfrac{1}{2}f'_x,$$

$$BC = CF + FB = y - b + (x - a)\cos\theta = \tfrac{1}{2}f'_y,$$

de sorte que le triangle ABC donnera

$$4\overline{AB}^2 = f_x'^2 + f_y'^2 - 2\cos\theta f_x' f_y';$$

on a donc $AB = R\sin\theta$. Ce résultat est d'ailleurs évident, puisque, le quadrilatère ACBM étant inscriptible dans le cercle dont le diamètre MC est R, la corde AB sous-tend l'arc dont la moitié est la mesure de l'angle inscrit θ.

197. Équation du cercle passant par trois points donnés. — Si l'équation

$$(2) \qquad a + bx + cy + x^2 + y^2 = 0$$

représente, dans le cas d'axes rectangulaires, le cercle qui passe par les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), on devra avoir les trois équations de condition

$$(3) \qquad \begin{cases} a + bx_1 + cy_1 + x_1^2 + y_1^2 = 0, \\ a + bx_2 + cy_2 + x_2^2 + y_2^2 = 0, \\ a + bx_3 + cy_3 + x_3^2 + y_3^2 = 0, \end{cases}$$

qui servent à déterminer les valeurs des paramètres a, b et c. Pour que les quatre équations (2) et (3), entre les trois inconnues a, b et c, soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. On obtient ainsi l'équation

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2+y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

qui est précisément celle du cercle en question.

Cette équation exprime en même temps la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) soient situés sur une même circonférence de cercle.

198. Relation entre les distances mutuelles de quatre points $A(x, y)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ et $D(x_3, y_3)$ situés sur une même circon-

férence. — Posons

$$(4)\quad \begin{cases} a^2 = \overline{AB}^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2, \\ b^2 = \overline{BC}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \\ c^2 = \overline{CD}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2, \\ d^2 = \overline{DA}^2 = (x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2, \\ m^2 = \overline{AC}^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2, \\ n^2 = \overline{BD}^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2. \end{cases}$$

L'équation du cercle pourra se mettre sous chacune des deux formes

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2 & -2x & -2y \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & -2x_1 & -2y_1 \\ 1 & x_2^2+y_2^2 & -2x_2 & -2y_2 \\ 1 & x_3^2+y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & 1 & x & y \\ x_1^2+y_1^2 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2^2+y_2^2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3^2-y_3^2 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + 0.$$

Faisons le produit de ces deux déterminants; en multipliant lignes par lignes, nous obtenons la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & (x_1-x)^2+(y_1-y)^2 & (x_2-x)^2+(y_2+y_1)^2 & (x_3-x)^2+(y_3-y)^2 \\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 & 0 & (x_2-x_1)^2+(y_2+y_1)^2 & (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2 \\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 & 0 & (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2 \\ (x-x_3)^2+(y-y_3)^2 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2 & (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

qui, en vertu des égalités (4), s'écrit

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{vmatrix} 0 & a^2 & m^2 & d^2 \\ a^2 & 0 & b^2 & n^2 \\ m^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ d^2 & n^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$2m^2n^2a^2c^2 + 2m^2n^2b^2d^2 + 2a^2c^2b^2d^2 - m^4n^4 - a^4c^4 - b^4d^4 = 0;$$

celle-ci revient au produit

$$(\mathrm{V})\quad (mn + ac + bd)(ac + bd - mn)(mn + ac - bd)(mn + bd - ac) = 0,$$

qui démontre le théorème de Ptolémée sur le produit des diagonales m et n d'un quadrilatère inscriptible ABCD, et les quatre côtés a, b, c et d de ce quadrilatère.

§ III. — Les courbes du second degré.

199. Forme en déterminant des équations de l'ellipse et de l'hyperbole (¹). — L'équation de l'ellipse

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 \mp a'^2b'^2,$$

rapportée à deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$, exprime que : *si l'on joint un point quelconque* M (x, y) *de la courbe aux extrémités* A′ *et* B′ *des deux demi-diamètres conjugués* OA′ $= a'$ *et* OB′ $= b'$, *la somme des carrés des triangles* A′OM *et* B′OM *est égale au carré du triangle* A′OB′.

Cela posé, supposons l'ellipse rapportée à deux axes quelconques, passant par le centre O et comprenant entre eux un angle θ.

Soient x', y' et x'', y'' les coordonnees des extrémités A′ et B′ des deux demi-diamètres conjugués OA′ et OB′; x, y les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe; nous avons (*voir* plus loin n° 210) le triangle

$$\begin{aligned} A'OM &= \pm\tfrac{1}{2}(xy' - yx')\sin\theta, \\ B'OM &= \pm\tfrac{1}{2}(xy'' - yx'')\sin\theta, \\ A'OB' &= \pm\tfrac{1}{2}(x'y'' - y'x'')\sin\theta; \end{aligned}$$

et, comme

$$\overline{A'OM}^2 + \overline{B'OM}^2 = \overline{A'OB}^2,$$

il vient

$$(xy' - yx')^2 + (xy'' - yx'')^2 = (x'y'' - y'x'')^2,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2.$$

Telle est l'équation de l'ellipse rapportée à deux axes de coordonnées quelconques passant par le centre de la courbe,

(¹) Dostor, *La Science*, p. 998, 1855, 2ᵉ semestre. — *Archives de Mathématiques et de Physique*, t. XLVI, 1866; *bulletin bibliographique*, p. 5.

en fonction de coordonnées (x', y') et (x'', y'') des extrémités de deux diamètres conjugués.

Si les coordonnées x'', y'' sont imaginaires et de la forme $\alpha\sqrt{-1}$, cette équation représentera l'hyperbole rapportée à son centre.

200. Propriétés des fonctions homogènes du second degré. — Nous avons besoin, dans la suite, de nous appuyer sur quelques propriétés, dont jouissent les fonctions homogènes du second degré à un nombre quelconque de variables. Nous les établirons, en partant de la fonction à trois variables

$$(1)\quad f(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + Eyz + Fz^2.$$

1° Dans cette fonction, donnons aux variables x, y, z les accroissements respectifs x', y', z'; elle devient

$$\begin{aligned} &f(x+x', y+y', z+z') \\ &\quad = A(x+x')^2 + 2B(x+x')(y+y') + C(y+y')^2 \\ &\qquad + 2D(x+x')(z+z') + 2E(y+y')(z+z') + F(z+z')^2. \end{aligned}$$

Si nous développons le second membre et que nous ordonnions le résultat suivant les puissances des variables x, y, z, nous verrons qu'il se composera des trois parties

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = f(x, y, z),$$

$$2x(Ax' + By' + Dz') + 2y(Bx' + Cy' + Ez') + 2z(Dx' + Ey' + Fz') = xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'},$$

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx'z' + 2Ey'z' + Fz'^2 = f(x', y', z');$$

donc on a

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} f(x+x', y+y', z+z') \\ \quad = f(x,y,z) + xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} + f(x', y', z'). \end{cases}$$

2° Dans cette égalité permutons les variables x, y, z avec leurs accroissements x', y', z'; le premier membre ne change pas; par suite, il en sera de même du second membre; donc il vient

$$(\mathrm{III})\qquad xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} = x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z.$$

Il s'ensuit que le développement (II) peut encore s'écrire

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} f(x+x', y+y', z+z') \\ \quad = f(x, y, z) + x' f'_x + y' f'_y + z' f'_z + f(x', y', z'). \end{cases}$$

3° Dans celui-ci remplaçons x', y', z' par $-x, -y, -z$; le premier membre se réduit évidemment à zéro, tandis que $x f'_x + y' f'_y + z' f'_z$ se change en $-(x f'_x + y f'_y + z f'_z)$ et $f(x', y', z')$ en $f(x, y, z)$. Nous obtenons ainsi l'égalité

$$(\mathrm{V})\qquad 2f(x, y, z) = x f'_x + y f'_y + z f'_z,$$

qui est une conséquence du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.

4° Nous pouvons retrancher du second membre de cette égalité le second membre de l'égalité (III) et ajouter le résultat au premier membre.

Il vient ainsi

$$(\mathrm{VI})\quad \begin{cases} 2f(x, y, z) = (x - x') f'_x + (x - y') f'_y \\ \qquad\qquad + (z - z') f'_z + x f'_{x'} + y f'_{y'} + z f'_{z'}. \end{cases}$$

5° Admettons que l'équation

$$(2)\quad f(x, y) = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0$$

représente une conique à centre. Le premier membre sera identique avec (1), si l'on fait dans cette dernière fonction $z = 1$.

Désignons par a et b les coordonnées du centre. Si dans l'équation (VI) nous posons $x' = a, y' = b, z = z' = 1$ et que nous observions que

$$f'_{x'} = f'_a = 0,\ f'_{y'} = f'_b = 0,\ f'_{z'} = 2(\mathrm{D}a + \mathrm{E}b + \mathrm{F}),$$

cette équation (VI) deviendra

$$(\mathrm{VII})\quad 2f(x, y) = (x - a) f'_x + (y - b) f'_z + 2\mathrm{H} = 0,$$

où

$$\mathrm{H} = \mathrm{D}a + \mathrm{E}b + \mathrm{F}.$$

Telle est la *forme sous laquelle peut se mettre l'équation*

des courbes du second degré, par l'introduction des coordonnées du centre.

201. Équations aux axes des courbes du second degré [1]. — Soit (x', y') un sommet de la conique (2); l'équation de la tangente en ce point sera

$$(x - x')f' + (y - y')f'_{y'} = 0$$

pendant que la droite, menée du centre (a, b) au point de contact (x', y'), sera représentée par l'équation

$$\frac{x - a}{x' - a} = \frac{y - b}{y' - b}.$$

Ces deux droites étant perpendiculaires, les coefficients de x et y satisfont à la relation (VI) du n° 191. On obtient ainsi l'égalité de condition

$$\frac{f'_x}{x' - a + (y' - b)\cos\theta} = \frac{f'_y}{y' - b + (x' - a)\cos\theta}.$$

Cette équation a lieu pour toute droite menée du centre (a, b) à un sommet quelconque de la surface; donc l'équation qu'on obtient en y supprimant les accents des variables, ou bien

$$\text{(VIII)} \quad \frac{f'_x}{x - a + (y - b)\cos\theta} = \frac{f'_y}{y - b + (x - a)\cos\theta},$$

est l'équation aux axes de la conique (2).

202. Grandeur des axes des courbes du second degré. — Dans l'équation précédente multiplions les deux termes de la première fraction par $x - a$, ceux de la seconde par $y - b$, puis faisons la somme des numérateurs et celle des dénominateurs; nous obtenons ainsi une fraction dont le numérateur, en vertu de l'équation (VII), est égal à $-2H$ et dont le dénominateur est égal à R^2, R désignant la distance du centre au sommet de la courbe.

---

[1] Dostor, *La Science*, 1855, 2e semestre, p. 869.

Nous formons ainsi les égalités

$$\frac{f'_x}{x-a+(y-b)\cos\theta}=\frac{f'_y}{y-b+(x-a)\cos\theta}=-\frac{2H}{R^2},$$

qui, par le développement des dérivées, deviennent

$$\frac{A(x-a)+B(y-b)}{x-a+(y-b)\cos\theta}=\frac{B(x-a)+C(y-b)}{y-b+(x-a)\cos\theta}=-\frac{H}{R^2}.$$

Nous en tirons les deux équations homogènes

$$(AR^2+H)(x-a)+(BR^2+H\cos\theta)(y-b)=0,$$
$$(BR^2+H\cos\theta)(x-a)+(CR^2+H)(y-b)=0.$$

Éliminant les variables $x-a$ et $y-b$, on obtient l'équation

$$\text{(IX)}\qquad \begin{vmatrix} AR^2+H & BR^2+H\cos\theta \\ BR^2+H\cos\theta & CR^2+H \end{vmatrix}=0,$$

qui donne les *carrés des demi-axes de la conique à centre* (2).

En développant le déterminant, on la change en

$$\text{(X)}\quad (AC-B^2)R^4+(A-2B\cos\theta+C)HR^2+H^2\sin^2\theta=0.$$

203. Conditions pour que l'équation générale du second degré représente deux droites parallèles. — L'équation (2) représentera deux droites parallèles à la ligne

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},$$

si toute tangente

$$(x-x')f'_{x'}+(y-y')f'_{y'}=0$$

est parallèle à cette droite, c'est-à-dire si l'équation

$$af'_x+bf'_y=0$$

est vérifiée, quelles que soient les coordonnées x', y' du point de contact.

Or l'équation précédente revient à

$$(Aa+Bb)x'+(Ba+Cb)y'+Da+Eb=0;$$

et, pour que celle-ci soit satisfaite par les coordonnées de tout point de la courbe, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$Aa + Bb = 0,$$
$$Ba + Cb = 0,$$
$$Da + Eb = 0.$$

Ces trois équations ne sauraient être satisfaites par les mêmes valeurs des paramètres a et b, que si l'on a les trois relations (131)

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix} = 0,$$

qui reviennent à

$$B^2 - AC = 0, \quad BD - AE = 0, \quad BE - CD = 0.$$

Chacune de ces égalités est une conséquence des deux autres. Elles peuvent encore s'écrire

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

Les équations des deux parallèles seront

$$Ax + By + D = \pm\sqrt{D^2 - 2AF}.$$

CHAPITRE II.

SURFACE DES POLYGONES.

§ I. Expressions diverses en déterminant de la surface du triangle. — § II. Surface des triangles inscrits dans les courbes du second degré. — § III. Surface en déterminant du quadrilatère. — § IV. Surface d'un polygone quelconque.

§ I. — Expressions diverses en déterminant de la surface du triangle.

204. Expression en déterminant de la surface S du triangle ABC, en valeur de ses trois côtés BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$. — Puisque $2S = bc \sin A$, on a

$$4S^2 = b^2c^2(1 - \cos^2 A) = b^2c^2 - b^2c^2\cos^2 A = \begin{vmatrix} c^2 & bc\cos A \\ bc\cos A & b^2 \end{vmatrix},$$

ou, en multipliant par 2 chacune des deux lignes et en observant que $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$,

$$16S^2 = \begin{vmatrix} 2c^2 & 2bc\cos A \\ 2bc\cos A & 2b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c^2 & b^2 + c^2 - a^2 \\ b^2 + c^2 - a^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons remplacer ce déterminant par un déterminant équivalent du troisième ordre et écrire (67)

$$16S^2 = \begin{vmatrix} 1 & -c^2 & -b^2 \\ 0 & 2c^2 & b^2 + c^2 - a^2 \\ 0 & b^2 + c^2 - a^2 & 2b^2 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons la première ligne à chacune des deux suivantes et dans le déterminant résultant changeons les signes des deux dernières colonnes; la valeur du déterminant résultant n'en

sera pas altérée et il nous vient (60)

$$16S^2 = \begin{vmatrix} 1 & -c^2 & -b^2 \\ 1 & c^2 & c^2-a^2 \\ 1 & b^2-a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c^2 & b^2 \\ 1 & -c^2 & a^2-c^2 \\ 1 & a^2-b^2 & -b^2 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant peut à son tour être remplacé par le déterminant équivalent du quatrième ordre (67)

$$16S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 1 & -c^2 & a^2-c^2 \\ b^2 & 1 & a^2-b^2 & -b^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & -c^2 & a^2-c^2 \\ 1 & b^2 & a^2-b^2 & -b^2 \end{vmatrix}.$$

Enfin dans ce dernier déterminant ajoutons la seconde colonne à chacune des deux suivantes; nous trouvons ainsi l'expression demandée

$$\text{(I)} \qquad 16S^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant, en vertu de la transformation du n° 74, revient au suivant:

$$\text{(II)} \qquad 16S^2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Cette dernière forme peut s'obtenir, en s'appuyant sur le théorème suivant.

205. Nouvelle expression de la surface du triangle. — *L'aire d'un triangle est égale au demi-rayon du cercle circonscrit, multiplié par la somme des produits que l'on obtient, en multipliant chaque côté par le cosinus de l'angle opposé* [1].

---

[1] Dostor, *L'Instruction publique*, 1874, p. 128, et *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 204.

Soient O le centre et R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Si nous tirons les rayons AO, BO, CO, nous décomposerons ce triangle dans les trois triangles isoscèles BCO, CAO, ABO, dont les angles au sommet sont les doubles des angles opposés du triangle.

Or, si du centre O nous abaissons sur le côté BC la perpendiculaire OD, nous formons le triangle rectangle BDO qui donne $OD = OB \cos BOD = R \cos A$; d'ailleurs $BC = a$; par suite on trouve que le triangle $BCO = \frac{1}{2} R a \cos A$. On verrait de même que $CAO = \frac{1}{2} R b \cos B$, $ABO = \frac{1}{2} R c \cos C$. Nous obtenons ainsi, pour la surface S du triangle ABC,

$$S = \tfrac{1}{2} R a \cos A + \tfrac{1}{2} R b \cos B + \tfrac{1}{2} R c \cos C,$$

ou

$$\text{(III)} \qquad S = \tfrac{1}{2} R (a \cos A + b \cos B + c \cos C).$$

206. Corollaire I. — *L'aire d'un triangle est égale au demi-rayon du cercle circonscrit, multiplié par le périmètre du triangle qui a pour sommets les pieds des trois hauteurs du triangle donné.*

207. Corollaire II. — Si nous multiplions l'égalité précédente par la relation connue $4RS = abc$, d'abord membre à membre, puis en croix, nous arriverons aux deux expressions

$$\text{(IV)} \qquad S^2 = \tfrac{1}{8} abc (a \cos A + b \cos B + c \cos C),$$

$$R^2 = \frac{abc}{2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)}.$$

208. La première de ces deux équations est très-importante; elle nous permet de trouver immédiatement l'expression en déterminant de la surface du triangle en valeur des trois côtés.

En effet, si nous considérons cette équation comme simultanée avec les trois équations que l'on obtient, en projetant sur chaque côté du triangle la ligne brisée formée par les

deux autres, nous aurons un système de quatre équations linéaires

$$\frac{8S^2}{abc} - a\cos A - b\cos B - c\cos C = 0,$$

$$a - 0.\cos A - c\cos B - b\cos C = 0,$$

$$b - c\cos A - 0.\cos B - a\cos C = 0,$$

$$c - b\cos A - a\cos B - 0.\cos C = 0,$$

entre les trois inconnues $-\cos A$, $-\cos B$, $-\cos C$. L'élimination de ces inconnues nous donne de suite la résultante

$$\begin{vmatrix} \frac{8S^2}{abc} & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où nous tirons

$$\frac{8S^2}{abc}\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix};$$

en développant le premier déterminant, qui se réduit à $2abc$, nous trouvons l'expression

$$\text{(II)} \qquad 16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix},$$

pour le carré de la quadruple surface du triangle ABC, dont les côtés sont a, b, c.

209. Transformation de ce déterminant en produit. — Remplaçons la première colonne par la somme des quatre colonnes; le déterminant ne change pas de valeur et nous

obtenons, en divisant la première colonne résultante par $a+b+c$,

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+c+b & 0 & c & b \\ b+c+a & c & 0 & a \\ c+b+a & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix};$$

donc le déterminant est divisible par $a+b+c$.

Dans le même déterminant (II), de la somme des deux premières colonnes retranchons la somme des deux dernières; il nous viendra

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} a-b-c & a & b & c \\ a-c-b & 0 & c & b \\ b+c-a & c & 0 & a \\ c+b-a & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (b+c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & c & b \\ -1 & c & 0 & a \\ -1 & b & a & 0 \end{vmatrix};$$

par suite le déterminant est aussi divisible par $b+c-a$. On verrait de même qu'il est encore divisible par $c+a-b$ et par $a+b-c$, de sorte qu'on peut écrire

$$16S^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \times q,$$

où il reste à déterminer q.

Or dans le déterminant (II) le produit des éléments situés sur la seconde diagonale principale est c^4; donc il est $-c^4$ dans le déterminant développé. Mais il est aussi $-c^4$ dans le produit des facteurs qui précèdent q; on a donc $q=1$, et il vient

$$\text{V)}\quad 16S^2 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

210. Problème. — *Un triangle* ABC *a son sommet* A *à l'origine des coordonnées; calculer la surface* S *de ce triangle en valeurs des coordonnées* x', y' *et* x'', y'' *des deux autres sommets* B *et* C.

Posons $AB = \rho'$, $AC = \rho''$, et l'angle $XAB = \alpha'$, $XAC = \alpha''$. Si nous supposons le côté AB dirigé entre l'axe des x et le côté AC, nous aurons

$$2S = AB.AC \sin BAC = \rho'\rho'' \sin(\alpha'' - \alpha'),$$

ou

$$2S = \rho' \cos\alpha' . \rho'' \sin\alpha'' - \rho' \sin\alpha' . \rho'' \cos\alpha'';$$

or, les axes des coordonnées étant rectangulaires, on a

$$\rho' \cos\alpha' = x', \quad \rho' \sin\alpha' = y';$$
$$\rho'' \cos\alpha'' = x'', \quad \rho'' \sin\alpha'' = y'';$$

par conséquent il vient

$$2S = x'y'' - y'x'',$$

ou bien

$$(1) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}.$$

Si les axes des coordonnées sont obliques et comprennent entre eux un angle θ, on trouvera d'une manière analogue que

$$(2) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \sin\theta = (x'y'' - y'x'') \sin\theta.$$

211. Expression en déterminant de la surface du triangle ABC en valeur des coordonnées x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 de ses trois sommets A, B, C. — Transportons l'origine des coordonnées au sommet A et appelons x', y'; x'', y'' les coordonnées des deux autres sommets B et C par rapport à cette nouvelle origine, de sorte que

$$x_1 = x + x', \quad y_1 = y + y',$$
$$x_2 = x + x'', \quad y_2 = y + y''.$$

De ces égalités nous tirons

$$x' = x_1 - x, \quad y' = y_1 - y;$$
$$x'' = x_1 - x, \quad y'' = y_2 - y.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (2), nous obtenons

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} \sin\theta,$$

ou, en vertu du n° 64,

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & x_1 - x & y_1 - y \\ 0 & x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} \sin\theta.$$

Ajoutons la première ligne à chacune des deux suivantes; le déterminant ne change pas de valeur, et nous trouvons

$$\text{(VI)} \qquad 2S = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin\theta,$$

pour l'expression demandée de la double surface du triangle.

212. Deuxième méthode pour calculer la surface d'un triangle en valeur des coordonnées de ses sommets. — Si nous considérons pour un moment les coordonnées x et y comme les variables courantes, l'équation

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

représentera la droite qui passe par les deux sommets (x_1, y_1), (x_2, y_2) du triangle (192).

Dans cette équation les coefficients des variables x et y sont

$$-\begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = y_1 - y_2, \quad \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1;$$

par conséquent la distance $p = AD$ d'un point quelconque A du plan à la droite BC ou $\Delta = 0$ est (188)

$$p = \frac{\Delta \sin\theta}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta}};$$

or la quantité sous le radical exprime le carré de la distance des deux points B et C, de sorte que le radical est égal au côté BC du triangle ABC; on a donc

$$BC \times p \text{ ou } BC \times AD = \sin\theta.$$

Mais BC × AD mesure la double surface 2S du triangle ABC qui a la droite BC pour base et le point A pour sommet. Il vient donc $2S = \Delta \sin\theta$, comme plus haut (211).

213. Corollaire I — Multiplions la première colonne de (VI) successivement par a et b, et retranchons les produits de la seconde et de la troisième colonne; la valeur du déterminant (VI) n'est pas altérée et l'on a aussi

$$\text{(VII)} \qquad 2S = \begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} \sin\theta.$$

214. Corollaire II. — Dans le déterminant (VI) retranchons la première ligne de chacune des deux autres; nous trouvons encore

$$\text{(VIII)} \quad 2S = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & x_1-x & y_1-y \\ 0 & x_2-x & y_2-y \end{vmatrix} \sin\theta = \begin{vmatrix} x_1-x & y_1-y \\ x_2-x & y_2-y \end{vmatrix} \sin\theta,$$

comme au n° 211.

215. Deuxième méthode pour déterminer la surface d'un triangle en valeur de ses trois côtés. — Reprenons la formule (1) du n° 210

$$2S = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix},$$

et élevons au carré les deux membres de cette égalité; nous obtenons, en multipliant par 4,

$$16S^2 = \begin{vmatrix} 2(x'^2+y'^2) & 2(x'x''+y'y'') \\ 2(x'x''+y'y'') & 2(x''^2+y''^2) \end{vmatrix};$$

or il est aisé de voir qu'on a d'abord

$$x'^2+y'^2 = c^2, \quad x''^2+y''^2 = b^2,$$

puis

$$a^2 = (x'-x'')^2+(y'-y'')^2 = x'^2+y'^2+x''^2+y''^2-2(x'x''+y'y''),$$

d'où

$$2(x'x''+y'y'') = (x'^2+y'^2)+(x''^2+y''^2)-a^2 = b^2+c^2-a^2.$$

Le carré de la quadruple surface du triangle sera par suite

$$16\,S^2 = \begin{vmatrix} 2c^2 & b^2+c^2-a^2 \\ b^2+c^2-a^2 & 2b^2 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est identique avec celui du n° 204.

* **216. Troisième méthode pour calculer la surface d'un triangle en valeur des trois côtés.** — On peut aussi obtenir la valeur (I) du n° 204, en partant de l'expression générale (VI) de la surface du triangle en fonction des coordonnées des sommets.

En effet, le déterminant (VI) pouvant se mettre sous chacune des deux formes suivantes :

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad 2S = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & y \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

on a, en multipliant membre à membre et ligne par ligne,

$$4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+y^2 & xx_1+yy_1 & xx_2+yy_2 \\ 1 & xx_1+yy_1 & x_1^2+y_1^2 & x_1x_2+y_1y_2 \\ 1 & xx_2+yy_2 & x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 \end{vmatrix};$$

multiplions par -2 les trois dernières lignes, puis divisons par -2 la première colonne, le déterminant sera multiplié par 4, de sorte qu'il vient

$$16\,S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2(x_2+y_2) & -2(xx_1+yy_1) & -2(xx_2+yy_2) \\ 1 & -2(xx_1+yy_1) & -2(x_1^2+y_1^2) & -2(x_1x_2+y_1y_2) \\ 1 & -2(xx_2+yy_2) & -2(x_1x_2+y_1y_2) & -2(x_2^2+y_2^2) \end{vmatrix}.$$

Aux trois dernières colonnes ajoutons la première multipliée successivement par x^2+y^2, $x_1^2+y_1^2$, $x_2^2+y_2^2$; nous trouvons

$$S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -(x^2+y^2) & x_1^2+y_1^2-2(xx_1+yy_1) & x_2^2+y_2^2-2(xx_2+yy_2) \\ 1 & x^2+y^2-2(xx_1+yy_1) & -(x_1^2+y_1)^2 & x_2^2+y_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2) \\ 1 & x^2+y^2-2(xx_2yy_2) & x_1^2+y_1^2-2(x_1x_2+y_1y_2) & -(x_2^2+y_2)^2 \end{vmatrix};$$

enfin aux trois dernières lignes ajoutons la première multipliée successi-

vement par x^2+y^2, $x_1^2+y_1^2$, $x_2^2+y_2^2$; nous obtenons l'expression

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 & (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 \\ 1 & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 & 0 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \\ 1 & (x-x_2)^2+(y-y_2)^2 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 & 0 \end{vmatrix}$$

dont le second membre, en vertu des égalités

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = c^2,$$
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 = b^2,$$
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 = a^2,$$

n'est autre que l'expression (I).

*** 217. Expression de la surface S du triangle compris entre les trois droites**

$$(d) \qquad Ax+By+C=0,$$
$$(d') \qquad A'x+B'y+C'=0,$$
$$(d'') \qquad A''x+B''y+C''=0.$$

Si x et y, x' et y', x'' et y'' sont les coordonnées des points d'intersection des droites (d') et (d''), (d'') et (d), (d) et (d'), on devra avoir

$$(3) \quad \begin{cases} Ax+By+C=\lambda, & Ax'+By'+C=0, & Ax''+By''+C=0, \\ A'x+B'y+C'=0, & A'x'+B'y'+C'=\lambda', & A'x''+B'x''+C'=0, \\ A''x+B''y+C''=0, & A''x'+B''y'=C''=0, & A''x''+B''y''+C''=\lambda'', \end{cases}$$

où λ, λ', λ'' sont trois indéterminées.

Nous savons (211) que

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix};$$

multiplions cette égalité membre à membre par

$$\Delta = \begin{vmatrix} C & A & B \\ C' & A' & B' \\ C'' & A'' & B'' \end{vmatrix};$$

nous obtenons

$$2S\Delta = \begin{vmatrix} C+Ax+By & C'+A'x+B'y & C''+A''x+B''y \\ C+Ax'+By' & C'+A'x'+B'y' & C''+A''x'+B''y' \\ C+Ax''+By'' & C'+A'x''+B'y'' & C''+A''x''+B''y'' \end{vmatrix},$$

ou, en vertu des équations (3),

$$(4)\qquad 2S\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'' \end{vmatrix} = \lambda\lambda'\lambda''.$$

Il nous reste à calculer le produit $\lambda\lambda'\lambda''$. Or le premier des systèmes (3) donne, par l'élimination de x et y,

$$\begin{vmatrix} A & B & C-\lambda \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & \lambda \\ A' & B' & 0 \\ A'' & B'' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Delta = \lambda(A'B'' - B'A'').$$

Nous avons donc

$$\lambda = \frac{\Delta}{A'B'' - B'A''},\quad \lambda' = \frac{\Delta}{A''B - B''A},\quad \lambda'' = \frac{\Delta}{AB' - BA'};$$

et, en substituant ces valeurs dans l'égalité (4), nous obtenons pour la double surface du triangle l'expression

$$(\mathrm{IX})\qquad 2S = \frac{\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} A' & B' \\ A'' & B'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A'' & B'' \\ A & B \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}},$$

ou

$$(\mathrm{X})\quad 2S = \frac{[C(A'B'' - B'A'') + C'(A''B - B''A) + C''(AB' - BA')]^2}{(A'B'' - B'A'')(A''B - B''A)(AB' - BA')}.$$

La méthode que nous venons d'employer a été donnée par Joachimsthal dans le *Journal de Crelle* (*Sur quelques applications des déterminants à la Géométrie*, t. XL, p. 21-47).

* **218. Produit des surfaces de deux triangles en valeur des neuf distances des trois sommets du premier triangle aux trois sommets du second.** — Soient S et S' les surfaces des deux triangles ABC, A'B'C' ayant leurs sommets respectifs aux points

$$A(x_1, y_1),\quad B(x_2, y_2),\quad C(x_3, y_3),$$
$$A'(x'_1, y'_1),\quad B'(x'_2, y'_2),\quad C'(x'_3, y'_3).$$

Nous avons (211 et 67)

$$2S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad -2S' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x'_1 & y'_1 \\ 1 & 0 & x'_2 & y'_2 \\ 1 & 0 & x'_3 & y'_3 \end{vmatrix}.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, il nous vient

$$(5) \qquad -4SS' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1x'_1+y_1y'_1 & x_2x'_1+y_2y'_1 & x_3x'_1+y_3y'_1 \\ 1 & x_1x'_2+y_1y'_2 & x_2x'_2+y_2y'_2 & x_3x'_2+y_3y'_2 \\ 1 & x_1x'_3+y_1y'_3 & x_2x'_3+y_2y'_3 & x_3x'_3+y_3y'_3 \end{vmatrix}.$$

Représentons les distances des sommets du premier triangle à ceux du second par les notations

$$\begin{aligned} AA' &= d_{11}, & AB' &= d_{12}, & AC' &= d_{13}, \\ BA' &= d_{21}, & BB' &= d_{22}, & BC' &= d_{23}, \\ CA' &= d_{31}, & CB' &= d_{32}, & CC' &= d_{33}, \end{aligned}$$

où les premiers indices 1, 2, 3 se rapportent aux trois sommets respectifs A, B, C du premier triangle ABC, pendant que les deuxièmes indices 1, 2, 3 se rapportent aux sommets respectifs du second triangle A'B'C'.

Faisons les distances des mêmes sommets à l'origine O des coordonnées, savoir :

$$\begin{aligned} AO &= a, & BO &= b, & CO &= c, \\ A'O &= a', & B'O &= b', & C'O &= c'. \end{aligned}$$

Il est évident que

$$\overline{AA'}^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_1'^2 + y_1'^2) - 2(x_1x'_1 + y_1y'_1),$$

ou

$$d_{11}^2 = a^2 + a'^2 - 2(x_1x'_1 + y_1y'_1).$$

On a par suite, en général,

$$\begin{aligned} 2(x_1x'_1 + y_1y'_1) &= a^2 + a'^2 - d_{11}^2, \\ 2(x_1x'_2 + y_1y'_2) &= a^2 + b'^2 - d_{12}^2, \\ 2(x_1x'_3 + y_1y'_3) &= a^2 + c'^2 - d_{13}^2; \\ 2(x_2x'_1 + y_2y'_1) &= b^2 + a'^2 - d_{21}^2, \\ 2(x_2x'_2 + y_2y'_2) &= b^2 + b'^2 - d_{22}^2, \\ 2(x_2x'_3 + y_2y'_3) &= b^2 + c'^2 - d_{23}^2; \\ 2(x_3x'_1 + y_3y'_1) &= c^2 + a'^2 - d_{31}^2, \\ 2(x_3x'_2 + y_3y'_2) &= c^2 + b'^2 - d_{32}^2, \\ 2(x_3x'_3 + y_3y'_3) &= c^2 + c'^2 - d_{33}^2. \end{aligned}$$

Cela étant, dans notre déterminant (5), multiplions les trois dernières lignes par 2, puis divisons par 2 la première colonne résultante : le déterminant sera multiplié par $2^3 : 2 = 2^2 = 4$. Remplaçons ensuite les sommes de produits par les valeurs ci-dessus; nous obtenons l'égalité

$$-16SS' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+a'^2-d_{11}^2 & b^2+a'^2-d_{21}^2 & c^2+a'^2-d_{31}^2 \\ 1 & a^2+b'^2-d_{12}^2 & b^2+b'^2-d_{22}^2 & c^2+b'^2-d_{32}^2 \\ 1 & a^2+c'^2-d_{13}^2 & b^2+c'^2-d_{23}^2 & c^2+c'^2-d_{33}^2 \end{vmatrix}.$$

Nous pouvons transformer ce déterminant en un autre plus simple. Pour cela conservons la première colonne; multiplions-là ensuite successivement par a^2, b^2, c^2 et retranchons les produits respectivement des trois dernières colonnes; le déterminant ne change pas de valeur et l'on a

$$-16SS' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2-d_{11}^2 & a'^2-d_{21}^2 & a'^2-d_{31}^2 \\ 1 & b'^2-d_{12}^2 & b'^2-d_{22}^2 & b'^2-d_{32}^2 \\ 1 & c'^2-d_{13}^2 & c'^2-d_{23}^2 & c'^2-d_{33}^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant conservons la première ligne; multiplions-la ensuite successivement par a'^2, b'^2, c'^2 et retranchons les produits respectivement des trois dernières lignes; le déterminant conserve sa valeur, et il vient

$$-16SS' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -d_{11}^2 & -d_{21}^2 & -d_{31}^2 \\ 1 & -d_{12}^2 & -d_{22}^2 & -d_{32}^2 \\ 1 & -d_{13}^2 & -d_{23}^2 & -d_{33}^2 \end{vmatrix}.$$

Enfin, si dans ce dernier déterminant nous multiplions par -1 d'abord les trois dernières lignes, puis la première colonne résultante, le déterminant sera multiplié par la quatrième puissance de -1, conservera sa valeur et il viendra

$$\text{(XI)} \qquad 16SS' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11}^2 & d_{21}^2 & d_{31}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & d_{22}^2 & d_{32}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & d_{33}^2 \end{vmatrix}.$$

C'est l'expression demandée.

Si les deux triangles coïncident, on aura

$$\begin{aligned} d_{11} &= 0, & d_{21} &= c, & d_{31} &= b, \\ d_{12} &= c, & d_{22} &= 0, & d_{32} &= a, \\ d_{13} &= b, & d_{23} &= a, & d_{33} &= 0; \end{aligned}$$

et il viendra encore

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix},$$

comme au n° 204.

* 219. **Produit de la surface S d'un triangle ABC par la surface S' du triangle A'B'C', dont les sommets A', B', C' sont les centres des trois cercles exinscrits.** — Il est facile de trouver que

$$A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \quad B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \quad C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2},$$

sont les angles du second triangle, qui a pour côtés

$$a' = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}, \quad b' = \frac{b}{\sin\frac{B}{2}}, \quad c' = \frac{c}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Les carrés des distances des trois sommets A', B', C' du premier triangle aux sommets du second seront donc

$$d_{11}^2 = \overline{AA'}^2 = bc\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \frac{bcp}{p-a},$$

$$d_{12}^2 = \overline{AB'}^2 = c^2\frac{\sin^2\frac{B}{2}}{\sin^2\frac{C}{2}} = \frac{bc(p-c)}{p-b},$$

$$d_{13}^2 = \overline{AC'}^2 = b^2\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{bc(p-b)}{p-c};$$

$$d_{21}^2 = \frac{ca(p-c)}{p-a}, \qquad d_{31}^2 = \frac{ab(p-b)}{p-a},$$

$$d_{22}^2 = \frac{cap}{p-b}, \qquad d_{32}^2 = \frac{ab(p-a)}{p-b},$$

$$d_{23}^2 = \frac{ca(p-a)}{p-c}; \qquad d_{33}^2 = \frac{abp}{p-c}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la formule (XI), nous verrons que

$$16SS' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{bcp}{p-a} & \frac{ca(p-c)}{p-a} & \frac{ab(p-b)}{p-a} \\ 1 & \frac{bc(p-c)}{p-b} & \frac{cap}{p-b} & \frac{ab(p-a)}{p-b} \\ 1 & \frac{bc(p-b)}{p-c} & \frac{ca(p-a)}{p-c} & \frac{abp}{p-a} \end{vmatrix}.$$

Multiplions la première ligne successivement par les quantités $\frac{abc}{p-a}$, $\frac{abc}{p-b}$, $\frac{abc}{p-c}$ et retranchons les produits respectivement des trois dernières lignes; il nous vient

$$16SS' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & bc & -ca & -ab \\ 1 & -bc & ca & -ab \\ 1 & -bc & -ca & ab \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -bc & ca & ab \\ 1 & bc & -ca & ab \\ 1 & bc & ca & -ab \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant se déduit du précédent en changeant d'abord les signes des trois dernières colonnes, puis le signe de la première ligne résultante.

Dans ce déterminant multiplions les quatre colonnes respectivement par abc, a, b et c; puis divisons par abc chacune des trois dernières lignes résultantes; le déterminant aura été multiplié par la fraction $\frac{abc.a.b.c}{abc.abc.abc} = \frac{1}{abc}$; il viendra, par suite,

$$16SS' = -abc\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -abc\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

ou

$$4SS' = abc(a+b+c).$$

Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle donné ABC, on aura $abc = 4RS$, ce qui donne

$$S' = R(a+b+c).$$

§ II. — Surface des triangles inscrits dans les courbes du second degré.

227. Surface du triangle inscrit dans la parabole $y^2 = 2px$, les axes des coordonnées étant rectangulaires. — Dans la formule (VI) du n° 211 posons $\theta = 90°$ et

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad x' = \frac{y'^2}{2p}, \quad x'' = \frac{y''^2}{2p};$$

elle devient

$$S = \frac{1}{4p}\begin{vmatrix} 1 & y^2 & y \\ 1 & y'^2 & y' \\ 1 & y''^2 & y'' \end{vmatrix}.$$

$$= -\frac{1}{4p}\begin{vmatrix} 1 & y & y^2 \\ 1 & y' & y'^2 \\ 1 & y'' & y''^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4p}\begin{vmatrix} 1 & y & y^2 \\ 0 & y-y' & y^2-y'^2 \\ 0 & y-y'' & y^2-y''^2 \end{vmatrix},$$

ou bien

$$S = -\frac{1}{4p}\begin{vmatrix} y-y' & y^2-y'^2 \\ y-y'' & y^2-y''^2 \end{vmatrix} = \frac{(y-y')(y''-y)}{4p}\begin{vmatrix} 1 & y+y' \\ 1 & y+y'' \end{vmatrix};$$

le dernier déterminant étant égal à $(y+y'')-(y+y') = y''-y'$, on a enfin

$$\text{(I)} \qquad S = -\frac{(y-y')(y'-y'')(y''-y)}{4p}.$$

Nous pouvons donner une autre forme à cette expression. Désignons par α, α', α'' les trois côtés du triangle inscrit dans la parabole et par γ, γ', γ'' les cordes focales respectivement parallèles à ces côtés. Nous avons

$$\alpha^2 = (y'-y'')^2 + (x'-x'')^2$$

$$= (y'-y'')^2 + \frac{1}{4p^2}(y'^2-y''^2)^2 = (y'-y'')^2\left[1 + \frac{(y'+y'')^2}{4p^2}\right],$$

puis

$$\gamma = \left(\frac{p}{2}+x'\right) + \left(\frac{p}{2}+x''\right) = p + (x'+x'').$$

Or, les abscisses des intersections de la corde focale

$$Y = \frac{y' - y''}{x' - x''}\left(X - \frac{p}{2}\right) = \frac{2p}{y' + y''}\left(X - \frac{p}{2}\right)$$

avec la parabole $Y^2 = 2pX$ étant données par l'équation

$$\frac{4p^2}{(y' + y'')^2}\left(X - \frac{p}{2}\right)^2 = 2pX$$

ou par

$$X^2 - p\left[1 + \frac{(y' + y'')^2}{4p^2}\right]X + \frac{p^2}{4} = 0,$$

on a

$$x' + x'' = p\left[1 + \frac{(y' + y'')^2}{4p^2}\right];$$

il vient par suite

$$y = 2p\left[1 + \frac{(y' + y'')^2}{4p^2}\right] = \frac{2p\alpha^2}{(y' - y'')^2}.$$

Nous trouvons ainsi que

$$(y' - y'')^2 = \frac{2p\alpha^2}{y}, \quad (y'' - y')^2 = \frac{2p\alpha'^2}{y'}, \quad (y - y')^2 = \frac{2p\alpha''^2}{y''}.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (1) élevée au carrée, nous obtenons l'expression

$$\text{(II)} \qquad S^2 = \frac{p^2}{2}\frac{\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2}{yy'y''}.$$

Le carré du rayon du cercle circonscrit à ce triangle sera

$$R^2 = \frac{\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2}{16S^2} = \frac{yy'y''}{8p}.$$

221. Surface du triangle compris entre les trois tangentes menées en (x, y), (x', y'), (x'', y'') à la parabole. — Les points d'intersection mutuelle de ces tangentes sont [1]

$$x_0 = \sqrt{x'x''}, \quad x_1 = \sqrt{x''x}, \quad x_2 = \sqrt{xx'},$$

$$y_0 = \frac{y' + y''}{2}, \quad y_1 = \frac{y'' + y}{2}, \quad y_2 = \frac{y + y'}{2};$$

[1] Dostor, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1870, t. IX, p. 527, et 1871, t. X, p. 48.

et, comme les abscisses peuvent se mettre sous la forme

$$x_0 = \frac{y'y''}{2p}, \quad x_1 = \frac{y''y}{2p}, \quad x_2 = \frac{yy'}{2p},$$

la surface demandée sera

$$S = \frac{1}{8p}\begin{vmatrix} 1 & y'+y'' & y'y'' \\ 1 & y''+y & y''y \\ 1 & y+y' & yy' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8p}\begin{vmatrix} 1 & y' & y'y'' \\ 1 & y'' & y''y \\ 1 & y & yy'' \end{vmatrix} + \frac{1}{8p}\begin{vmatrix} 1 & y'' & y'y'' \\ 1 & y & y''y \\ 1 & y' & yy' \end{vmatrix}.$$

Calculant séparément ces deux déterminants, et ajoutant les valeurs obtenues, on trouve

$$\text{(III)} \qquad S = -\frac{(y-y')(y'-y'')(y''-y)}{8p}.$$

Ce triangle est la moitié de celui (I) *qui a ses sommets aux points de contact des tangentes.*

Appelons r, r', r'' les rayons vecteurs menés aux trois points de contact des tangentes, et c, c', c'' les trois côtés du triangle circonscrit. Nous avons

$$c^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = \left(\frac{y'+y''}{2} - \frac{y+y'}{2}\right)^2 + \left(\frac{y''y}{2p} - \frac{yy'}{2p}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(y''-y')^2 + \frac{y^2}{4p^2}(y''-y')^2$$

$$= \frac{p^2+y^2}{4p^2}(y''-y')^2 = \frac{p+2x}{4p}(y''-y')^2.$$

Or nous avons trouvé au numéro précédent que

$$(y'-y'')^2 = \frac{2p\alpha^2}{\gamma},$$

et, comme $p + 2x = 2r$, il vient

$$c^2 = \frac{2r}{4p} \cdot \frac{2p\alpha^2}{\gamma} = \frac{\alpha^2 r}{\gamma}.$$

Nous trouvons ainsi que

$$\frac{\alpha^2}{\gamma}=\frac{c^2}{r},\quad \frac{\alpha'^2}{\gamma'}=\frac{c'^2}{r'},\quad \frac{\alpha''^2}{\gamma''}=\frac{c''^2}{r''}.$$

Substituons ces valeurs dans le quart de l'expression (II) et nous obtenons

$$\text{(IV)}\qquad S=\frac{p}{8}\,\frac{c^2c'^2c''^2}{rr'r''}.$$

222. Surface du triangle déterminé par les trois centres de courbure de trois points (x, y), (x', y'), (x'', y'') de la parabole $y^2=2px$. — Les coordonnées de ces centres de courbure étant

$$\frac{p^2+3y^2}{2p},\quad \frac{p^2+3y'^2}{2p},\quad \frac{p^2+3y''^2}{2p},$$
$$-\frac{4y^3}{p^2},\quad -\frac{4y'^3}{p^2},\quad -\frac{4y''^3}{p^2},$$

la surface cherchée du triangle sera

$$S=-\frac{2}{p^3}\begin{vmatrix}1 & p^2+3y^2 & y^3\\ 1 & p^2+3y'^2 & y'^3\\ 1 & p^2+3y''^2 & y''^3\end{vmatrix}=-\frac{6}{p^3}\begin{vmatrix}1 & y^2 & y^3\\ 1 & y'^2 & y'^3\\ 1 & y''^2 & y''^3\end{vmatrix},$$

ou

$$S=-\frac{6}{p^3}\begin{vmatrix}1 & y^2 & y^3\\ 0 & y^2-y'^2 & y^3-y'^3\\ 0 & y^2-y''^2 & y^3-y''^3\end{vmatrix}=-\frac{6}{p^3}\begin{vmatrix}y^2-y'^2 & y^3-y'^3\\ y^2-y''^2 & y^3-y''^3\end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$S=-\frac{6}{p^3}(y-y')(y-y'')\begin{vmatrix}y+y' & y^2+yy'+y'^2\\ y+y'' & y^2+yy''+y''^2\end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant étant égal à

$$(y+y')(y^2+yy''+y''^2)-(y+y'')(y^2+yy'+y'^2)$$
$$=(y'-y'')(y'y''+y''y+yy'),$$

on trouve enfin

$$\text{(V)}\quad S=\frac{6}{p^3}(y-y')(y'-y'')(y''-y)(yy'+y'y''+y''y).$$

223. Surface du triangle inscrit dans l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Désignons par x, y; x', y'; x'', y'' les coordonnées des trois sommets du triangle S; nous avons

$$2S = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix},$$

d'où nous tirons, en divisant les trois colonnes d'abord par a, b, 1; puis par a, b, -1,

$$\frac{2S}{ab} = \begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & 1 \\ \frac{x'}{a} & \frac{y}{b} & 1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & 1 \end{vmatrix}, \quad \frac{2S}{ab} = -\begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{b} & -1 \\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & -1 \\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & -1 \end{vmatrix}.$$

Faisons le produit de ces deux déterminants, nous obtenons le déterminant symétrique

$$-\frac{4S^2}{a^2b^2}\begin{vmatrix} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 & \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 & \frac{xx''}{a^2} + \frac{yy''}{b^2} - 1 \\ \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 & \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 & \frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} - 1 \\ \frac{xx''}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 & \frac{xx''}{a^2} + \frac{yy''}{b^2} - 1 & \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - 1 \end{vmatrix}.$$

Cela trouvé, remarquons que, les trois points donnés appartenant à l'ellipse, nous avons

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Désignons ensuite par α, α', α'' les trois côtés du triangle, qui sont respectivement opposés aux sommets (x, y), (x', y'), (x'', y''), et par δ, δ', δ'' les demi-diamètres respectivement

parallèles à ses côtés. Le diamètre δ, étant dirigé suivant la droite

$$Y = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} X,$$

rencontre la courbe aux points dont les coordonnées sont

$$X^2 = \frac{(x' - x'')^2}{\frac{(x' - x'')^2}{a^2} + \frac{(y' - y'')^2}{b^2}} = \frac{(x' - x'')^2}{2\left(1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2}\right)},$$

$$Y^2 = \frac{(y' - y'')^2}{\frac{(x' - x'')^2}{a^2} + \frac{(y' - y'')^2}{b^2}} = \frac{(y' - y'')^2}{2\left(1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2}\right)};$$

et, comme

$$X^2 + Y^2 = \delta^2, \quad (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = \alpha^2,$$

il vient

$$1 - \frac{x'x''}{a^2} - \frac{y'y''}{b^2} = \frac{\alpha^2}{2\delta^2};$$

on a pareillement

$$1 - \frac{x''x}{a^2} - \frac{y''y}{b^2} = \frac{\alpha'^2}{2\delta'^2}, \quad 1 - \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = \frac{\alpha''^2}{2\delta''^2}.$$

Substituons toutes ces valeurs dans notre dernier déterminant, il devient, par la multiplication de chaque colonne par -2,

$$-\frac{4S^2}{a^2b^2} = -\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha''^2}{\delta''^2} & \frac{\alpha'^2}{\delta'^2} \\ \frac{\alpha''^2}{\delta''^2} & 0 & \frac{\alpha^2}{\delta^2} \\ \frac{\alpha'^2}{\delta'^2} & \frac{\alpha^2}{\delta^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2}{4\delta^2\delta'^2\delta''^2};$$

nous en tirons

$$\text{(IV)} \qquad S = \frac{ab}{4} \cdot \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\delta\delta'\delta''}$$

pour la surface du triangle inscrit dans l'ellipse.

§ III. — Surface du quadrilatère en déterminant.

224. Expression en déterminant de la surface du quadrilatère en valeur des coordonnées de ses quatre sommets. — Considérons le quadrilatère ABCD, dont nous désignerons la surface par Q; et soient x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées des quatre sommets consécutifs A, B, C, D qu'on rencontre en parcourant le périmètre dans le sens des x positifs. Menons la diagonale BD, qui décompose le quadrilatère dans les deux triangles BCD et ABD.

On sait que

$$2\mathrm{BCD} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} - (x_1 y_3 - y_1 x_3),$$

$$2\mathrm{ABD} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (x_1 y_3 - y_1 x_3):$$

il vient par suite, en ajoutant,

$$2\mathrm{Q} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Or il est aisé de voir qu'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix};$$

mais ces deux déterminants ne diffèrent que par leurs premières

colonnes; on obtiendra donc leur somme en ajoutant les premières colonnes, élément à élément, et en conservant les autres colonnes telles quelles. On trouve ainsi [1]

$$\text{(I)} \qquad 2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

225. Autre forme de l'expression de cette surface. — Si, dans le déterminant précédent, nous retranchons les deux premières lignes des deux dernières, nous obtenons aussi

$$2Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x & y_2 - y \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

ou bien [2]

$$\text{(II)} \qquad 2Q = \begin{vmatrix} x_2 - x & y_2 - y \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

226. Surface d'un quadrilatère quelconque ABCD, en valeur des quatre côtés consécutifs $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ et des deux diagonales $AC = m$, $BD = n$. — Élevons au carré les deux membres de l'égalité

$$2Q = -\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix};$$

nous obtenons (105), en multipliant chaque ligne résultante par 2,

$$= \begin{vmatrix} 2(x - x_2)^2 + 2(y - y_2)^2 & 2(x - x_2)(x_3 - x_1) + 2(y - y_2)(y_3 - y_1) \\ 2(x - x_2)(x_3 - x_1) + 2(y - y_2)(y_3 - y_1) & 2(x_3 - x_1)^2 + 2(y_3 - y_1)^2 \end{vmatrix}.$$

---

(1) Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1874, t. LVI, p. 240. — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1874, t. XIII, p. 559.

(2) Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1874, t. LVI, p. 240.

Or il est évident que

$$2(x-x_2)^2+2(y-y_2)^2=2m^2;\quad 2(x_3-x_1)^2+2(y_3-y_1)^2=2n^2;$$

de plus on a

$$\begin{aligned}&2(x-x_2)(x_3-x_1)+2(y-y_2)(y_3-y_1)\\&=-2(xx_1+yy_1)+2(x_1x_2+y_1y_2)\\&\quad-2(x_2x_3+y_2y_3)+2(x_3x_1+y_3y_1);\end{aligned}$$

mais les égalités

$$\begin{aligned}&(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=a^2,\quad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=b^2,\\&(x_1-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=c^2,\quad (x_3-x)^2+(y_3-y)^2=d^2\end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned}-2(xx_1+yy_1)&=+a^2-(x^2+y^2)-(x_1^2+y_1^2),\\+2(x_1x_2+y_1y_2)&=-b^2+(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2),\\-2(x_2x_3+y_2y_3)&=+c^2-(x_2^2+y_2^2)-(x_3^2+y_3^2),\\+2(x_3x+y_3x)&=-d^2+(x_3^2+y_3^2)+(x^2+y^2),\end{aligned}$$

de sorte qu'on trouve, en ajoutant,

$$2(x-x_2)(x_3-x_1)+2(y-y_2)(y_3-y_1)=a^2-b^2+c^2-d^2.$$

La surface du quadrilatère sera donc

$$16Q^2=\begin{vmatrix}2m^2 & a^2-b^2+c^2-d^2\\ a^2-b^2+c^2-d^2 & 2n^2\end{vmatrix}$$

ou

$$\text{(III)}\qquad 16Q^2=\begin{vmatrix}2mn & a^2-b^2+c^2-d^2\\ a^2-b^2+c^2-d^2 & 2mn\end{vmatrix}.$$

Cette expression revient à celle

$$\text{(IV)}\qquad 16Q^2=4m^2n^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2,$$

que nous avons déjà donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, 1848, t. VII, p. 69.

227. Expression en déterminant de la surface du quadrilatère inscriptible en valeur des quatre côtés. — Si le qua-

drilatère ABCD est inscriptible, on aura

$$mn = ac + bd,$$

$$\begin{aligned}16Q^2 &= 4(ac+bd)^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2\\ &= (2ac+2bd+a^2-b^2+c^2-d^2)(2ac+2bd-a^2+b^2-c^2+d^2)\\ &= [(a+c)^2-(b-d)^2][(b+d)^2-(a-c)^2]\\ &= (b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)(a+b+c-d).\end{aligned}$$

Or le produit des deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

étant

$$\begin{vmatrix} -a+b+c+d & a-b+c-d & a+b-c+d & a+b+c-d \\ b-a+d+c & -b+a+d+c & -b-a-d+c & -b-a+d-c \\ c+d-a+b & -c-d-a+b & -c+d+a+b & -c+d-a-b \\ d+c+b-a & -d-c+b-a & -d+c-b-a & -d+c+b+a \end{vmatrix},$$

si l'on y divise les quatre colonnes par les quantités respectives

$$b+c+d-a, \quad c+d+a-b, \quad d+a+b-c, \quad a+b+c-d,$$

on verra que

$$\Delta\delta = 16Q^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

mais on a évidemment

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\delta;$$

donc il vient $16Q^2 = -\Delta$, ou bien

$$(\mathrm{V}) \qquad 16Q^2 = -\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}.$$

228. Surface du quadrilatère inscrit dans la parabole $y^2 = 2px$, en valeur des coordonnées des quatre sommets. — Dans la formule (II) posons

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad x_1 = \frac{y_1^2}{2p}, \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p}, \quad x_3 = \frac{y_3^2}{2p};$$

elle devient

$$2Q = \frac{1}{2p}\begin{vmatrix} y^2 - y_2^2 & y - y_2 \\ y_1^2 - y_3^2 & y_1 - y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2p}(y - y_2)(y_1 - y_3)\begin{vmatrix} y + y_2 & 1 \\ y_1 + y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$(\mathrm{VI}) \qquad 2Q = \frac{(y - y_2)(y_1 - y_3)(y - y_1 + y_2 - y_3)}{2p},$$

pour la surface du quadrilatère inscrit dans la parabole, en valeur des coordonnées des quatre sommets consécutifs.

§ IV. — Surface d'un polygone quelconque.

229. Surface d'un polygone en valeur des coordonnées de ses sommets. — Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; ...; x_n, y_n les coordonnées des n sommets consécutifs A, B, C, ..., K du polygone ABC...K, que l'on rencontre en parcourant le périmètre dans le sens positif. Transportons l'origine en un point O situé dans l'intérieur du polygone et ayant a, b pour coordonnées. Désignons par x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3; ...; x'_n, y'_n les nouvelles coordonnées des sommets. Puisque la surface du polygone est égale à la somme des triangles OAB, OBC, ...

OKA, nous avons

$$2S = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x'_n & y'_n \\ x'_1 & y'_1 \end{vmatrix}.$$

Remplaçons ces coordonnées par leurs valeurs en fonction des anciennes

$$x'_1 = x_1 - a, \quad x'_2 = x_2 - a, \quad x'_3 = x_3 - a, \quad \ldots, \quad x'_n = x_n - a,$$
$$y'_1 = y_1 - b, \quad y'_2 = y_2 - b, \quad y'_3 = y_3 - b, \quad \ldots, \quad y'_n = y_n - b;$$

nous obtenons

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b \\ x_2 - a & y_2 - b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 - a & y_2 - a \\ x_3 - b & y_3 - b \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_n - a & y_n - b \\ x_1 - a & y_1 - b \end{vmatrix};$$

or nous avons le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 - a & y_1 - b \\ x_2 - a & y_2 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & y_1 \\ a & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & b \\ x_2 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + a(y_1 - y_2) - b(x_1 - x_2),$$

et de même

$$\begin{vmatrix} x_2 - a & y_2 - b \\ x_3 - a & y_3 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + a(y_2 - y_3) - b(x_2 - x_3),$$

. . . . . ,

$$\begin{vmatrix} x_n - a & y_n - b \\ x_1 - a & y_1 - b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + a(y_n - y_1) - b(x_n - x_1);$$

par conséquent, dans la somme de ces déterminants, les multiplicateurs de a et de b se réduisent à zéro; donc il vient

$$(\mathrm{I}) \qquad 2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}.$$

Si les axes des coordonnées étaient obliques, il faudrait multiplier le second membre par le sinus de l'angle des axes, pour avoir la double surface du polygone.

CHAPITRE III.

LA DROITE ET LE PLAN.

§ I. Direction des droites dans l'espace. — § II. Intersection des droites et des plans. — § III. Combinaison des équations générales qui représentent des plans donnés. — § IV. Plans passant par des points ou des droites données. — § V. Droites et plans parallèles. — § VI. Droites et plans perpendiculaires. — § VII. Distance du point au plan et plus courte distance de deux droites. — § VIII. Application de l'identité de Lagrange au calcul des distances dans la Géométrie de l'espace.

§ I. — Direction des droites dans l'espace.

230. Relation entre les inclinaisons mutuelles de quatre droites OA, OB, OC, OD (*fig.* 4) issues d'un même point O de l'espace. — Afin de mieux distinguer ces angles entre eux, nous représenterons l'angle que forment deux quelconques des trois droites OA, OB, OC par celle des trois lettres a, b, c, dont la majuscule correspondante manque dans la désignation de ces deux droites. Ainsi nous poserons

$$\text{l'angle } BOC = a, \quad COA = b, \quad AOB = c;$$

et nous indiquerons l'angle que forme la droite OD avec l'une quelconque de ces droites OA, OB, OC par celle des trois lettres accentuées a', b', c', dont la majuscule correspondante entre dans la désignation de cette droite, en posant

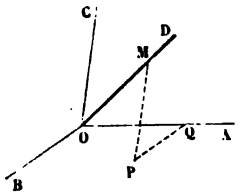
$$\text{l'angle } DOA = a', \quad DOB = b', \quad DOC = c';$$

de cette manière, les angles a et a' sont opposés, ainsi que les angles b et b', c et c'.

Choisissons le point O pour origine des coordonnées et prenons les droites OA, OB, OC pour axes des x, y, z.

Sur la droite OD, à partir de l'origine O, mesurons une longueur OM égale à l'unité et désignons par x, y, z les coordonnées du point M. Si nous menons la droite MP (*fig.* 4) parallèle

Fig. 4.



à l'axe OC des z jusqu'à la rencontre en P du plan AOB des xy, et par le point P, dans le plan OAB, la droite PQ parallèle à l'axe OB des y, jusqu'à la rencontre en Q de l'axe OA des x, nous aurons

$$OQ = x, \quad QP = y, \quad PM = z.$$

Cela fait, projetons la droite OM et la ligne brisée OQPM successivement sur les quatre droites OD, OA, OB, OC; nous obtenons les quatre équations

$$\begin{aligned}
-1 + x\cos a' + y\cos b' + z\cos c' &= 0,\\
-\cos a' + x \quad + y\cos c + z\cos b &= 0,\\
-\cos b' + x\cos c + y \quad + z\cos a &= 0,\\
-\cos c' + x\cos b + y\cos a + z \quad &= 0.
\end{aligned}$$

Éliminons les trois variables x, y, z entre ces quatre équations, nous trouvons la relation

$$\left|\begin{matrix} 1 & \cos a' & \cos b' & \cos c' \\ \cos a' & 1 & \cos c & \cos b \\ \cos b' & \cos c & 1 & \cos a \\ \cos c' & \cos b & \cos a & 1 \end{matrix}\right| = 0,$$

qui existe entre les six angles a, b, c et a', b', c' que forment entre elles les quatre droites données. Dans cette relation nous avons changé les signes des éléments de la première colonne.

Si nous développons ce déterminant, nous verrons que notre relation (I) revient à l'égalité

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{array}{l} \sin^2 a \cos^2 a' + 2\cos b' \cos c' (\cos b \cos c - \cos a) \\ + \sin^2 b \cos^2 b' + 2\cos c' \cos a' (\cos c \cos a - \cos b) \\ + \sin^2 c \cos^2 c' + 2\cos a' \cos b' (\cos a \cos b - \cos c) = D^2, \end{array}\right.$$

où

$$(1)\quad D^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c.$$

231. Relation entre les trois angles que fait une droite avec les trois axes de coordonnées. — Désignons, suivant l'usage, par λ, μ, ν les inclinaisons mutuelles des axes de coordonnées OX, OY, OZ, de telle sorte que

$$\text{l'angle } YOZ = \lambda, \quad ZOX = \mu, \quad XOY = \nu,$$

et posons

$$\text{l'angle } DOX = \alpha, \quad DOY = \beta, \quad DOZ = \gamma.$$

Si nous appliquons ces notations à la formule (I), nous obtenons la relation

$$(\mathrm{III})\quad \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et, en effectuant,

$$(\mathrm{IV})\quad \left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha \sin^2\lambda + 2\cos\beta \cos\gamma (\cos\mu \cos\nu - \cos\lambda) \\ + \cos^2\beta \sin^2\mu + 2\cos\gamma \cos\alpha (\cos\nu \cos\lambda - \cos\mu) \\ + \cos^2\gamma \sin^2\nu + 2\cos\alpha \cos\beta (\cos\lambda \cos\mu - \cos\nu) = \Delta^2, \end{array}\right.$$

où

$$(\mathrm{V})\quad \Delta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda \cos\mu \cos\nu.$$

Telle est la relation (III) qui existe entre les trois angles α, β, γ, que fait une droite OD avec les trois axes de coordonnées OX, OY, OZ, et les inclinaisons mutuelles λ, μ, ν de ces axes.

232. Sinus d'un trièdre. — L'expression précédente (V) joue un grand rôle dans la Géométrie analytique à trois dimensions; elle se présente dans presque toutes les formules, lorsque les axes de coordonnées sont obliques. Elle est la valeur effectuée du déterminant

$$(\mathrm{VI}) \qquad \Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

et peut se transformer en produit.

En effet, il est aisé de voir qu'on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2 &= \sin^2\mu \sin^2\nu - (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)^2 \\ &= (\sin\mu\sin\nu + \cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ &\quad \times (\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu + \sin\mu\sin\nu) \\ &= [\cos(\mu-\nu) - \cos\lambda][\cos\lambda - \cos(\mu+\nu)]; \end{aligned} \right.$$

et comme

$$\cos(\mu-\nu) - \cos\lambda = 2\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2},$$

$$\cos\lambda - \cos(\mu+\nu) = 2\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2},$$

on trouve pour Δ^2 la forme remarquable

$$(3) \quad \Delta^2 = 4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda+\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.$$

Les trois angles λ, μ, ν sont les trois faces du trièdre formé par les axes des coordonnées; par suite chacun d'eux est moindre que la somme des deux autres, et leur somme est moindre que quatre angles droits : il s'ensuit que les trois demi-différences $\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}$, $\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}$, $\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}$ seront positives et moindres chacune que deux droits, pendant que la demi-somme $\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$ sera aussi inférieure à deux droits; donc les quatre sinus du produit précédent sont supérieurs à zéro.

On conclut, d'après (2), que le carré $(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)^2$

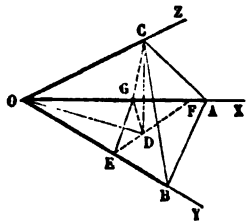
est toujours moindre que $\sin^2\lambda \sin^2\nu$; et, comme ce dernier carré n'est jamais supérieur à 1, la quantité Δ^2 sera elle-même toujours comprise entre zéro et 1; elle ne sera égale à l'unité, d'après (2), que si le trièdre est trirectangle.

Donc la racine carrée de Δ^2 ou Δ *ne peut varier qu'entre* -1 *et* $+1$, *en passant par zéro.*

Pour cette raison, von Staudt (*Journal de Crelle*, t. XXIV, p. 252) a donné à la quantité Δ le nom de *sinus du trièdre*, dont les trois faces sont λ, μ, ν.

233. Signification géométrique du sinus d'un trièdre. — Sur les trois arêtes OX, OY et OZ (*fig.* 5) du trièdre formé

Fig. 5.



par les axes de coordonnées, à partir de l'origine O, prenons les longueurs OA, OB et OC égales à l'unité, et menons les droites BC, CA et AB; nous formons ainsi le tétraèdre OABC, dont le volume V s'obtient en multipliant la face OAB par le tiers de la perpendiculaire CD abaissée sur son plan du sommet opposé C.

Appelons λ', μ', ν' les inclinaisons des trois arêtes OA, OB OC sur les plans OBC, OCA et OAB des faces opposées; nous aurons

$$CD = OC \sin COD = \sin COD = \sin\nu';$$

et, comme le triangle ABO est égal à

$$\frac{1}{2} AO.BO.\sin AOB = \frac{1}{2} \sin AOB = \frac{1}{2} \sin\nu,$$

il viendra

$$V = \frac{1}{6} \sin\nu \sin\nu'.$$

Cela établi, par le pied D de la hauteur CD, dans le plan OAB, menons EF perpendiculaire sur OB jusqu'à la rencontre de OA en F; tirons DG perpendiculaire sur OA et joignons OD et EG; nous avons évidemment

$$EF = OF \sin EOF = OF \sin \nu,$$
$$OD = OC \sin COD = OC \cos \nu' = \cos \nu',$$

d'où

$$\sin \nu \cos \nu' = \frac{EF.OD}{OF}.$$

Or, le quadrilatère OEDG étant inscriptible, les deux angles DEG et DOG sont égaux; par suite, les deux triangles EFG et DFO sont semblables et donnent

$$\frac{EF}{OF} = \frac{EG}{OD}, \quad \text{d'où} \quad \frac{EF.OD}{OF} = EG,$$

ou

$$\sin \nu \cos \nu' = EG.$$

Mais, OE et OG étant les projections de $OC = 1$ sur les droites OB et OA, on a

$$OE = \cos \lambda, \quad O = \cos \mu;$$

d'ailleurs l'angle EOG est égal à ν; il vient donc, par le triangle OEG,

$$\sin^2 \nu \cos^2 \nu' = \overline{EG}^2 = \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu - 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu.$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \sin^2 \nu \sin^2 \nu' &= \sin^2 \nu (1 - \cos^2 \nu') = \sin^2 \nu - \sin^2 \nu \cos^2 \nu' \\ &= \sin^2 \nu - (\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu - 2 \cos^2 \lambda \cos \mu \cos \nu), \end{aligned}$$

ou

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \sin^2 \nu \sin^2 \nu' &= 1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu \\ &\quad - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu = \Delta^2. \end{aligned} \right.$$

Substituant cette valeur dans celle de V, nous obtiendrons la valeur

$$(5) \qquad V = \frac{1}{6} \Delta \quad \text{ou} \quad \Delta = 6V.$$

Donc *le sinus d'un trièdre est égal au sextuple volume du tétraèdre, dont trois arêtes contiguës sont égales à l'unité et comprennent entre elles ce trièdre.*

Nous pouvons donner plusieurs autres expressions du sinus d'un trièdre.

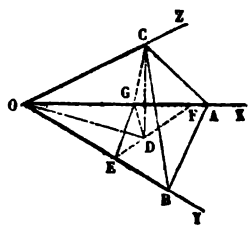
234. Expression du sinus d'un trièdre en valeur d'une face et de l'inclinaison du plan de cette face sur l'arête opposée. — L'égalité (4) nous fait voir immédiatement qu'on a aussi

$$\text{(VII)} \qquad \Delta = \sin\lambda \sin\lambda' = \sin\mu \sin\mu' = \sin\nu \sin\nu'.$$

Il s'ensuit que *le sinus d'un trièdre est égal au produit du sinus d'une face par le sinus de l'inclinaison du plan de cette face sur l'arête opposée.*

235. Expression du sinus d'un trièdre en valeur de deux faces et du dièdre compris. — Représentons par X, Y et Z les angles dièdres que comprennent entre eux les plans de coordonnées et qui sont adja-

Fig. 6.



cents aux axes OX, OY et OZ (*fig.* 6). Le triangle rectangle CDG nous donne

$$CD = CG \sin CGD = OC \sin COG \sin CGD$$

ou

$$CD = \sin\mu \sin X;$$

et comme, par le triangle OCD, nous avons

$$CD = OC \sin COD = \sin\nu',$$

il vient

$$\sin\nu' = \sin\mu \sin X$$

et par suite

$$\sin\nu \sin\nu' = \sin\mu \sin\nu \sin X.$$

On a donc encore

$$\text{(VIII)} \qquad \Delta = \sin\mu \sin\nu \sin X = \sin\nu \sin\lambda \sin Y = \sin\lambda \sin\mu \sin Z.$$

Ainsi *le sinus d'un trièdre est aussi égal au produit des sinus de deux faces par le sinus du dièdre compris.*

236. **Sinus du trièdre supplémentaire.** — Le trièdre supplémentaire du trièdre OXYZ est terminé par les trois faces

$$\pi - X, \quad \pi - Y, \quad \pi - Z$$

qui comprennent entre elles les trois dièdres

$$\pi - \lambda, \quad \pi - \mu, \quad \pi - \nu.$$

Si nous substituons ces valeurs dans les formules (V), (VI) et (3) du n° 231, et que nous représentions par Δ' le sinus de ce trièdre supplémentaire, nous aurons les expressions suivantes :

$$\text{(IX)} \qquad \Delta'^2 = 1 - \cos^2 X - \cos^2 Y - \cos^2 Z - 2\cos X \cos Y \cos Z,$$

$$\text{(X)} \qquad \Delta'^2 = - \begin{vmatrix} -1 & \cos Z & \cos Y \\ \cos Z & -1 & \cos X \\ \cos Y & \cos X & -1 \end{vmatrix},$$

$$\text{(XI)} \qquad \Delta'^2 = 4 \sin S \sin(X - S) \sin(Y - S) \sin(Z - S),$$

ou

$$2S = X + Y + Z - \pi.$$

237. Si nous faisons les mêmes substitutions dans les formules (VIII), nous aurons encore

$$\text{(XII)} \qquad \Delta' = \sin Y \sin Z \sin \lambda = \sin Z \sin X \sin \mu = \sin X \sin Y \sin \nu.$$

238. **Rapport du sinus d'un trièdre au sinus du trièdre supplémentaire.** — Nous avons trouvé aux n°s 235 et 237 que

$$\Delta = \sin \mu \sin \nu \sin X,$$
$$\Delta' = \sin Y \sin Z \sin \lambda,$$

d'où nous tirons, en divisant,

$$(6) \qquad \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin \mu}{\sin Y} \frac{\sin \nu}{\sin Z} \frac{\sin X}{\sin \lambda}.$$

Il est aisé de voir (*fig.* 7) que

$$CD = CG \sin X = OC \sin \mu \sin X = \sin \mu \sin X;$$

on verrait de même que

$$CD = \sin \lambda \sin Y;$$

il vient donc

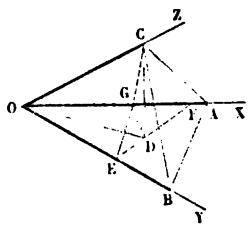
$$\sin \lambda \sin Y = \sin \mu \sin X,$$

d'où l'on tire

$$\text{(XIII)}' \qquad \frac{\sin\lambda}{\sin X} = \frac{\sin\mu}{\sin Y} = \frac{\sin\nu}{\sin Z}.$$

Ces égalités démontrent que, *dans tout trièdre, les sinus des faces sont entre eux comme les sinus des dièdres opposés.*

Fig. 7.



En vertu des égalités (XIII), la relation (6) devient

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin\lambda}{\sin X}\,\frac{\sin\lambda}{\sin X}\,\frac{\sin X}{\sin\lambda}$$

ou

$$\text{(XIV)} \qquad \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\sin\lambda}{\sin X} = \frac{\sin\mu}{\sin Y} = \frac{\sin\nu}{\sin Z}.$$

Donc *le sinus d'un trièdre est au sinus du trièdre supplémentaire comme le sinus d'une face est au sinus du dièdre opposé.*

239. Expression du sinus du trièdre en valeur des trois angles dièdres. — Les deux égalités fournies par (XIV)

$$\Delta = \frac{\sin\mu}{\sin Y}\Delta', \quad \Delta = \frac{\sin\nu}{\sin Z}\Delta'$$

nous donnent

$$\Delta^2 = \frac{\sin\mu\sin\nu}{\sin Y\sin Z}\Delta'^2;$$

mais, en vertu de (VIII), nous avons

$$\sin\mu\,\sin\nu = \frac{\Delta}{\sin X};$$

il vient donc, en substituant et en ayant égard à l'expression (XI),

$$\text{(XV)} \qquad \Delta = \frac{4\sin S\sin(X-S)\sin(Y-S)\sin(Z-S)}{\sin X\sin Y\sin Z}.$$

240. Expression du sinus du trièdre supplémentaire en valeur les trois faces du trièdre donné. — Les égalités tirées de (XIV)

$$\Delta' = \frac{\sin Y}{\sin \mu}\Delta, \quad \Delta' = \frac{\sin Z}{\sin \nu}\Delta$$

lonnent aussi

$$\Delta'^2 = \frac{\sin Y \sin Z}{\sin \mu \sin \nu}\Delta^2;$$

it, comme en vertu de (XII) on a

$$\sin Y \sin Z = \frac{\Delta'}{\sin \lambda},$$

l vient

$$\Delta' = \frac{\Delta^2}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu}, \tag{7}$$

ou, en ayant égard à l'égalité (3),

$$\Delta' = \frac{4 \sin p \sin(p-\lambda)\sin(p-\mu)\sin(p-\nu)}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu}, \tag{XVI}$$

où l'on a posé $2p = \lambda + \mu + \nu$.

241. Rapport du sinus d'une face au sinus du dièdre opposé. — Les égalités (XVI) et (XV) nous donnent

$$\frac{\Delta' \sin \lambda \sin \mu \sin \nu}{\Delta \sin X \sin Y \sin Z} = \frac{\sin p \sin(p-\lambda)\sin(p-\mu)\sin(p-\nu)}{\sin S \sin(X-S)\sin(Y-S)\sin(Z-S)};$$

mais, en vertu de la formule (XIV), nous avons

$$\frac{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu}{\sin X \sin Y \sin Z} = \frac{\Delta^3}{\Delta'^3};$$

donc il vient, en substituant,

$$\frac{\Delta^2}{\Delta'^2} = \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 X} = \frac{\sin p \sin(p-\lambda)\sin(p-\mu)\sin(p-\nu)}{\sin S \sin(X-S)\sin(Y-S)\sin(Z-S)}. \tag{XVII}$$

242. Par les formules (VIII) et (XII), nous avons

$$\frac{\Delta^2}{\Delta'} = \frac{\sin^2 \mu \sin^2 \nu \sin^2 X}{\sin Y \sin Z \sin \lambda}, \quad \frac{\Delta'^2}{\Delta} = \frac{\sin^2 Y \sin^2 Z \sin^2 \lambda}{\sin \mu \sin \nu \sin X};$$

mais les égalités (XIII) nous donnent

$$\frac{\sin X}{\sin Y \sin Z} = \frac{\sin \lambda}{\sin \mu \sin \nu};$$

substituant dans les rapports précédents, on trouve que

$$\text{(XVIII)} \qquad \frac{\Delta^2}{\Delta'} = \sin\lambda \sin\mu \sin\nu = \frac{\Delta'^2}{\Delta} = \sin X \sin Y \sin Z.$$

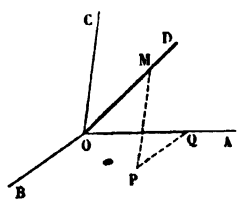
Donc : 1° *le produit des sinus des trois faces d'un trièdre est égal au carré du sinus du trièdre divisé par le sinus du trièdre supplémentaire*; 2° *le produit des sinus des trois dièdres d'un trièdre est égal au carré du sinus du trièdre supplémentaire divisé par le sinus du trièdre donné.*

Voir, pour plus de détails, le Mémoire que nous avons publié dans les *Archives de Mathématiques et de Physique*, t. LVII, p. 113, sous le titre : *Le trièdre et le tétraèdre, avec application des déterminants.*

243. Inclinaison sur l'un des axes de coordonnées de la droite perpendiculaire au plan des deux autres axes. — Supposons que la droite OD du n° 231 soit perpendiculaire au plan des yz, et proposons-nous de calculer son inclinaison α sur l'axe de x.

Il est évident que OD (*fig.* 8) est perpendiculaire à la fois

Fig. 8.



à l'axe des y et à celui des z; par suite on a $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma =$
La relation (III) devient dans ce cas

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ 0 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ 0 & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchant de la seconde ligne le produit de la premi

par $\cos\alpha$, on obtient l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\cos^2\alpha & \cos\nu & \cos\mu \\ 0 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ 0 & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\cos^2\alpha & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui revient à

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \cos\nu & \cos\mu \\ 0 & 1 & \cos\lambda \\ 0 & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou à

$$0 = \Delta^2 - \cos^2\alpha \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda \\ \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = \Delta^2 - \cos^2\alpha\,(1-\cos^2\lambda)$$
$$= \Delta^2 - \cos^2\alpha \sin^2\lambda;$$

celle-ci donne

(XIX) $$\cos\alpha = \frac{\Delta}{\sin\lambda}$$, $\Delta^2 = (V)$ p 202

pour le cosinus de l'angle cherché.

Cette valeur aurait pu se tirer immédiatement de la valeur de Δ, en y faisant $\lambda' = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

244. Angle de deux droites OD, OD′ en valeur des inclinaisons de ces deux droites sur les axes de coordonnées. — Soient toujours α, β, γ les angles que fait la première droite OD

Fig. 9.

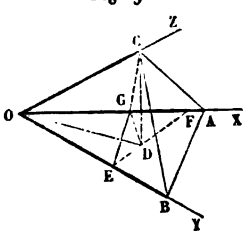


fig. 9) avec les axes de coordonnées; α', β', γ' ceux que fait

la seconde droite OD′ avec les mêmes axes; et θ l'angle DOD′ de ces deux droites. Sur la première droite OD prenons OM = 1 et soient x, y, z les coordonnées du point M. Projetons la longueur OM et le contour OQPM successivement sur la droite OD′ et sur les trois axes; nous formons les égalités

$$\begin{aligned}
&-\cos\theta + x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = 0,\\
&-\cos\alpha + x \qquad\quad + y\cos\nu + z\cos\mu = 0,\\
&-\cos\beta + x\cos\nu + y \qquad\quad + z\cos\lambda = 0,\\
&-\cos\gamma + x\cos\mu + y\cos\lambda + z \qquad\quad = 0;
\end{aligned}$$

éliminons les trois variables x, y, z entre ces quatre équations, nous obtenons la relation

$$\text{(XX)} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, étant développée, donne

$$\text{(XXI)} \quad \Delta^2\cos\theta = \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha\cos\alpha'\sin^2\lambda + (\cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')(\cos\mu\cos\nu - \\ +\cos\beta\cos\beta'\sin^2\mu + (\cos\gamma\cos\gamma' + \cos\alpha\cos\alpha')(\cos\nu\cos\lambda - \\ +\cos\gamma\cos\gamma'\sin^2\nu + (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta')(\cos\lambda\cos\mu - \end{array} \right.$$

Les deux droites sont perpendiculaires entre elles, si l'on a $\cos\theta = 0$ et par suite

$$\text{(XXII)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

245. Angles que fait une droite donnée avec les trois plans de coordonnées. — Soient toujours α, β, γ les angles que fait la droite OD (*fig.* 9) avec les trois axes de coordonnées et désignons par a, b, c ceux qu'elle fait avec les trois plans YOZ, ZOX, XOY. Si nous supposons que la droite OD′ soit perpendiculaire au plan de yz, nous aurons (XIX)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - a, \quad \cos\theta = \sin a, \quad \cos\alpha' = \frac{\Delta}{\sin\lambda}, \quad \cos\beta' = 0, \quad \cos\gamma' = 0.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule (XX) donne

$$\begin{vmatrix} \sin a & \frac{\Delta}{\sin\lambda} & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\sin a \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} - \frac{\Delta}{\sin\lambda} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

on en tire

$$\text{(XXIII)} \qquad \Delta \sin a \sin\lambda = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\beta & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

On a donc, en développant,

$$\left\{\begin{aligned} \Delta \sin a \sin\lambda &= \cos\alpha \sin^2\lambda + \cos\beta(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + \cos\gamma(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu), \\ \Delta \sin b \sin\mu &= \cos\beta \sin^2\mu + \cos\gamma(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + \cos\alpha(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu), \\ \Delta \sin c \sin\nu &= \cos\gamma \sin^2\nu + \cos\alpha(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + \cos\beta(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda). \end{aligned}\right.$$

Si nous multiplions ces trois égalités respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et que nous ajoutions les trois produits, le second membre de l'égalité résultante sera égal à Δ^2 en vertu de la relation (IV), de sorte qu'il viendra

$$\text{(XXV)} \qquad \sin a \cos\alpha \sin\lambda + \sin b \cos\beta \sin\mu + \sin c \cos\gamma \sin\nu = \Delta$$

pour une nouvelle expression du sinus du trièdre formé par les axes.

246. **Tangente de l'angle φ que fait avec les trois axes de coordonnées la droite également inclinée sur ces axes.** — Si la ligne OD (*fig.* 9) est cette droite, nous aurons $\alpha = \beta = \gamma = \varphi$, ce qui transforme la relation (III) dans la suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi & \cos\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\varphi & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\varphi & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour résoudre cette équation par rapport à l'angle φ, divisons la première ligne et la première colonne par $\cos\varphi$, puis remplaçons le premier

élément résultant $\frac{1}{\cos^2\varphi}$ par son équivalent $\tang^2\varphi + 1$; l'équation deviendra ainsi

$$\begin{vmatrix} \tang^2\varphi + 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 + 1 & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ 0 + 1 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ 0 + 1 & \cos\mu & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et donne

$$\begin{vmatrix} \tang^2\varphi & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ 0 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ 0 & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ 1 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ 1 & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier terme revient à $\Delta^2 \tang^2\varphi$, tandis que le second, en vertu du n° 184, est égal à $-16 \sin^2\frac{\lambda}{2} \sin^2\frac{\mu}{2} \sin^2\frac{\nu}{2}$. On a donc

$$\text{(XXVI)} \qquad \tang\varphi = \frac{4 \sin\frac{\lambda}{2} \sin\frac{\mu}{2} \sin\frac{\nu}{2}}{\Delta}.$$

247. Tangente de l'angle ψ que fait avec les trois plans de coordonnées la droite également inclinée sur ces plans. — Soit OD′ la droite également inclinée sur les trois plans YOZ, ZOX, XOY. Si par l'origine nous élevons sur ces plans, et dans le sens des coordonnées positives, les perpendiculaires OX′, OY′, OZ′, la droite OD′ sera également inclinée sur ces trois droites, qui forment le trièdre supplémentaire de celui des axes.

Par conséquent il nous suffira de remplacer dans (XXVI) les angles φ, λ, μ, ν et Δ par $\frac{\pi}{2} - \psi$, $\pi - X$, $\pi - Y$, $\pi - Z$ et Δ', pour avoir l'expression

$$\tang\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \frac{4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{X}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Y}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{Z}{2}\right)}{\Delta'},$$

ou

$$\tang\psi = \frac{\Delta'}{4 \cos\frac{X}{2} \cos\frac{Y}{2} \cos\frac{Z}{2}}.$$

Dans cette valeur, à la place de Δ', mettons son expression (XXII) et dans le résultat mettons, au lieu de $\cos\frac{X}{2}$, $\sin\frac{Y}{2}$, $\sin\frac{Z}{2}$, leurs valeurs en fonctions des angles λ, μ, ν; nous trouvons que

$$\text{(XXVII)} \qquad \operatorname{tang}\psi = \frac{\Delta}{2\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}}.$$

248. Le trièdre dont les trois faces valent ensemble deux angles droits. — Dans ce qui précède, supposons que

$$\lambda+\mu+\nu=\pi,$$

nous trouverons facilement que

$$\text{(XXVIII)} \qquad \cos X+\cos Y+\cos Z=1,$$

$$\text{(XXIX)} \quad \begin{cases} \Delta = 2\sqrt{\cos\lambda\cos\mu\cos\nu} = 2\operatorname{tang}\frac{X}{2}\operatorname{tang}\frac{Y}{2}\operatorname{tang}\frac{Z}{2}, \\ \Delta' = 2\sin^2 S\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}, \\ \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{S}, \\ \operatorname{tang}\psi = \frac{\Delta}{2}. \end{cases}$$

§ II. — Intersection des droites et des plans.

249. Condition pour que deux droites se rencontrent. — 1° Si les deux droites

$$(1) \quad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0. \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} A'x+B'y+C'z+D'=0, \\ A'_1x+B'_1y+C'_1z+D'_1=c \end{cases}$$

se coupent, les quatre équations seront satisfaites par les

coordonnées du point d'intersection. Éliminant donc les trois variables x, y, z entre les quatre équations (1) et (2), considérées comme simultanées, nous obtenons la relation de condition

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A' & B' & C' & D' \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2° Supposons que les deux droites soient déterminées par les deux systèmes d'équations

$$(3)\qquad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q'. \end{cases}$$

On ramènera ce cas au précédent, en mettant ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} -x + 0.y + az + p &= 0, \\ 0.x - \quad y + bz + q &= 0, \\ -x + 0.y + a'z + p' &= 0, \\ 0.x - \quad y + b'z + q' &= 0; \end{aligned}$$

éliminant x, y et z, on en tire la relation de condition

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & a & p \\ 0 & -1 & b & q \\ -1 & 0 & a' & p' \\ 0 & -1 & b' & q' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & p \\ 0 & 1 & b & q \\ 1 & 0 & a' & p' \\ 0 & 1 & b' & q' \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous retranchons les deux premières lignes des deux dernières, nous obtenons l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & p \\ 0 & 1 & b & q \\ 0 & 0 & a'-a & p'-p \\ 0 & 0 & b'-b & q'-q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'-a & p'-p \\ b'-b & q'-q \end{vmatrix} = 0,$$

qui revient à

$$\text{(III)} \qquad \frac{a-a'}{p-p'}=\frac{b-b'}{q-q'}.$$

250. Intersection d'une droite $x=az+p, y=bz+q$ avec un plan $Ax+By+Cz+D=0$. — Les coordonnées du point d'intersection satisfont à la fois à ces trois équations; or ce système peut s'écrire

$$\begin{aligned} Cz+D+Ax+By&=0,\\ -az-p+\quad x+0.y&=0,\\ -bz-q+0.x+By&=0; \end{aligned}$$

éliminant x et y entre ces trois équations, on obtient l'égalité

$$\begin{vmatrix} Cz+D & A & B \\ -az-p & 1 & 0 \\ -bz-q & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

qui donne

$$z\begin{vmatrix} C & A & B \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -D & A & B \\ p & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

et, en développant,

$$\text{(IV)} \qquad z=-\frac{Ap+Bq+D}{Aa+Bb+C}.$$

On trouve ensuite que

$$x=-\frac{(Bq+D)a-(Bb+C)p}{Aa+Bb+C}, \quad y=-\frac{(Ap+D)b+(Aa+C)q}{Aa+Bb+C}.$$

251. Intersection de trois plans

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0,\\ A'x+B'y+C'z+D'=0,\\ A''x+B''y+C''z+D''=0. \end{cases}$$

1° *Si ces trois plans se coupent en un seul et même point,* les coordonnées de ce point d'intersection vérifient simulta-

nément leurs équations (5). L'élimination de y et z entre ces trois équations fournit immédiatement l'équation suivante en x :

$$\begin{vmatrix} Ax+D & B & C \\ A'x+D' & B' & C' \\ A''x+D'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est la somme de deux déterminants (56); par suite, cette équation revient à

$$\begin{vmatrix} Ax & +B & C \\ A'x & B' & C' \\ A''x & B'' & C'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D & B & C \\ D' & B' & C' \\ D'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

et donne, en mettant x en évidence dans le premier terme (28),

$$x(AB'C'') + (DB'C'') = 0.$$

On trouve ainsi, pour les coordonnées du point d'intersection, les valeurs

$$(V) \quad x = -\frac{(DB'C'')}{(AB'C'')}, \quad y = -\frac{(AD'C'')}{(A'B'C'')}, \quad z = -\frac{(AB'D'')}{(AB'C'')}.$$

2° *Si les trois plans* (5) *se coupent suivant trois droites parallèles*, les valeurs (V) des coordonnées seront infinies, ce qui exige que l'on ait $(AB'C'') = 0$ et que chacun des trois déterminants $(DB'C'')$, $(AD'C'')$, $(AB'D'')$ soit différent de zéro.

3° *Si les trois plans* (5) *se coupent suivant deux droites parallèles*, deux de ces plans, par exemple les deux derniers, seront parallèles; on aura dans ce cas

$$A'' = mA', \quad B'' = mB', \quad C'' = mC'$$

et D'' différent de mD'. Le premier déterminant devient ainsi

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ mA' & mB' & mC' \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

et se trouve naturellement nul, comme ayant deux lignes

identiques (26), tandis que les trois autres se changent en

$$m\begin{vmatrix} D & B & C \\ D' & B' & C' \\ \frac{D''}{m} & B' & C' \end{vmatrix}, \quad m\begin{vmatrix} A & D & C \\ A' & D' & C' \\ A' & \frac{D''}{m} & C' \end{vmatrix}, \quad m\begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A' & B' & \frac{D''}{m} \end{vmatrix}$$

et sont nécessairement différents de zéro.

4° Enfin, *si les trois plans* (5) *se coupent suivant une seule et même droite*, les valeurs des coordonnées du point d'intersection seront indéterminées et l'on a en même temps

$$(AB'C'') = 0, \quad (DB'C'') = 0, \quad (AD'B'') = 0, \quad (AB'D'') = 0.$$

Il est à remarquer que deux quelconques de ces quatre relations entraînent forcément les deux autres.

Les réciproques de ces quatre cas sont vraies et s'établissent facilement.

§ III. — Combinaison des équations générales qui représentent des plans donnés.

252. Relation identique entre les premiers membres des équations de quatre plans et leurs déterminants. — Prenons les équations de quatre plans

$$(1)\quad \begin{cases} P = Ax + By + Cz + D = 0, \\ P' = A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ P'' = A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \\ P''' = A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0. \end{cases}$$

Nous avons évidemment

$$\begin{vmatrix} D & A & B & C \\ D' & A' & B' & C' \\ D'' & A'' & B'' & C'' \\ D''' & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0,$$

puisque, pour passer du premier déterminant au second, il faut effectuer trois permutations de deux colonnes consécutives, ce qui change le signe du déterminant sans en altérer la valeur.

Dans le premier déterminant, nous pouvons ajouter à la première

colonne les trois suivantes, multipliées respectivement par x, y et z; nous obtenons ainsi l'égalité

$$\begin{vmatrix} Ax+By+Cz+D & A & B & C \\ A'x+B'y+C'z+D' & A' & B' & C' \\ A''x+B''y+C''z+D'' & A'' & B'' & C'' \\ A'''x+B'''y+C'''z+D''' & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} P & A & B & C \\ P' & A' & B' & C' \\ P'' & A'' & B'' & C'' \\ P''' & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0.$$

Développons le premier membre suivant les éléments de la première colonne; nous transformons notre identité dans la suivante :

$$P\begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & A''' & C''' \end{vmatrix} - P'\begin{vmatrix} A & B & C \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} + P''\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A''' & B''' & C''' \end{vmatrix}$$
$$- P'''\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le second déterminant, nous pouvons amener la première ligne au troisième rang par deux permutations de deux lignes consécutives, ce qui n'altère ni la valeur ni le signe du déterminant; dans le troisième déterminant, nous pouvons de même amener la troisième ligne au premier rang par deux permutations de deux lignes consécutives. Notre identité (1) pourra donc s'écrire

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned} &P\begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} - P'\begin{vmatrix} A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \\ A & B & C \end{vmatrix} + P''\begin{vmatrix} A''' & B''' & C''' \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} \\ &\qquad - P'''\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}\right.$$

ou, en faisant usage de la notation abrégée,

$$(\mathrm{II})\quad P(A'B''C''') - P'(A''B'''C) + P''(A'''BC') - P'''(AB'C'') + (AB'C''D'') = 0.$$

C'est la relation que nous voulions établir.

253. Relation identique entre les premiers membres des équations de trois plans et leurs déterminants. — Dans la relation (I), que nous venons de trouver, supposons que l'équation du quatrième plan $P''' = 0$ devienne $x + y + z = 0$, de sorte que

$$A''' = B''' = C''' = 1 \quad \text{et} \quad D''' = 0;$$

la relation elle-même deviendra

$$P\begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - P'\begin{vmatrix} A'' & B'' & C'' \\ 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \end{vmatrix} + P''\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

$$-(x+y+z)\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en ramenant au premier rang les lignes à unités,

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} & P\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} + P'\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{vmatrix} + P''\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} \\ & = (x+y+z)\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

C'est la relation cherchée.

254. Théorème I. — *Lorsque trois plans* $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$ *se coupent suivant une seule et même droite, on peut trouver pour* λ, λ', λ'' *des valeurs constantes et finies, de manière que l'on ait identiquement*

$$\text{(IV)} \qquad \lambda P + \lambda' P' + \lambda'' P'' = 0.$$

En effet, si les trois plans se coupent suivant une même droite, les quatre déterminants $(AB'C'')$, $(DB'C'')$, $(AD'C'')$, $(AB'D'')$ sont nuls (251); par suite, dans la relation (III), le premier terme du second membre est nul; le second terme, dont le développement est $(BC'D'') - (AC'D'') + (AB'D'')$, ou $(DB'C'') + (AD'C'') + (AB'D'')$, se réduit aussi à zéro; donc la relation (III) devient

$$P\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} + P'\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{vmatrix} + P''\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0;$$

ce qui donne pour les constantes λ, λ', λ'' les valeurs finies

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{cases} \lambda = B'C'' - C'B'' + C'A'' - A'C'' + A'B'' - B'A'', \\ \lambda' = B''C - C''B + C''A - A''C + A''B - B''A, \\ \lambda'' = BC' - CB' + CA' - AC' + AB' - BA'. \end{cases}$$

255. Condition pour que quatre plans $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$, $P''' = 0$ se coupent en un seul et même point. — Les équations de ces quatre plans (1) devront être vérifiées par un même système de valeurs pour les coordonnées x, y, z; par suite ces équations seront compatibles; il faudra donc que leur déterminant soit nul. On obtient ainsi la relation de condition

$$(\mathrm{VI})\qquad \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0,$$

ou $(AB'C''D''') = 0$.

256. Théorème II. — *Lorsque quatre plans* $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$, $P''' = 0$ *passent par un seul et même point, on peut trouver pour* λ, λ', λ'', λ''' *des valeurs constantes et finies, de manière que l'on ait*

$$(\mathrm{VII})\qquad \lambda P + \lambda' P' + \lambda'' P'' + \lambda''' P''' = 0.$$

En effet, si les quatre plans (1) se coupent en un seul et même point, le dernier terme de l'identité (I) est nul en vertu de la condition du numéro précédent; on a donc entre P, P', P'' et P''' la relation

$$P(A'B''C''') - P'(A''B'''C) + P''(A'''BC') - P'''(AB'C'') = 0,$$

ce qui donne pour les constantes λ, λ', λ'' et λ''' les valeurs

$$(\mathrm{VIII})\qquad \begin{cases} \lambda = A'(B''C''' - C''B''') + A''(B'''C' - C'''B') + A'''(B'C'' - C'B''), \\ -\lambda' = A''(B'''C - C'''B) + A'''(BC'' - CB'') + A\ (B''C''' - C''B''), \\ \lambda'' = A'''(BC' - CB') + A(B'C''' - C'B''') + A'(B'''C - C'''B), \\ -\lambda''' = A\ (B'C'' - C'B'') + A'(B''C - C''B) + A''(BC' - CB'). \end{cases}$$

§ IV. — Plans passant par des points ou des droites données.

257. Équation du plan passant par trois points donnés. — Le plan

$$D + Ax + By + Cz = 0$$

passera par les trois points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$,

$M_3(x_3, y_3, z_3)$, si l'on a en même temps

$$D + Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0,$$
$$D + Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0,$$
$$D + Ax_3 + By_3 + Cz_3 = 0.$$

Ces quatre équations sont homogènes par rapport aux coefficients D, A, B, C; pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul (131), c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation du plan cherché.

Cette équation exprime aussi la condition nécessaire et suffisante, pour que les quatre points $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ soient situés dans un même plan.

258. Équation du plan passant par deux droites parallèles. — Supposons que les deux parallèles, passant l'une par le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et l'autre par le point $M_2(x_2, y_2, z_2)$, fassent avec les axes de coordonnées les angles α, β, γ.

Si les axes sont rectangulaires, un second point M' de la première parallèle sera déterminé par les coordonnées

$$x' = x_1 + \rho\cos\alpha,$$
$$y' = y_1 + \rho\cos\beta,$$
$$z' = z_1 + \rho\cos\gamma,$$

où ρ désigne la distance M_1M' des deux points M_1 et M' de la première parallèle.

Le plan cherché, passant par les trois points M_1, M_2 et M', sera représenté par l'équation (257)

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_1 + \rho\cos\alpha & y_1 + \rho\cos\beta & z_1 + \rho\cos\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on peut simplifier. Pour cela il suffit de retrancher la seconde ligne de la quatrième et de diviser par ρ la ligne résultante. On trouve ainsi

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0$$

pour l'équation du plan demandé.

259. Équation du plan passant par deux droites concourantes. — Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point d'intersection M_0 des deux droites; et α, β, γ; α', β', γ' les angles que font leurs directions avec les trois axes de coordonnées supposés rectangulaires. Les coordonnées

$$x_0 + \rho\cos\alpha,\quad y_0 + \rho\cos\beta,\quad z_0 + \rho\cos\gamma$$

seront celles d'un second point M de la première droite, éloigné du premier M_0 d'une longueur ρ, et

$$x_0 + \rho'\cos\alpha',\quad y_0 + \rho'\cos\beta',\quad z_0 + \rho'\cos\gamma'$$

seront les coordonnées d'un second point M' de la deuxième droite, éloigné du premier M_0 d'une longueur ρ'.

Le plan demandé, devant passer par les trois points M_0, M et M', sera représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_0 + \rho\cos\alpha & y_0 + \rho\cos\beta & z_0 + \rho\cos\gamma \\ 1 & x_0 + \rho'\cos\alpha' & y_0 + \rho'\cos\beta' & z_0 + \rho'\cos\gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

Retranchant la seconde ligne de chacune des deux suivantes et divisant par ρ et ρ' les deux lignes résultantes, on trouve

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ 0 & \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix} = 0$$

pour l'équation du plan cherché.

§ V. — Droites et plans parallèles.

260. Condition pour que trois droites soient parallèles à un même plan. — Les trois droites

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x-p}{a}=\dfrac{y-q}{b}=\dfrac{z-r}{c}, \\ \dfrac{x-p'}{a'}=\dfrac{y-q'}{b'}=\dfrac{z-r'}{c'}, \\ \dfrac{x-p''}{a''}=\dfrac{y-q''}{b''}=\dfrac{z-r''}{c''} \end{cases}$$

seront parallèles à un même plan

$$(2)\qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

si l'on a en même temps

$$\begin{aligned} Aa+Bb+Cc&=0,\\ Aa'+Bb'+Cc'&=0,\\ Aa''+Bb''+Cc''&=0. \end{aligned}$$

Ces trois équations du premier degré sont homogènes par rapport aux coefficients A, B, C de l'équation du plan; pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. La condition demandée est donc

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=0.$$

261. Condition pour que trois plans soient parallèles à une même droite. — Les trois plans

$$(3)\qquad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0, \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$$

seront parallèles à la droite

$$(4) \qquad \frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c},$$

si l'on a simultanément

$$\begin{aligned} Aa + Bb + Cc &= 0, \\ A'a + B'b + C'c &= 0, \\ A''a + B''b + C''c &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant a et b entre ces trois équations, on trouve

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0$$

pour la relation demandée.

262. Plan mené par l'origine parallèlement à deux droites données. — Si le plan

$$(5) \qquad Ax + By + Cz = 0$$

doit être parallèle aux deux droites

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c},$$

$$\frac{x-p'}{a'} = \frac{y-q'}{b'} = \frac{z-r'}{c'},$$

on devra avoir en même temps

$$(6) \qquad \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0, \\ Aa' + Bb' + Cc' = 0. \end{cases}$$

Éliminant A et B entre les trois équations (5) et (6), on trouve

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$$

pour l'équation du plan demandé.

263. Plan mené, par une droite

$$(7)\quad \begin{cases} P = Ax + By + Cz + D = 0, \\ P' = A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{cases}$$

arallèlement à une autre droite

$$(8)\quad \begin{cases} P'' = A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \\ P''' = A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0. \end{cases}$$

Le plan cherché, devant passer par la droite (7), est repré-enté par une équation de la forme $P - \lambda P' = 0$ ou par

$$(9)\quad (A - \lambda A')x + (B - \lambda B')y + (C - \lambda C')z + D - \lambda D' = 0.$$

Pour que ce plan (9) soit parallèle à l'intersection des deux lans (8), il faut et il suffit que les trois plans

$$(10)\quad \begin{cases} (A - \lambda A')x + (B - \lambda B')y + (C - \lambda C')z = 0, \\ A''x + B''y + C''z = 0, \\ A'''x + B'''y + C'''z = 0, \end{cases}$$

nenés par l'origine parallèlement aux trois plans (9) et (8), e coupent suivant une seule et même droite; il s'ensuit que es trois équations homogènes (10) doivent être satisfaites par es mêmes systèmes de valeurs pour x, y, z, qui vérifient les quations de cette droite. Il faudra donc que le déterminant es équations (10) soit nul, ou que l'on ait

$$\begin{vmatrix} A - \lambda A' & B - \lambda B' & C - \lambda C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} = 0.$$

n en déduit l'équation

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} = 0,$$

i donne

$$\lambda = \frac{(AB''C''')}{(A'B''C''')}.$$

Substituant dans l'équation (9), on trouve

$$\text{(IV)} \qquad \frac{Ax + By + Cz + D}{(AB''C''')} = \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{(A'B''C''')}$$

pour l'équation du plan demandé.

264. Si, dans cette équation, nous faisons disparaître les dénominateurs, et que nous ordonnions par rapport aux variables, nous pourrons lui donner les formes suivantes :

$$[A(A'B''C''') - A'(AB''C''')]x + [B(A'B''C''') - B'(AB''C''')]y$$
$$+ [C(A'B''C''') - C'(AB''C''')z + D(A'B''C''') - D'(AB''C''') = 0,$$

$$\text{V)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} A & A & B & C \\ A' & A' & B' & C' \\ 0 & A'' & B'' & C'' \\ 0 & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} B & A & B & C \\ B' & A' & B' & C' \\ 0 & A'' & B'' & C'' \\ 0 & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} y \\ + \begin{vmatrix} C & A & B & C \\ C' & A' & B' & C' \\ 0 & A'' & B'' & C'' \\ 0 & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & 0 \\ A''' & B''' & C''' & 0 \end{vmatrix} = 0, \end{array} \right. .$$

$$\text{(VI)} \quad (bc' - cb')x + (ca' - ac')y + (ab' - ba')z + \Theta = 0,$$

en posant

$$\text{(11)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} BC' - CB' = a, & B''C''' - C''B''' = a', \\ CA' - AC' = b, & C''A''' - A''C''' = b', \\ AB' - BA' = c, & A''B''' - B''A''' = c', \\ \multicolumn{2}{c}{\Theta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & 0 \\ A''' & B''' & C''' & 0 \end{vmatrix}.} \end{array} \right.$$

265. On trouverait de même que le plan, mené par la droite (7) parallèlement à la droite (8), est représenté par

chacune des trois équations

$$\text{(VII)}\quad \frac{A''x + B''y + C''z + D''}{(A''BC')} = \frac{A'''x + B'''y + C'''z + D'''}{(A'''BC')},$$

$$\text{(VIII)}\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ 0 & A' & B' & C' \\ A'' & A'' & B'' & C'' \\ A''' & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ 0 & A' & B' & C' \\ B'' & A'' & B'' & C'' \\ B''' & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} y \\ + \begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ B' & A' & C' & 0 \\ C'' & A'' & B'' & C'' \\ C''' & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ A' & B' & C' & 0 \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0. \end{array}\right.$$

$$\text{(IX)}\quad (bc' - cb')x + (ca' - ac')y + (ab' - ba') - \mathfrak{D}' = 0,$$

où l'on a posé

$$(12)\qquad \mathfrak{D}' = \begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ A' & B' & C' & 0 \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix}.$$

266. Les deux plans (V) et (VIII) sont évidemment parallèles, puisque, les sommes des coefficients des mêmes variables étant nulles, ces coefficients sont égaux et de signes contraires dans les deux équations (V) et (VIII).

267. On peut arriver aux mêmes résultats de la manière suivante : nous avons entre les quatre équations (7) et (8) la relation identique (252)

$$P(A'B''C''') - P'(A''B'''C) + P''(A'''BC') - P'''(AB'C'') = -(AB'C''D''');$$

par conséquent les premiers membres des deux équations

$$(13)\qquad P(A'B''C''') - P'(A''B'''C) = 0,$$

$$(14)\qquad P''(A'''BC') - P'''(AB'C'') = 0$$

ne diffèrent que par une constante $(AB'C''D''')$; donc ces deux équations représentent deux plans parallèles.

Ainsi le plan (13) ou

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{(AB''C''')} = \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{(A'B''C''')}$$

passe par la droite (7) et est parallèle à la droite (8), tandis que le plan (14) ou

$$\frac{A''x + B''y + C''z + D''}{(A''BC')} = \frac{A'''x + B'''y + C'''z + D'''}{(A'''BC')}$$

est mené par la seconde droite (8) parallèlement à la première (7).

§ VI. — Droites et plans perpendiculaires.

268. Condition de perpendicularité de la droite et du plan. — Supposons que la droite

$$(1) \qquad \frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c}$$

soit perpendiculaire au plan

$$(2) \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Si, par l'origine des coordonnées, nous menons une parallèle à la droite donnée (1), les équations de cette parallèle seront

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Par le point I de cette dernière droite, dont les coordonnées sont a, b, c, conduisons un plan parallèle au plan donné (2), l'équation de ce plan sera

$$(3) \qquad Ax + By + Cz = Aa + Bb + Cc = D'.$$

Posons $OI = u$ et soient α, β, γ les inclinaisons de la droite OI sur les trois axes de coordonnées. Représentons d'ailleurs par l, m, n les distances à l'origine des points L, M, N

où le plan (3) coupe les trois axes de coordonnées, de sorte que

$$l = \frac{D'}{A} = \frac{Aa + Bb + Cc}{A},$$

$$m = \frac{D'}{B} = \frac{Aa + Bb + Cc}{B},$$

$$n = \frac{D'}{C} = \frac{Aa + Bb + Cc}{C}.$$

Comme

$$u = l\cos\alpha = m\cos\beta = n\cos\gamma,$$

il vient

$$(4) \qquad \cos\alpha = \frac{Au}{D'}, \quad \cos\beta = \frac{Bu}{D'}, \quad \cos\gamma = \frac{Cu}{D'}.$$

Projetons la droite u successivement sur les trois axes de coordonnées, ainsi que le contour formé par les coordonnées a, b, c de son extrémité I; nous formons les trois équations

$$u\cos\alpha = a + b\cos\nu + c\cos\mu,$$

$$u\cos\beta = a\cos\nu + b + c\cos\lambda,$$

$$u\cos\gamma = a\cos\mu + b\cos\lambda + c,$$

qui, eu égard aux valeurs (4), reviennent à

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{Au^2}{D'} &= a + b\cos\nu + c\cos\mu, \\ \frac{Bu^2}{D'} &= a\cos\nu + b + c\cos\lambda, \\ \frac{Cu^2}{D'} &= a\cos\mu + b\cos\lambda + c. \end{aligned} \right.$$

Si nous multiplions ces trois égalités respectivement par a, b et c et que nous ajoutions, nous trouverons que les

relations de conditions demandées seront

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{u^2}{D'} &= \frac{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}{Aa+Bb+Cc} \\ &= \frac{a+b\cos\nu+c\cos\mu}{A} \\ &= \frac{a\cos\nu+b+c\cos\lambda}{B} \\ &= \frac{a\cos\mu+b\cos\lambda+c}{C}. \end{aligned}\right.$$

Ces conditions peuvent s'obtenir sous une autre forme.

Entre les trois équations (5), éliminons b et c; il nous vient l'équation

$$\begin{vmatrix} -\frac{Au^2}{D}+a & \cos\nu & \cos\mu \\ -\frac{Bu^2}{D'}+a\cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ -\frac{Cu^2}{D'}+a\cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dont le premier membre est la différence de deux déterminants. On en déduit par suite

$$\begin{vmatrix} a & \cos\nu & \cos\mu \\ a\cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ a\cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{Au^2}{D'} & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{Bu^2}{D'} & 1 & \cos\lambda \\ \frac{Cu^2}{D'} & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$a\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = \frac{u^2}{D'}\begin{vmatrix} A & \cos\nu & \cos\mu \\ B & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Nous trouvons ainsi, en développant, une nouvelle expres-

sion des relations de condition

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dfrac{D'\Delta^2}{u^2} = \dfrac{A\sin^2\lambda + B(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)}{a} \\ \qquad = \dfrac{B\sin^2\mu + C(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)}{b} \\ \qquad = \dfrac{C\sin^2\nu + A(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)}{c}. \end{cases}$$

§ VII. — Distance du point au plan et plus courte distance de deux droites.

269. Distance d'un point à un plan [1]. — Soient

$$(1)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan; x', y', z' les coordonnées du point donné P; p la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan (1); et α, β, γ les inclinaisons de cette perpendiculaire sur les trois axes de coordonnées.

Par le point P menons le plan parallèle au plan (1); son équation sera

$$(2)\qquad Ax + By + Cz = Ax' + By' + Cz'.$$

Les deux plans (1) et (2) coupent les axes de coordonnées aux distances de l'origine respectivement égales à

$$a = -\frac{D}{A},\quad b = -\frac{D}{B},\quad c = -\frac{D}{C};$$

et

$$a' = \frac{Ax' + By' + Cz'}{A},$$

$$b' = \frac{Ax' + By' + Cz'}{B},$$

$$c' = \frac{Ax' + By' + Cz'}{C}.$$

---

[1] Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 228.

D'après cela, il est évident qu'on a

$$p = (a' - a)\cos\alpha = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{A}\cos\alpha,$$

$$p = (b' - b)\cos\beta = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{B}\cos\beta,$$

$$p = (c' - c)\cos\gamma = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{C}\cos\gamma;$$

d'où nous tirons

$$\cos\alpha = \frac{Ap}{Ax' + By' + Cz' + D},$$

$$\cos\beta = \frac{Bp}{Ax' + By' + Cz' + D},$$

$$\cos\gamma = \frac{Cp}{Ax' + By' + Cz' + D}.$$

Substituons ces valeurs dans la relation (III) du n° 231; celle-ci devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{Ap}{Ax'+By'+Cz'+D} & \frac{Bp}{Ax'+By'+Cz'+D} & \frac{Cp}{Ax'+By'+Cz'+D} \\ \frac{Ap}{Ax'+By'+Cz'+D} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{Bp}{Ax'+By'+Cz'+D} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{Cp}{Ax'+By'+Cz'+D} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplions la première ligne et la première colonne par $\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{p}$; nous obtenons l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{(Ax' + By' + Cz' + D)^2}{p^2} & A & B & C \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne

$$(3)\quad \frac{(Ax'+By'+Cz'+D)^2\Delta^2}{p^2} = -\begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

où Δ représente le sinus du trièdre formé par les axes de coordonnées.

De l'égalité (3) nous tirons

$$(\mathrm{I})\qquad p = \frac{(Ax'+By'+Cz'+D).\Delta}{\sqrt{\begin{array}{l} A^2\sin^2\lambda + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + B^2\sin^2\mu + 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + C^2\sin^2\nu + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}}}.$$

pour la distance demandée.

La distance de l'origine O au plan (1) s'obtient en posant $x'=y'=z'=0$ dans (I); elle sera

$$(\mathrm{II})\qquad p = \pm\frac{D\Delta}{H},$$

en faisant, pour abréger,

$$(4)\quad \sqrt{\left.\begin{array}{l} A^2\sin^2\lambda + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + B^2\sin^2\mu + 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + C^2\sin^2\nu + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}\right\}} = H.$$

270. Distance d'un point à l'un des plans de coordonnées. — Le plan (1) se confondra avec le plan des yz, qui a pour équation $x=0$, si l'on a $B=C=D=0$. Dans ce cas, la formule (3) se réduit à $\frac{A^2x'^2\Delta^2}{p^2} = A^2\sin^2\lambda$ et donne $p = \frac{\Delta x'}{\sin\lambda}$.

Les distances p, q, r du point (x', y', z') aux trois plans de coordonnées $x=0$, $y=0$, $z=0$ seront donc

$$(\mathrm{III})\qquad p = \frac{\Delta x'}{\sin\lambda},\quad q = \frac{\Delta y'}{\sin\mu},\quad r = \frac{\Delta z'}{\sin\nu}.$$

271. Équation de la droite dont tous les points sont à égale distance des trois plans de coordonnées. — Si les distances (III) sont égales entre elles, nous aurons entre les coordonnées du point (x', y', z') les relations

$$\frac{x'}{\sin\lambda} = \frac{y'}{\sin\mu} = \frac{z'}{\sin\nu};$$

ces équations représentent donc le lieu des points équidistants des trois plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$; ce lieu est une ligne droite ayant pour équations

$$\text{(IV)} \qquad \frac{x}{\sin\lambda} = \frac{y}{\sin\mu} = \frac{z}{\sin\nu}.$$

On trouverait facilement que les trois droites qui ont leurs points également éloignés des trois faces des trièdres OX'YZ, OXY'Z, OXYZ' sont représentées par les équations respectives

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{-\sin\lambda} &= \frac{y}{\sin\mu} = \frac{z}{\sin\nu}, \\ \frac{x}{\sin\lambda} &= \frac{y}{-\sin\mu} = \frac{z}{\sin\nu}, \\ \frac{x}{\sin\lambda} &= \frac{y}{\sin\mu} = \frac{z}{-\sin\nu}. \end{aligned} \right.$$

272. Angle de deux plans donnés par leurs équations [1]

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Soient p et p' les perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces plans; α, β, γ et α', β', γ' les inclinaisons de ces perpendiculaires sur les axes de coordonnées; nous avons évidemment

$$\cos\alpha = -\frac{Ap}{D}, \quad \cos\beta = -\frac{Bp}{D}, \quad \cos\gamma = -\frac{Cp}{D},$$

---

[1] Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 231.

et

$$\cos\alpha' = -\frac{A'p'}{D'}, \quad \cos\beta' = -\frac{B'p'}{D'}, \quad \cos\gamma' = -\frac{C'p'}{D'}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la relation (XX) du n° **244**, après avoir multiplié la première colonne par $-\frac{D}{p}$ et la première ligne par $-\frac{D'}{p'}$, cette relation deviendra

$$\begin{vmatrix} \frac{DD'\cos\theta}{pp'} & A' & B' & C' \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et donnera

$$(5) \qquad \frac{DD'\Delta^2\cos\theta}{pp'} = -\begin{vmatrix} 0 & A' & B' & C' \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = K^2,$$

en faisant par abrévation

$$(6) \quad \begin{cases} K^2 = AA'\sin^2\lambda + (BC' + CB')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ \quad + BB'\sin^2\mu + (CA' + AC')(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ \quad + CC'\sin^2\nu + (AB' + BA')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{cases}$$

Mais, en vertu de la formule (II), nous avons

$$pp' = \frac{DD'\Delta^2}{HH'};$$

par suite nous obtenons, en substituant dans (5),

$$\cos\theta = \frac{K^2}{HH'},$$

ou, en remplaçant K, H et H′ par leurs développements (6) et (4),

$$(\mathrm{VI})\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{\begin{array}{l} AA'\sin^2\lambda + (BC' + CB')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + BB'\sin^2\mu + (CA' + AC')(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + CC'\sin^2\nu + (AB' + BA')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}}}{\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\begin{array}{l} A^2\sin^2\lambda + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + B^2\sin^2\mu + 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + C^2\sin^2\nu + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}} \\ \times\sqrt{\begin{array}{l} A'^2\sin^2\lambda + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + B'^2\sin^2\mu + 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + C'^2\sin^2\nu + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}} \end{array}\right\}}.$$

273. Condition de perpendicularité de deux plans. — Elle s'obtient, en posant $\cos\theta = 0$ dans l'égalité (5), et sera exprimée par chacune des deux relations

$$(\mathrm{VII})\qquad \begin{vmatrix} 0 & A' & B' & C' \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\mathrm{VIII})\quad \left\{\begin{array}{l} AA'\sin^2\lambda + (BC' + CB')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + BB'\sin^2\mu + (CA' + AC')(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + CC'\sin^2\nu + (AB' + BA')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) = 0, \end{array}\right.$$

dont la dernière peut encore se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$(\mathrm{IX})\quad \left\{\begin{array}{l} A'[A\sin^2\lambda + B(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)] \\ + B'[B\sin^2\mu + C(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)] \\ + C'[C\sin^2\nu + A(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)] = \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{X})\quad \left\{\begin{array}{l} A[A'\sin^2\lambda + B'(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)] \\ + B[B'\sin^2\mu + C'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A'(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)] \\ + C[C'\sin^2\nu + A'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)] = \end{array}\right.$$

274. Plus courte distance des deux droites

$$(7)\qquad \begin{cases} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0. \end{cases}$$

Par chacune de ces droites menons un plan parallèle à l'autre droite; nous obtenons ainsi les deux plans (IV) et (VII) des n°s 263 et 265.

Il est évident que la plus courte distance des deux droites (7) et (8) est égale, en valeur absolue, à la différence $\delta - \delta'$ des distances à l'origine δ et δ' des deux plans (IV) et (VII).

Posons, pour abréger,

$$(9)\qquad bc' - cb' = \mathcal{A}, \quad ca' - ac' = \mathcal{B}, \quad ab' - ba' = \mathcal{C};$$

les équations des deux plans (IV) et (VII) s'écriront (VI, n° 264)

$$\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}z + \mathcal{D} = 0,$$

$$\mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}z - \mathcal{D}' = 0;$$

et nous aurons

$$\delta = \frac{\mathcal{D}}{\pm\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}}, \quad \delta' = \frac{-\mathcal{D}'}{\pm\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}}.$$

Nous avons, par suite,

$$(\mathrm{XI})\qquad d = \delta - \delta' = \frac{\mathcal{D} + \mathcal{D}'}{\pm\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}},$$

où il reste à calculer $\mathcal{D} + \mathcal{D}'$ et $\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2$ en valeur des coefficients des équations (7) et (8) des deux droites données.

En vertu des notations (11) et (12) des n°s 264 et 265, nous

avons d'abord

$$(10)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}+\mathfrak{D}' = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & 0 \\ A''' & B''' & C''' & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ A' & B' & C' & 0 \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D''. \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = \Delta. \end{cases}$$

Ensuite les valeurs (9) nous donnent

$$\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2 = (bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2,$$

ou, en vertu de l'identité de Lagrange (112),

$$(11)\quad \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2 = (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2.$$

Mais par les égalités (11) du n° 264 on a, en vertu de la même identité,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (BC'-CB')^2+(CA'-AC')^2+(AB'-BA')^2 \\ &= (A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(AA'+BB'+CC')^2. \end{aligned}$$

$$a'^2+b'^2+c'^2 = (A''^2+B''^2+C''^2)(A'''^2+B'''^2+C'''^2)-(A''A'''+B''B'''+C''C''')^2.$$

$$\begin{aligned} aa'+bb'+cc' &= (AA''+BB''+CC'')(A'A'''+B'B'''+C'C''') \\ &\quad -(AA'''+BB'''+CC''')(A'A''+B'B''+C'C''). \end{aligned}$$

Si nous substituons ces valeurs dans l'expression (11), puis le résultat de celle-ci ainsi que (10) dans la fraction (XI), nous obtiendrons pour la plus courte distance d la valeur

$$(\mathrm{XII})\quad d = \frac{\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''. \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{\begin{aligned} &[(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(AA'+BB'+CC' \\ &\times[(A''^2+B''^2+C''^2)(A'''^2+B'''^2+C'''^2)-(A''A'''+B''B'''+C'' \\ &-\left[\begin{aligned} &(AA''+BB''+CC'')(A'A'''+B'B'''+C'C''') \\ &-(AA'''+BB'''+CC''')(A'A''+B'B''+C'C'') \end{aligned}\right]^2 \end{aligned}}}$$

Les deux droites (1) et (2) se couperont, si l'on a $d = 0$, ce qui exige que $\Delta = 0$. Nous retrouvons ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre plans (1) et (2) passent par un même point.

§ VIII. — Application de l'identité de Lagrange au calcul des distances dans la Géométrie de l'espace.

275. L'identité

$$(1)\quad (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2,$$

où

$$(2)\qquad A_1 = b_1 c_2 - c_1 b_2,\quad B_1 = c_1 a_2 - a_1 c_2,\quad C_1 = a_1 b_2 - b_1 a_2,$$

que nous avons obtenue au n° 112, peut se vérifier directement. Elle a de nombreuses applications dans plusieurs branches des Mathématiques. Nous en ferons usage pour déterminer, en Géométrie analytique, les distances du point à la droite et au plan, ainsi que la plus courte distance de deux droites.

Cette application est fort ingénieuse; elle est surtout remarquable par sa grande simplicité. Nous en devons la communication à l'obligeance de M. Hermite. Elle repose sur la solution des deux questions suivantes, que nous résoudrons, en nous conformant à la méthode indiquée par l'habile et profond analyste.

276. **Problème I.** — *Déterminer la valeur de x qui rend* minima *la somme des trois carrés*

$$(3)\qquad S^2 = (ax + a')^2 + (bx + b')^2 + (cx + c')^2,$$

et calculer la valeur de ce minimum.

Dans l'identité (1) posons

$$a_1 = a,\quad a_2 = ax + a',$$
$$b_1 = b,\quad b_2 = bx + b',$$
$$c_1 = c,\quad c_2 = cx + c'.$$

Nous aurons, eu égard à (2),

$$A_1 = b_1 c_2 - c_1 b_2 = b(cx + c') - c(bx + b') = bc' - cb',$$

et, en général, en supprimant les indices dans A_1, B_1, C_1,

$$(4) \qquad A = bc' - cb', \quad B = ca' - ac', \quad C = ab' - ba'.$$

Nous trouverons de même que

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = (a^2 + b^2 + c^2)x + aa' + bb' + cc'.$$

Si nous substituons ces expressions dans notre identité (1), elle deviendra

$$(a^2 + b^2 + c^2)S^2 = A^2 + B^2 + C^2 + [(a^2 + b^2 + c^2)x + aa' + bb' + cc']^2.$$

et donnera

$$S^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{[(a^2 + b^2 + c^2)x + aa' + bb' + cc']^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ce développement de S^2 se compose de deux parties positives, l'une constante et l'autre variable; par suite S^2 atteindra son minimum lorsque la partie variable se réduira à zéro.

Nous en concluons que la valeur

$$(\mathrm{I}) \qquad x = -\frac{aa' + bb' + cc'}{a^2 + b^2 + c^2}$$

rend *minima* la somme des trois carrés (3), et que la valeur de ce minimum est

$$(\mathrm{II}) \qquad s^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

277. Problème II. — *Déterminer les valeurs de x et y qui rendent* minima *la somme des trois carrés*

$$(5) \quad S^2 = (ax + a'y + a'')^2 + (bx + b'y + b'')^2 + (cx + c'y + c'')^2.$$

et calculer ce minimum.

Dans l'identité (1) nous poserons

$$\begin{aligned} a_1 &= b'c - cb', & a_2 &= ax + a'y + a'', \\ b_1 &= ca' - ac', & b_2 &= bx + b'y + b'', \\ c_1 &= ab' - ba', & c_2 &= cx + c'y + c'', \end{aligned}$$

et nous conserverons les notations (4).

Nous aurons d'abord

$$(6) \quad \begin{aligned} & a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ & = (Aa + Bb + Cc)x + (Aa' + Bb' + Cc')y + Aa'' + Bb'' + Cc''. \end{aligned}$$

Or il est évident, par l'inspection de (4), que, dans le coefficient $Aa + Bb + Cc$ de x, les expressions A, B, C sont les déterminants mineurs des éléments de la première ligne du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix};$$

par suite le coefficient de x est égal à ce déterminant et s'annule. On verrait de même que le coefficient $Aa' + Bb' + Cc'$ de y se réduit aussi à zéro. Quant au troisième terme $Aa'' + Bb'' + Cc''$, il est facile de voir qu'il est égal au déterminant $(ab'c'')$.

Nous pouvons donc écrire

$$(7) \qquad Aa + Bb + Cc = 0, \quad Aa' + Bb' + Cc' = 0,$$

$$(8) \qquad Aa'' + Bb'' + Cc'' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta,$$

de sorte que l'égalité (6) revient à la suivante :

$$(9) \qquad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \Delta.$$

On trouve ensuite que

$$\begin{aligned} b_1 c_2 - c_1 b_2 &= B(cx + c'y + c'') - C(bx + b'y + b''), \\ c_1 a_2 - a_1 c_2 &= C(ax + a'y + a'') - A(cx + c'y + c''), \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 &= A(bx + b'y + b'') - B(ax + a'y + a''). \end{aligned}$$

Si nous substituons ces valeurs et celle donnée par (9) dans l'identité (1), elle deviendra

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2 + C^2)\, s^2 = \Delta^2 &+ [A(bx + b'y + b'') - B(ax + a'y + a'')]^2 \\ &+ [B(cx + c'y + c'') - C(bx + b'y + b'')]^2 \\ &+ [C(ax + b'x + a'') - A(cx + c'y + c'')]^2. \end{aligned}$$

Le second membre se compose de quatre carrés, dont le premier est constant et dont les trois derniers sont variables; par suite, il atteindra son *minimum*, si les trois carrés variables s'annulent; donc le *minimum* de s^2 est

$$(\text{III}) \qquad s^2 = \frac{\Delta}{A^2 + B^2 + C^2},$$

et les valeurs de x et y, qui fournissent ce *minimum*, sont données par les deux équations

$$(10)\qquad \frac{ax+a'y+a''}{A}=\frac{bx+b'y+b''}{B}=\frac{cx+c'y+c''}{C}.$$

278. On obtient de suite la valeur commune k de ces trois rapports, en multipliant les deux termes de ces fractions respectivement par A, B, C, et en ajoutant les numérateurs ainsi que les dénominateurs. On trouve de la sorte, en tenant compte des égalités (7) et (8), que

$$k=\frac{\Delta}{A^2+B^2+C^2}=s^2.$$

Nos égalités (10) nous fournissent ainsi les trois équations

$$(11)\qquad \begin{cases} ax+a'y+a''-As^2=0,\\ bx+b'y+b''-Bs^2=0,\\ cx+c'y+c''-Cs^2=0,\end{cases}$$

desquelles il sera facile de tirer les valeurs de x et y.

Pour avoir la valeur de x, nous multiplierons les équations (11) respectivement par $b'c''-c'b''$, $c'a''-a'c''$, $a'b''-b'a''$ et nous ajouterons : le coefficient de x, dans le résultat, sera (équation 8)

$$a(b'c''-c'b'')+b(c'a''-a'c'')+c(a'b''-b'a'')=\Delta;$$

celui de y deviendra nul, pendant que le terme connu se réduira au produit de $-s^2$ par

$$A(b'c''-c'b'')+B(c'a''+a'c'')+C(a'b''-b'a'')=\begin{vmatrix} A & a' & a''\\ B & b' & b''\\ C & c' & c''\end{vmatrix}=\Delta_1.$$

Nous avons par suite $\Delta x-s^2\Delta_1=\Delta x-\dfrac{\Delta\Delta_1}{A^2+B^2+C^2}=0$, d'où nous tirons

$$(\mathrm{IV})\qquad x=-\begin{vmatrix} A & a'' & a'\\ B & b'' & b'\\ C & c'' & c'\end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A & a & a'\\ A & b & b'\\ C & c & c'\end{vmatrix},$$

en observant que

$$A^2+B^2+C^2=A(bc'-cb')+B(ca'-ac)+C(ab'-ba')=\begin{vmatrix} A & a & a'\\ B & b & b'\\ C & c & c'\end{vmatrix};$$

On trouverait semblablement que

$$(V) \qquad y = -\begin{vmatrix} A & a & a'' \\ B & b & b'' \\ C & c & c'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & a & a' \\ B & b & b' \\ C & c & c' \end{vmatrix}.$$

279. Distance du point P (x', y', z') à la droite

$$(12) \qquad x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de cette droite; la distance PM = D des deux points P et M sera

$$D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

pour des axes rectangulaires; mais, le point M appartenant à la droite (12), on peut remplacer x et y par leurs valeurs (12), ce qui donne

$$D^2 = (az + p - x')^2 + (bz + q - y')^2 + (z - z')^2.$$

La valeur *minima* de D sera la distance demandée d.

Pour obtenir cette valeur, il nous suffira d'identifier cette expression avec celle (3) de S^2. Pour cela, dans (3), nous remplacerons x par z et nous poserons

$$c = 1, \quad a' = p - x', \quad b' = q - y', \quad c' = -z',$$

ce qui transformera les valeurs (4) dans les suivantes :

$$A = y' - bz' - q, \quad B = -x' + az' + p, \quad C = b(x' - p) - a(y' - q).$$

La distance d du point P à la droite (12) est donc, en vertu de la formule (II),

$$(VI) \qquad d^2 = \frac{(x' - az' - p)^2 + (y' - bz' - q)^2 + [b(x' - p) - a(y' - q)]^2}{a^2 + b^2 + 1},$$

et le z de l'extrémité de cette longueur sera, eu égard à (I),

$$(VII) \qquad z = \frac{ax' + by' + z' - (ap + bq)}{a^2 + b^2 + 1}.$$

280. Distance du point P (x', y', z') au plan

$$(13) \qquad ax + by + cz + d = 0.$$

Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M du plan (13); la distance PM = D des deux points P et M sera donnée par la formule

$$D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

pour des coordonnées orthogonales. Mais, le point M appartenant au plan (13), on pourra remplacer z par sa valeur en fonction de x et y, que fournit l'équation (13) et qui est

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c} = mx + ny + p,$$

en posant

$$m = -\frac{a}{c}, \quad n = -\frac{b}{c}, \quad p = -\frac{d}{c}.$$

Il vient ainsi

$$D^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (mx + ny + p - z')^2.$$

La valeur *minima* de D sera la distance cherchée d.

Pour obtenir cette valeur nous n'avons qu'à identifier cette expression avec celle (5) de S^2, en posant

$$\begin{array}{lll} a = 1, & b = 0, & c = m, \\ a' = 0, & b' = 1, & c' = n, \\ a'' = -x' & b'' = -y', & c'' = -z' + p. \end{array}$$

Ces hypothèses changent les valeurs (4) dans les suivantes :

$$A = -m, \quad B = -n, \quad C = 1,$$

de sorte que

$$A^2 + B^2 + C^2 = m^2 + n^2 + 1 = \frac{1}{c^2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

pendant que le déterminant (8) ou Δ devient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ -x' & -y' & -z'+p \end{vmatrix} = mx' + ny' + p - z' = -\frac{1}{c}(ax' + by' + cz' + d).$$

La distance d du point P au plan (13) est donc, en vertu de la formule (III),

$$\text{(VI)} \qquad d = \frac{ax' + by' + cz' + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Les x et y de l'extrémité de cette longueur sont fournies par les formules (IV) et (V).

285. Plus courte distance des deux droites

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{x-p}{a} = \dfrac{y-q}{b} = \dfrac{z-r}{c} = u, \\ \dfrac{x-p'}{a'} = \dfrac{y-q'}{b'} = \dfrac{z-r'}{c'} = u'. \end{cases}$$

La distance D du point M (x, y, z) de la première droite au point M' (x', y', z') de la seconde est donnée par la formule

$$D^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Remplaçons ces coordonnées par leurs valeurs, tirées de (14) en fonction de u et u',

$$x = au + p, \quad y = bu + q, \quad z = cu + r,$$
$$x' = a'u' + p', \quad y' = b'u' + q', \quad z' = c'u' + r';$$

nous aurons

$$D^2 = (au - a'u' + p - p')^2 + (bu - b'u' + q - q')^2 + (cu - c'u' + r - r')^2.$$

Pour que cette expression soit identique avec (5), il nous suffira de remplacer dans cette dernière x et y par u et u', a', b', c' par $-a'$, $-b'$, $-c'$ et de poser en outre

$$a'' = p - p', \quad b'' = q - q', \quad c'' = r - r'.$$

Nous aurons ainsi

$$A = -(bc' - cb'), \quad B = -(ca' - ac'), \quad C = -(ab' - ba')$$

et

$$\Delta = (p-p')(bc'-cb') + (q-q^2)(ca'-ac') + (r-r')(ab'-ba').$$

La plus courte distance des deux droites (14) sera donc

$$(\text{VII})\quad d^2 = \frac{[(bc'-cb')(p-p') + (ca'-ac')(q-q') + (ab'-ba')(r-r')]^2}{(bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2 + (ab'-ba')^2}.$$

CHAPITRE IV.

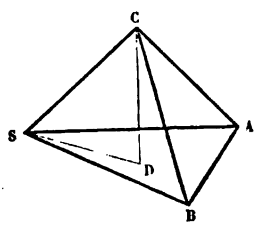
LE TÉTRAÈDRE.

§ I. Propriétés du tétraèdre. — § II. Expressions diverses du volume du tétraèdre. — § III. Expressions diverses du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre. — § IV. Rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre. — § V. Tétraèdre circonscriptible par les arêtes. — § VI. Tétraèdre équifacial. — § VII. Tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires.

§ I. — Propriétés du tétraèdre.

282. Notations. — Considérons le tétraèdre SABC (*fig.* 10). Nous représenterons par a, b, c les trois arêtes SA, SB, SC issues du sommet S et par λ, μ, ν les inclinaisons mutuelles BSC, CSA, ASB de ces arêtes. En outre, nous désignerons par

Fig. 10.



λ', μ', ν' les inclinaisons des mêmes arêtes a, b, c sur les faces opposées SBC, SCA, SAB du tétraèdre, et par a', b', c' les trois autres arêtes BC, CA, AB respectivement opposées aux premières. Nous indiquerons d'ailleurs par α, β, γ les angles que forment entre elles les arêtes opposées a et a', b et b', c et c' et par S, A, B, C les faces triangulaires ABC,

SBC, SCA, SAB du tétraèdre, qui sont respectivement opposées aux sommets qui portent les mêmes lettres.

Si nous récapitulons ces notations, nous voyons que

l'arête SA $= a$,	SB $= b$,	SC $= c$;
l'arête BC $= a'$,	CA $= b'$,	AB $= c'$;
l'angle plan BSC $= \lambda$,	l'angle CSA $= \mu$,	l'angle ASB $= \nu$;
l'angle (SA, SBC) $= \lambda'$,	l'angle (SB, SCA) $= \mu'$,	l'angle (SC, SAB) $= \nu'$;
l'angle (SA, BC) $= \alpha$,	l'angle (SB, CA) $= \beta$,	l'angle (SC, AB) $= \gamma$;
la face ABC $=$ S,	la face SBC $=$ A,	SCA $=$ B, SAC $=$ C.

Nous aurons toujours soin de désigner chaque angle dièdre du tétraèdre par la lettre qui représente l'arête d'intersection des deux faces du dièdre.

283. Théorème I. — *Dans tout tétraèdre, le double produit de deux arêtes opposées par le cosinus de leur inclinaison mutuelle est égal à la somme des carrés de deux arêtes opposées, diminuée de la somme des carrés des arêtes opposées restantes* (¹).

Projetons la ligne brisée CSAB (*fig.* 10) sur l'arête CB, nous obtenons l'égalité

$$\mathrm{CS}\cos\mathrm{SCB} + \mathrm{SA}\cos\alpha + \mathrm{AB}\cos\mathrm{ABC} = \mathrm{BC},$$

ou

$$c\cos\mathrm{SCB} + a\cos\alpha + c'\cos\mathrm{ABC} = a',$$

nous en tirons

$$a\cos\alpha = a' - c\cos\mathrm{SCB} - c'\cos\mathrm{ABC},$$

et, en multipliant par $2a'$,

$$(1)\qquad 2aa'\cos\alpha = 2a'^2 - 2ca'\cos\mathrm{SCB} - 2c'a'\cos\mathrm{ABC}.$$

Mais les deux triangles SBC, ABC donnent

$$b^2 = c^2 + a'^2 - 2c\,a'\cos\mathrm{SCB},$$
$$b'^2 = c'^2 + a'^2 - 2c'a'\cos\mathrm{ABC}$$

(¹) Dostor, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1867, t. VI, p. 452 — *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 138.

et, par suite,

$$a'^2 - 2c\,a' \cos SCB = b^2 - c^2,$$
$$a'^2 - 2c'a' \cos ABC = b'^2 - c'^2.$$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (1) et concluant par analogie, on obtient les trois relations

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} 2aa' \cos\alpha = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2, \\ 2bb' \cos\beta = c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2, \\ 2cc' \cos\gamma = a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2. \end{cases}$$

284. Corollaire. — Ajoutons ces trois égalités membres à membres, nous en déduisons la relation

$$(\mathrm{II}) \qquad aa' \cos\alpha + bb' \cos\beta + cc' \cos\gamma = 0,$$

qui prouve que *des trois angles α, β, γ l'un au moins est aigu et l'un au moins est obtus, et que, si deux de ces angles sont droits, le troisième l'est aussi.*

285. Théorème II. — *Dans tout tétraèdre, la projection d'une arête sur l'arête opposée est égale à la différence des projections de deux arêtes, adjacentes d'un même côté à la première arête, sur la même arête opposée.*

Dans la relation

$$2aa' \cos\alpha = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2,$$

remplaçons b'^2 et c'^2 par les valeurs

$$b'^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos\mu \quad \text{et} \quad c'^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\nu,$$

que fournissent les deux triangles SCA et SAB; elle devient

$$2aa' \cos\alpha = 2ab \cos\nu - 2ca \cos\mu.$$

On en tire, en divisant par $2a$, puis par analogie,

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} a' \cos\alpha = b \cos\nu - c \cos\mu, \\ b' \cos\beta = c \cos\lambda - a \cos\nu, \\ c' \cos\gamma = a \cos\mu - b \cos\lambda. \end{cases}$$

286. Corollaire. — Multiplions ces trois égalités respectivement par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ et ajoutons les équations résultantes; nous obtenons la relation remarquable

$$(\mathrm{IV}) \qquad a' \cos\alpha \cos\lambda + b' \cos\beta \cos\mu + c' \cos\gamma \cos\nu = 0.$$

287. Théorème III. — *Dans tout tétraèdre, chaque face est égale à la somme des produits qu'on obtient, en multipliant chacune des trois autres faces par le cosinus de son inclinaison sur la première face.*

En effet, chaque face est égale à la somme des projections sur elle des trois autres faces; or les projections des trois faces A, B, C sur la face S sont respectivement

$$A\cos a', \quad B\cos b', \quad C\cos c';$$

on a donc

$$S = A\cos a' + B\cos b' + C\cos c'.$$

288. Relation entre les six angles dièdres d'un tétraèdre. — D'après le théorème précédent, nous avons

$$(2)\quad \begin{cases} -S + A\cos a' + B\cos b' + C\cos c' = 0, \\ S\cos a' - A + B\cos c + C\cos b = 0, \\ S\cos b' + A\cos c - B + C\cos a = 0, \\ S\cos c' + A\cos b + B\cos a - C = 0. \end{cases}$$

Éliminant les trois faces A, B, C entre ces quatre équations, nous obtenons la relation cherchée

$$(V)\quad \begin{vmatrix} -1 & \cos a' & \cos b' & \cos c' \\ \cos a' & -1 & \cos c & \cos b \\ \cos b' & \cos c & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

dont le développement est

$$(VI)\quad \begin{cases} \sin^2 a\cos^2 a' + 2(\cos b\cos c - \cos a)\cos b'\cos c' \\ + \sin^2 b\cos^2 b' + 2(\cos c\cos a + \cos b)\cos c'\cos a' \\ + \sin^2 c\cos^2 c' + 2(\cos a\cos b + \cos c)\cos a'\cos b' \\ = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c - 2\cos a\cos b\cos c. \end{cases}$$

289. Théorème IV. — *Dans tout tétraèdre, le carré de chaque face est égal à la somme des carrés des trois autres faces, diminuée de la somme des doubles produits qu'on obtient en multipliant deux quelconques de ces faces par le cosinus du dièdre compris.*

Les quatre équations (2) peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} S \quad - A\cos a' - B\cos b' - C\cos c' &= 0, \\ A - B\cos c - C\cos b - S\cos a' - 0.\cos b' - 0.\cos c' &= 0, \\ B - C\cos a - A\cos c - 0.\cos a' - S\cos b' - 0.\cos c' &= 0, \\ C - A\cos b - B\cos a - 0.\cos a' - 0.\cos b' - S\cos c' &= 0; \end{aligned}$$

si nous éliminons les trois quantités $-\cos a'$, $-\cos b'$, $-\cos c'$ entre ces quatre équations, nous obtenons la relation

$$\text{(VII)} \qquad \begin{vmatrix} S & A & B & C \\ A - B\cos c - C\cos b & S & o & o \\ B - C\cos a - A\cos c & o & S & o \\ C - A\cos b - B\cos a & o & o & S \end{vmatrix} = o,$$

qui, étant développée, revient à

$$\text{(VIII)} \qquad S^2 = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC\cos a - 2CA\cos b - 2AB\cos c.$$

290. Théorème V. — *Dans tout tétraèdre, les faces sont entre elles comme les sinus des suppléments des trièdres opposés* [1].

Dans les équations fondamentales (2) nous pouvons considérer comme inconnus le dièdre a' et les deux faces non adjacentes B et C. Pour éliminer ces quantités entre les quatre équations (2), nous mettrons celles-ci sous la forme

$$\begin{aligned} S + o + A(-\cos a') + \cos b'(-B) + \cos c'(-C) &= o, \\ o + A + S(-\cos a') + \cos c\,(-B) + \cos b\,(-C) &= o, \\ -S\cos b' - A\cos c + o(-\cos a') - (-B) + \cos a\,(-C) &= o, \\ -S\cos c' - A\cos b + o(-\cos a') + \cos a\,(-B) - (-C) &= o. \end{aligned}$$

Comme elles sont compatibles, le déterminant par rapport aux trois inconnues $-\cos a'$, $-B$, $-C$ est nul. Nous obtenons ainsi la relation

$$\begin{vmatrix} S + o & A & \cos b' & \cos c' \\ o + A & S & \cos c & \cos b \\ -S\cos b' - A\cos c & o & -1 & \cos a \\ -S\cos c' - A\cos b & o & \cos a & -1 \end{vmatrix} = o,$$

qui, par la décomposition du premier membre en deux déterminants, peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} S & A & \cos b' & \cos c' \\ o & S & \cos c & \cos b \\ -S\cos b' & o & -1 & \cos a \\ -S\cos c' & o & \cos a & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & A & \cos b' & \cos c' \\ A & S & \cos c & \cos b \\ -A\cos c & o & -1 & \cos a \\ -A\cos b & o & \cos a & -1 \end{vmatrix} = o.$$

Dans chacun de ces deux déterminants, nous pouvons intervertir les

[1] Doston, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 141.

deux premières colonnes, après avoir divisé la première colonne de l'un par S et de l'autre par A; il nous vient, en intervertissant aussi les deux premières lignes dans le premier déterminant résultant

$$-S\begin{vmatrix} S & 0 & \cos c & \cos b \\ A & -1 & \cos b' & \cos c' \\ 0 & \cos b' & -1 & \cos a \\ 0 & \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + A\begin{vmatrix} A & 0 & \cos b' & \cos c' \\ S & -1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \cos c & -1 & \cos a \\ 0 & \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons suivant les éléments de la première colonne chacun de ces deux déterminants que nous représenterons par Δ_S, Δ_A; nous aurons

$$-S\Delta_S = -S^2\begin{vmatrix} -1 & \cos b' & \cos c' \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + S.A\begin{vmatrix} 0 & \cos c & \cos b \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix},$$

$$A\Delta_A = A^2\begin{vmatrix} -1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & -1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} - S.A\begin{vmatrix} 0 & \cos b' & \cos c' \\ \cos c & -1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix}.$$

Or le facteur de $-S.A$ ne diffère de celui de $+S.A$ que par le changement des lignes en colonnes et des colonnes en lignes; par suite ils sont égaux. On a donc l'égalité

$$-S^2\begin{vmatrix} -1 & \cos b' & \cos c' \\ \cos b' & -1 & \cos a \\ \cos c' & \cos a & -1 \end{vmatrix} + A^2\begin{vmatrix} -1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & -1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais le coefficient de S^2 est le carré du sinus du supplément du trièdre en A (236), sinus que nous pouvons représenter par $\sin(A')$; de même le coefficient de $-A^2$ est le carré du supplément du trièdre en S; par suite il vient

$$S^2\sin^2(A') - A^2\sin^2(S') = 0;$$

donc on a

$$\text{IX)} \qquad \frac{S}{\sin(S')} = \frac{A}{\sin(A')} = \frac{B}{\sin(B')} = \frac{C}{\sin(C')}.$$

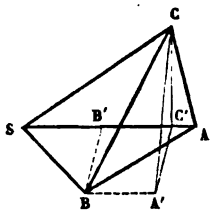
291. Somme des carrés des quatre faces en valeur des produits des arêtes opposées et des sinus des angles compris entre ces arêtes [1]. — Par le sommet C (*fig.* 11) menons le plan CC'A' perpen-

---

[1] Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 143.

diculaire à l'arête SA ; par le sommet B tirons les droites BB', BA', l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à la même arête SA ; puis menons la droite CA' qui sera perpendiculaire à BA'.

Fig. 11.



Dans le triangle A'CC' nous avons

$$A'C^2 = CC'^2 + A'C'^2 - 2CC'.A'C'.\cos CC'A';$$

or

$$\begin{aligned} A'C &= BC \sin CBA' = a' \sin\alpha, \\ CC' &= CS \sin CSC' = c \sin\mu, \\ A'C' &= BB' = BS \sin BSA = b \sin\nu, \\ \cos CC'A' &= \cos a; \end{aligned}$$

par suite nous obtenons

$$a'^2 \sin^2\alpha = c^2 \sin^2\mu + b^2 \sin^2\nu - 2c \sin\mu . b \sin\nu . \cos a,$$

et, en multipliant par a^2,

$$a^2 a'^2 \sin^2\alpha = c^2 a^2 \sin^2\mu + a^2 b^2 \sin^2\nu - 2ca \sin\mu . ab \sin\nu . \cos a.$$

Mais

$$ca \sin\mu = 2B, \quad ab \sin\nu = 2C;$$

donc il vient

$$\text{(X)} \qquad a^2 a'^2 \sin^2\alpha = 4B^2 + 4C^2 - 8BC \cos a.$$

Nous aurions de même

$$\text{(XI)} \qquad a^2 a'^2 \sin^2\alpha = 4A^2 + 4S^2 - 8AS \cos a'.$$

Nous trouvons ainsi les valeurs des dièdres a et a',

$$\text{(XII)} \qquad \begin{cases} \cos a = \dfrac{4B^2 + 4C^2 - a^2 a'^2 \sin^2\alpha}{8BC}, \\ \cos a' = \dfrac{4A^2 + 4S^2 - a^2 a'^2 \sin^2\alpha}{8AS}. \end{cases}$$

Ajoutons les trois égalités

$$4B^2 + 4C^2 - 8BC\cos a = a^2 a'^2 \sin^2\alpha,$$
$$4C^2 + 4A^2 - 8CA\cos b = b^2 b'^2 \sin^2\beta,$$
$$4A^2 + 4B^2 - 8AB\cos c = c^2 c'^2 \sin^2\gamma$$

membres à membres et avec l'égalité (VIII du n° 289)

$$4S^2 = 4A^2 + 4B^2 + 4C^2 - 8BC\cos a - 8CA\cos b - 8AB\cos c,$$

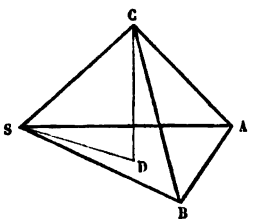
nous obtenons la relation remarquable

(XIII) $4(A^2 + B^2 + C^2 + S^2) = a^2 a'^2 \sin^2\alpha + b^2 b'^2 \sin^2\beta + c^2 c'^2 \sin^2\gamma.$

§ II. — Expressions diverses du volume du tétraèdre.

292. Volume du tétraèdre en valeur de trois arêtes contiguës, de l'angle de deux de ces arêtes et de l'inclinaison de la troisième arête sur le plan des deux premières. — Du sommet C (*fig.* 12) abaissons sur le plan de la face opposée

Fig. 12.



SAB la perpendiculaire CD. Le volume du tétraèdre sera

$$V = \tfrac{1}{3}SAB.CD.$$

Or la surface du triangle SAB est égale à

$$\tfrac{1}{2}SA.SB.\sin ASB = \tfrac{1}{2}ab\sin\nu,$$

et par le triangle rectangle SCD on a la hauteur

$$CD = SC\sin CSD = c\sin\nu';$$

il vient donc, en substituant,

$$\text{(I)} \qquad V = \tfrac{1}{6} abc \sin\nu \sin\nu'.$$

En désignant par Δ le sinus du trièdre en S, nous avons trouvé (233) que

$$\sin\nu \sin\nu' = \Delta = \sqrt{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu};$$

par conséquent nous avons

$$\text{(II)} \begin{cases} V = \tfrac{1}{6} abc.\Delta \\ \quad = \tfrac{1}{6} abc\sqrt{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}. \end{cases}$$

Ainsi, *le volume du tétraèdre est égal au sixième du produit de trois arêtes contiguës, multiplié par le sinus du trièdre formé par ces trois arêtes.*

293. Expression en déterminant du volume du tétraèdre en valeur de trois arêtes contiguës a, b, c et des inclinaisons mutuelles λ, μ, ν de ces arêtes. — Dans l'égalité $36V^2 = a^2b^2c^2\Delta^2$, remplaçons Δ^2 par son expression (VI) en déterminant du n° 232; nous avons

$$36V^2 = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplions respectivement par a, b, c d'abord les trois lignes, puis les trois colonnes; le déterminant sera multiplié par le produit $a.b.c \times a.b.c = a^2b^2c^2$; par suite, si nous divisons hors barres par $a^2b^2c^2$, la valeur du second membre de l'égalité précédente ne sera pas altérée, et il viendra encore

$$\text{(III)} \qquad 36V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix}.$$

294. Expression développée du volume du tétraèdre en valeur des six arêtes a et a', b et b', c et c', opposées deux à deux. — Dans le déterminant précédent (III) multiplions les trois lignes par 2, puis mettons-y les valeurs

$$\text{(1)} \begin{cases} 2bc\cos\lambda = b^2 + c^2 - a'^2, \\ 2ca\cos\mu = c^2 + a^2 - b'^2, \\ 2ab\cos\nu = a^2 + b^2 - c'^2, \end{cases}$$

que fournissent les trois triangles SBC, SCA, SAB; ce déterminant devient

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & c^2+a^2-b'^2 \\ a^2+b^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ c^2+a^2-b'^2 & b^2+c^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Si nous développons le second membre par la règle de Sarrus (52), nous obtenons

$$\begin{aligned} 288\,V^2 = {} & 8a^2b^2c^2 + 2(b^2+c^2-a'^2)(c^2+a^2-b'^2)(a^2+b^2-c'^2) \\ & - 2a^2(b^2+c^2-a'^2) - 2b^2(c^2+a^2-b'^2) - 2c^2(a^2+b^2-c'^2), \end{aligned}$$

et, en effectuant,

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} 144\,V^2 = {} & a^2a'^2(b^2+b'^2+c^2+c'^2-a^2-a'^2) \\ & + b^2b'^2(c^2+c'^2+a^2+a'^2-b^2-b'^2) \\ & + c^2c'^2(a^2+a'^2+b^2+b'^2-c^2-c'^2) \\ & - a^2b^2c^2 - a^2b'^2c'^2 - b^2c'^2a'^2 - c^2a'^2b'^2. \end{aligned} \right.$$

295. Expression en déterminant du volume du tétraèdre en valeur des six arêtes a et a', b et b', c et c', opposées deux à deux. — Dans le déterminant (III) changeons les signes des trois lignes, puis remplaçons le déterminant résultant par un déterminant équivalent du cinquième ordre; nous pouvons écrire

$$288\,V^2 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ b^2 & 0 & -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ c^2 & 0 & -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & a^2 & -2a^2 & -2ab\cos\nu & -2ca\cos\mu \\ 0 & b^2 & -2ab\cos\nu & -2b^2 & -2bc\cos\lambda \\ 0 & c^2 & -2ca\cos\mu & -2bc\cos\lambda & -2c^2 \end{vmatrix}.$$

Dans le premier déterminant on a interverti l'ordre des deux premières colonnes.

Si, dans ce dernier déterminant, nous substituons les valeurs (1), nous

obtiendrons

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & a^2 & -2a^2 & c'^2-a^2-b^2 & b'^2-c^2-a^2 \\ 0 & b^2 & c'^2-a^2-b^2 & -2b^2 & a'^2-b^2-c^2 \\ 0 & c^2 & b'^2-c^2-a^2 & a'^2-b^2-c^2 & -2c^2 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons d'abord la seconde ligne à chacune des trois suivantes, il vient

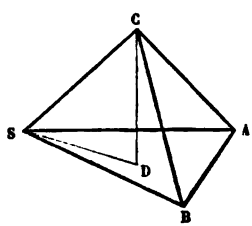
$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & -a^2 & c'^2-a^2 & b'^2-a^2 \\ 1 & b^2 & c'^2-b^2 & -b^2 & a'^2-b^2 \\ 1 & c^2 & b'^2-c^2 & a'^2-c^2 & -c^2 \end{vmatrix}.$$

Si actuellement nous ajoutons la seconde colonne à chacune des trois suivantes, nous trouverons l'expression demandée

$$(V) \qquad 288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

296. Surface de la base d'un tétraèdre en valeur des trois arêtes latérales et de leurs inclinaisons mutuelles. — Les trois côtés de la face ABC (*fig.* 14) étant $BC = a'$, $CA = b'$, $AB = c'$,

Fig. 13.



la surface S de ce triangle est donnée par la formule (204)

$$16\,S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -c'^2 & -b'^2 \\ 1 & -c'^2 & 0 & -a'^2 \\ 1 & -b'^2 & -a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

où le second déterminant a été déduit du premier, en y multipliant par -1 d'abord la première ligne, puis les trois dernières colonnes résultantes.

Dans le dernier déterminant, remplaçons a'^2, b'^2, c'^2 par leurs valeurs tirées des égalités (1) du n° 294; nous aurons

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2ab\cos\nu - a^2 - b^2 & 2ca\cos\mu - c^2 - a^2 \\ 1 & 2ab\cos\nu - a^2 - b^2 & 0 & 2bc\cos\lambda - b^2 - c^2 \\ 1 & 2ca\cos\mu - c^2 - a^2 & 2bc\cos\lambda - b^2 - c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplions la première ligne successivement par a^2, b^2, c^2, et ajoutons les résultats respectivement aux trois autres lignes; il nous vient

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & 2ab\cos\nu - b^2 & 2ca\cos\mu - c^2 \\ 1 & 2ab\cos\nu - a^2 & b^2 & 2bc\cos\lambda - c^2 \\ 1 & 2ca\cos\mu - a^2 & 2bc\cos\lambda - b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions maintenant la première colonne successivement par a^2, b^2, c^2 et ajoutons le résultat aux trois dernières colonnes; nous trouvons que

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a^2 & 2ab\cos\nu & 2ca\cos\mu \\ 1 & 2ab\cos\nu & 2b^2 & 2bc\cos\nu \\ 1 & 2ca\cos\mu & 2bc\cos\lambda & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Multiplions enfin par 2 la première ligne, puis divisons par 2 les trois dernières lignes résultantes; le déterminant sera divisé par $2^3 : 2 = 4$. Nous obtenons ainsi l'expression demandée

$$\text{(VI)} \qquad 4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ 1 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ 1 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix},$$

dont le développement est

$$\begin{aligned} 4S^2 = {} & b^2c^2\sin^2\lambda + 2a^2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ & + c^2a^2\sin^2\mu + 2b^2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ & + a^2b^2\sin^2\nu + 2c^2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{aligned}$$

Nous avons donné cette expression (VI) dans les *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 153.

297. Surface du triangle déterminé par l'intersection d'un plan

$$(2) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

avec les trois plans de coordonnées. — Prenons le sommet S pour origine des coordonnées et les trois arêtes latérales SA, SB, SC pour axes des x, y, z; nous aurons

$$(3) \qquad a = SA = -\frac{D}{A}, \quad b = SB = -\frac{D}{B}, \quad c = SC = -\frac{D}{C}.$$

Cela étant, dans le déterminant (VI), divisons d'abord les trois dernières lignes, puis les trois dernières colonnes respectivement par a, b, c; nous aurons divisé le déterminant (VI) par le produit $a^2b^2c^2$, de sorte qu'il nous viendra

$$4S^2 = -a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{1}{b} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{1}{c} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Si nous multiplions la première ligne et la première colonne par $-D$, que nous divisions hors barres par D^2, et que dans le résultat nous remplacions $-\frac{D}{a}$, $-\frac{D}{b}$, $-\frac{D}{c}$ par leurs équivalents A, B, C tirés de (3), nous trouverons l'expression

$$(\text{VII}) \qquad 4S^2 = -\frac{D^4}{A^2B^2C^2} \begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

pour le *quadruple carré de la surface du triangle que déterminent les trois plans de coordonnées sur le plan* (2).

297 *bis*. Expression en déterminant de la surface du triangle, en valeur des coordonnées dans l'espace de ses trois sommets (¹). — 1° Supposons d'abord que le sommet A du triangle ABC soit situé à l'origine des coordonnées et soient

(¹) Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVIII, p. 8[illegible]

x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées des deux autres sommets B et C. Si nous désignons par S la surface du triangle, et par b et c les côtés AC et AB qui sont opposés aux sommets B et C, il nous viendra de suite

$$4S^2 = b^2c^2 \sin^2 A = b^2c^2 - b^2c^2 \cos^2 A,$$

ou

$$(4) \qquad 4S^2 = \begin{vmatrix} c^2 & bc\cos A \\ bc\cos A & b^2 \end{vmatrix}.$$

Représentons par α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 les inclinaisons des deux côtés AB et AC sur les axes de coordonnées, supposés rectangulaires, nous aurons

$$x_1 = c\cos\alpha_1, \quad y_1 = c\cos\beta_1, \quad z_1 = c\cos\gamma_1,$$
$$x_2 = b\cos\alpha_2, \quad y_2 = b\cos\beta_2, \quad z_2 = b\cos\gamma_2;$$

et, comme

$$\cos A = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

il vient, en multipliant par bc, puis en substituant,

$$bc\cos A = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

On sait d'ailleurs que

$$c^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad b^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2;$$

donc on obtient, en mettant ces valeurs dans l'égalité (4),

$$(5) \qquad 4S^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix}.$$

Il n'est pas inutile de remarquer (112) que ce déterminant est la somme des carrés des trois déterminants qui sont compris dans le déterminant multiple

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|,$$

et qui expriment les doubles projections de la surface du triangle ABC sur les trois plans de coordonnées.

2° Transportons actuellement l'origine des coordonnées en

un point quelconque de l'espace dont les coordonnées sont $-x$, $-y$, $-z$; et soient x', y', z'; x'', y'', z'' les nouvelles coordonnées des deux sommets B et C; les coordonnées du point A par rapport à la nouvelle origine sont x, y, z.

Cela fait, nous avons

$$x_1 = x' - x, \quad y_1 = y' - y, \quad z_1 = z' - z,$$
$$x_2 = x'' - x, \quad y_2 = y'' - y, \quad z_2 = z'' - z;$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + (x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2(xx' + yy' + \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + (x''^2 + y''^2 + z''^2) - 2(xx'' + yy'' + \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 &= (x' - x)(x'' - x) + (y' - y)(y'' - y) + (z' - z)(z'' \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + (x'x'' + y'y'' + z'z'') \\ &\quad - (xx'' + yy'' + zz'') - (xx' + yy' + zz'). \end{aligned}$$

Si nous posons

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= l, & x'x'' + y'y'' + z'z'' &= p, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= m, & x''x + y''y + z''z &= q, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= n, & xx' + yy' + zz' &= r, \end{aligned} \right.$$

nous aurons

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= l + m - 2r, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= l + n - 2q, \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 &= l + p - q - r. \end{aligned}$$

La substitution de ces valeurs dans la formule (5) nous donne

$$4S^2 = \begin{vmatrix} l + m - 2r & l + p - q - r \\ l + p - q - r & l + n - 2q \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & r & q \\ 0 & l + m - 2r & l + p - q - r \\ 0 & l + p - q - r & l + n - 2q \end{vmatrix},$$

ou, en ajoutant la première ligne aux deux suivantes :

$$4S^2 = \begin{vmatrix} 1 & r & q \\ 1 & l+m-r & l+p-r \\ 1 & l+p-q & l+n-q \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & 1 & r & q \\ r & 1 & l+m-r & l+p-r \\ q & 1 & l+p-q & l+n-q \end{vmatrix}.$$

Dans ce dernier déterminant, multiplions la seconde colonne par $-l$, puis ajoutons la somme des deux premières colonnes à chacune des deux suivantes; il nous vient

$$4S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ l & 1 & r & q \\ r & 1 & m & p \\ q & 1 & p & n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & l & r & q \\ 1 & r & m & p \\ 1 & q & p & n \end{vmatrix}.$$

Si nous remplaçons ici l, m, n et p, q, r par leurs expressions (6), nous obtiendrons enfin pour $4S^2$ la valeur cherchée

$$\text{(II)} \quad 4S^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+y^2+z^2 & xx'+yy'+zz' & xx''+yy''+zz'' \\ 1 & xx'+yy'+zz' & x'^2+y'^2+z'^2 & x'x''+y'y''+z'z'' \\ 1 & xx''+yy''+zz'' & x'x''+y'y''+z'z'' & x''^2+y''^2+z''^2 \end{vmatrix}.$$

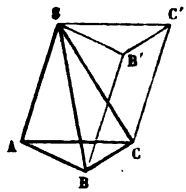
Il est facile de vérifier que ce déterminant est le produit (111) des deux déterminants multiples

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & x' & y' & z' \\ 0 & 1 & x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|, \quad \Delta = - \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & y & z \\ 1 & 0 & x' & y' & z' \\ 1 & 0 & x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|.$$

298. Volume du tétraèdre en valeur de deux arêtes opposées et de leur plus courte distance. — Par les extrémités B et C de l'arête BC, menons les droites BB', CC' parallèles et égales à l'arête opposée SA;

tirons les droites SB', SC' et B'C' (*fig.* 15). Nous formons ainsi le prisme triangulaire SABCC'B'.

Fig. 14.



La distance de l'arête SA au plan BCC'B' sera égale à la plus courte distance d des deux arêtes opposées SA et BC.

Nous avons le tétraèdre SABC $= \frac{1}{3}$SABCC'B'; or le prisme triangulaire SABCC'B' est la moitié du parallélépipède qui a BCC'B' pour base et d pour hauteur; et, comme le parallélogramme

$$\text{BCC'B'} = \text{BB'.BC.}\sin\text{B'BC} = aa'\sin\alpha,$$

on a

$$\text{vol. SABCC'B'} = \tfrac{1}{2}aa'\sin\alpha.d;$$

donc

$$\text{(IX)} \qquad \text{vol. SABC} \quad \text{ou} \quad V = \tfrac{1}{6}d.aa'\sin\alpha.$$

Ainsi *le volume d'un tétraèdre s'obtient aussi en multipliant le demi-produit de deux arêtes opposées par le sinus de l'angle compris et par le tiers de la plus courte distance de ces mêmes arêtes.*

299. Relation entre les plus courtes distances d, d', d'' des arêtes opposées a et a', b et b', c et c' et les angles α, β, γ compris entre ces arêtes. — La formule (IX) nous donne

$$daa'\sin\alpha = d'bb'\sin\beta = d''cc'\sin\gamma;$$

divisant par ces trois quantités égales les trois termes respectifs de l'égalité (II) du n° **284**

$$aa'\cos\alpha + bb'\cos\beta + cc'\cos\gamma = 0,$$

nous obtenons la relation

$$\text{(X)} \qquad \frac{\cot\alpha}{d} + \frac{\cot\beta}{d'} + \frac{\cot\gamma}{d''} = 0.$$

300. Dans la formule (IX) mettons à la place de $aa'\sin\alpha$ sa valeur

tirée de la première des relations (I) du n° 283 ; elle devient, par l'élévation au carré,

$$144V^2 = d^2[4a^2a'^2 - (b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2)^2],$$

et donne

$$\text{(XI)} \quad V = \frac{d}{12}\sqrt{(2aa' + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2)(2aa' + c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2)}.$$

301. Volume du tétraèdre en valeur de trois faces et du sinus du supplément du trièdre compris. — L'expression (II) du n° 292 peut s'écrire

$$V^2 = \tfrac{1}{36}a^2b^2c^2\Delta^2 = \tfrac{1}{36}.bc\sin\lambda.ca\sin\mu.ab\sin\nu.\frac{\Delta^2}{\sin\lambda\sin\mu\sin\nu};$$

or on sait que

$$bc\sin\lambda = 2A, \quad ca\sin\mu = 2B, \quad ab\sin\nu = 2C;$$

d'ailleurs, en vertu de la formule (7) du n° 240, on a

$$\frac{\Delta^2}{\sin\lambda\sin\mu\sin\nu} = \Delta';$$

donc il vient

$$\text{(XII)} \qquad V^2 = \tfrac{2}{9}A.B.C.\Delta'.$$

Donc *le carré du volume du tétraèdre est egal aux* $\frac{2}{9}$ *du produit de trois faces multiplié par le sinus du supplément du trièdre compris.*

302. Volume du tétraèdre en valeur de deux faces et du dièdre compris. — Dans la *fig.* 12 (p. 255), menons SDE perpendiculaire sur l'arête AB et tirons CE. Nous avons

$$V = \tfrac{1}{3}SAB.CD = \tfrac{1}{3}SAB.CE\sin c' = \tfrac{1}{3}SAB.\frac{AB.CE}{AB}\sin c';$$

or le produit AB.CE est égal à la double face ABC que nous avons représentée par 2S, de même que la face SAB a été désignée par C ; il vient par conséquent

$$\text{(XIII)} \qquad V = \tfrac{2}{3}S.C.\frac{\sin c'}{c'} = \tfrac{1}{3}S.C.\sin c' : \frac{c'}{2}.$$

Ainsi *le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de deux faces, multiplié par le sinus du dièdre compris et divisé par la moitié de l'arête de ce dièdre* (G. Dostor, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1867, t. VI, p. 413).

303. Rapport des produits des arêtes opposées. — La formule précédente donne

$$\frac{3Vc'}{2} = S.C.\sin c',$$

et de même

$$\frac{3Vc}{2} = A.B.\sin c;$$

on en tire, en multipliant,

$$\frac{9V^2cc'}{4} = S.A.B.C\sin c\sin c'.$$

Or nous avons vu au n° 300 que

$$V^2 = \tfrac{2}{9}A.B.C.\Delta';$$

par conséquent on a la face

$$S = \frac{\Delta'}{2}\cdot\frac{cc'}{\sin c\sin c'}.$$

On en déduit

$$\text{(XIV)}\qquad \frac{2S}{\Delta'} = \frac{aa'}{\sin a\sin a'} = \frac{bb'}{\sin b\sin b'} = \frac{cc'}{\sin c\sin c'}.$$

Donc, *dans tout tétraèdre les produits des arêtes opposées sont entre eux comme les produits des sinus des dièdres qui émergent de ces arêtes.*

304. Volume du tétraèdre en valeur d'une face et de ses inclinaisons sur les trois autres faces. — L'expression (XIII) permet d'écrire

$$V = \tfrac{2}{3}S.A\frac{\sin a'}{a'} = \tfrac{2}{3}S.B\frac{\sin b'}{b'} = \tfrac{2}{3}S.C\frac{\sin c'}{c'},$$

d'où l'on tire les équations

$$\text{(XV)}\qquad \frac{A\sin a'}{a'} = \frac{B\sin b'}{b'} = \frac{C\sin c'}{c'},$$

qui, étant combinées entre elles et avec l'équation évidente

$$A\cos a' + B\cos b' + C\cos c' = S,$$

donnent d'abord

$$B = \frac{Ab'\sin a'}{a'},\quad C = \frac{Ac'\sin a'}{a'},$$

puis

$$A = \frac{S}{a' \cot a' + b' \cot b' + c' \cot c'} \cdot \frac{a'}{\sin a'}.$$

Mettant cette valeur de A dans l'expression $V = \frac{2}{3} S.A.\sin a'$, on trouve

$$\text{(XVI)} \qquad V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S^2}{a' \cot a' + b' \cot b' + c' \cot c'}$$

pour le volume du tétraèdre en valeur de la face S et de ses inclinaisons sur les trois autres faces A, B, C (G. Dostor, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1867, t. VI, p. 414).

305. **Volume du tétraèdre** SABC, **ayant un sommet** S **à l'origine des coordonnées, en valeur des coordonnées** x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' **des trois autres sommets** A, B, C. — Supposons les axes des coordonnées rectangulaires. Nous avons

$$(7) \quad a^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad b^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2, \quad c^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2;$$

et, comme les équations des droites SA, SB, SC sont

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}, \quad \frac{x}{x''} = \frac{y}{y''} = \frac{z}{z''}, \quad \frac{x}{x'''} = \frac{y}{y'''} = \frac{z}{z'''},$$

il vient

$$\cos\nu = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2)}} = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{ab},$$

de sorte qu'on a

$$(8) \quad \begin{cases} ab\cos\nu = x'x'' + y'y'' + z'z'', \\ ca\cos\mu = x'x''' + y'y''' + z'z''', \\ bc\cos\lambda = x''x''' + y''y''' + z''z'''. \end{cases}$$

Si nous substituons les valeurs (7) et (8) dans la formule (III), nous obtenons l'égalité

$$36V^2 = \begin{vmatrix} x'^2 + y'^2 + z'^2 & x'x'' + y'y'' + z'z'' & x'x''' + y'y''' + z'z''' \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' & x''^2 + y''^2 + z''^2 & x''x''' + y''y''' + z''z''' \\ x'x''' + y'y''' + z'z''' & x''x''' + y''y''' + z''z''' & x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 \end{vmatrix}.$$

Le second membre est le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix};$$

par conséquent on a, en extrayant la racine carrée,

$$\text{(XVII)} \qquad 6V = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Si les axes de coordonnées étaient obliques, il faudrait multiplier le second membre par le sinus Δ du trièdre formé par ces axes.

306. **Volume du tétraèdre SABC en valeur des coordonnées** x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 **des quatre sommets** S, A, B, C. — Transportons l'origine des coordonnées au sommet S, et soient x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' les nouvelles coordonnées des trois autres sommets A, B, C. Le volume du tétraèdre, exprimé en valeur de ces dernières coordonnées, sera donné par la formule précédente (XVII). Mais les égalités

$$\begin{aligned} x_1 &= x + x', & y_1 &= y + y', & z_1 &= z + z'; \\ x_2 &= x + x'', & y_2 &= y + y'', & z_2 &= z + z''; \\ x_3 &= x + x''', & y_3 &= y + y''', & z_3 &= z + z''' \end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned} x' &= x_1 - x, & y' &= y_1 - y, & z' &= z_1 - z; \\ x'' &= x_2 - x, & y'' &= y_2 - y, & z'' &= z_2 - z; \\ x''' &= x_3 - x, & y''' &= y_3 - y, & z''' &= z_3 - z. \end{aligned}$$

Si nous substituons ces valeurs dans la formule (XVII), elle devient

$$6V = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ 0 & x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ 0 & x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix}.$$

Dans le second déterminant, il suffira d'ajouter la première ligne à chacune des trois suivantes, pour avoir l'expression demandée

$$\text{(XVIII)} \qquad 6V = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

307. **Méthode directe pour déterminer cette expression.** — Nous avons vu au n° 257 que le plan $M_1M_2M_3$, qui passe par les trois points

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad M_3(x_3, y_3, z_3),$$

a pour équation

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

que, pour abréger, nous écrirons

$$(10)\qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

où x, y, z désignent les variables courantes.

Dans cette équation les coefficients A, B, C sont respectivement égaux aux déterminants mineurs

$$-\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Ces déterminants représentent, au signe près, les doubles surfaces des projections du triangle $M_1M_2M_3$ sur les plans de coordonnées OYZ, OZX, OXY (211); par suite, la racine carrée de la somme des carrés de ces trois déterminants exprime la double surface de ce triangle $M_1M_2M_3$, c'est-à-dire que $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 2\,M_1M_2M_3$.

Supposons que x, y, z soient les coordonnées d'un point S situé hors du plan (9) ou (10); la distance de ce point au plan (10) sera

$$d = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax + By + Cz + D}{2\,.\,M_1M_2M_3},$$

on en tire

$$2\,.\,M_1M_2M_3\,.\,d = Ax + By + Cz + D.$$

Or $2.M_1M_2M_3.d$ est égal à six fois le volume V du tétraèdre $SM_1M_2M_3$; donc on a

$$6V = Ax + By + Cz + D,$$

ou bien

$$\text{(XIX)} \qquad 6V = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

308. Multiplions la première colonne successivement par les quantités arbitraires a, b, c et retranchons les produits obtenus des trois autres colonnes; la valeur du déterminant (XIX) n'est pas altérée, et il vient encore

$$\text{(XX)} \qquad 6V = \begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b & z-c \\ 1 & x_1-a & y_1-b & z_1-c \\ 1 & x_2-a & y_2-b & z_2-c \\ 1 & x_3-a & y_3-b & z_3-c \end{vmatrix},$$

où a, b, c sont des constantes quelconques.

309. Volume du tétraèdre compris sous les quatre plans

$$\begin{aligned} P &= Ax + By + Cz + D = 0, \\ P' &= A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ P'' &= A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \\ P''' &= A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0. \end{aligned}$$

Soient x, y, z les coordonnées du point d'intersection M des trois plans P', P'', P'''; x', y', z' celles du point d'intersection M' des plans P'', P''', P; x'', y'', z'' les coordonnées de l'intersection M'' des plans P''', P, P'; enfin x''', y''', z''' celles de l'intersection M''' des plans P, P', P''. Le volume V du tétraèdre $MM'M''M'''$ sera donné par

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Multiplions ce déterminant par le suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} D & A & B & C \\ D' & A' & B' & C' \\ D'' & A'' & B'' & C'' \\ D''' & A''' & B''' & C''' \end{vmatrix} = (DA'B''C''');$$

nous obtenons

$$(11)\quad 6V\Phi = \begin{vmatrix} D+Ax+By+Cz & D'+A'x+B'y+C'z & D''+A''x+B''y+C''z & D'''+A'''x+B'''y+C'''z \\ D+Ax'+By'+Cz' & D'+A'x'+B'y'+C'z' & D''+A''x'+B''y'+C''z' & D'''+A'''x'+B'''y'+C'''z' \\ D+Ax''+By''+Cz'' & D'+A'x''+B'y''+C'z'' & D''+A''x''+B''y''+C''z'' & D'''+A'''x''+B'''y''+C'''z'' \\ D+Ax'''+By'''+Cz''' & D'+A'x'''+B'y'''+C'z''' & D''+B''x'''+B''y'''+C''z''' & D'''+A'''x'''+B'''y'''+C'''z''' \end{vmatrix}.$$

Cela posé, le point M appartenant aux trois plans P′, P″, P‴, et se trouvant extérieur au plan P, on a évidemment

$$(12)\quad \begin{cases} Ax+By+Cz+D=\lambda, \\ A'x+B'y+C'z+D'=0, \\ A''x+B''y+C''z+D''=0, \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0. \end{cases}$$

On a pareillement

$$\begin{array}{lll} Ax'+By'+Cz'+D=0, & Ax''+By''+Cz''+D=0, & Ax'''+By'''+Cz'''+D=0, \\ A'x'+B'y'+C'z'+D'=\lambda', & A'x''+B'y''+C'z''+D'=0, & A'x'''+B'y'''+C'z'''+D'=0, \\ A''x'+B''y'+C''z'+D''=0, & A''x''+B''y''+C''z''+D''=\lambda'', & A''x'''+B''y'''+C''z'''+D''=0, \\ A'''x'+B'''y'+C'''z'+D'''=0; & A'''x''+B'''y''+C'''z''+D'''=0; & A'''x'''+B'''y'''+C'''z'''+D'''=\lambda'''. \end{array}$$

Ces équations réduisent la valeur (11) à

$$(13)\quad 6V\Phi = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda''' \end{vmatrix} = \lambda\lambda'\lambda''\lambda''',$$

où il reste à déterminer les constantes λ, λ', λ'' et λ'''.

Pour avoir λ, il nous suffira d'éliminer les trois variables x, y, z entre les quatre équations (12); nous obtenons ainsi l'égalité (134)

$$0 = \begin{vmatrix} A & B & C & D-\lambda \\ A' & B' & C' & D'-0 \\ A'' & B'' & C'' & D''-0 \\ A''' & B''' & C''' & D'''-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & C & \lambda \\ A' & B' & C' & 0 \\ A'' & B'' & C'' & 0 \\ A''' & B''' & C''' & 0 \end{vmatrix},$$

qui, par l'emploi de la notation abrégée (18), revient à

$$0 = (AB'C''D''') - \lambda(A'B''C'''),$$

qui donne

$$\lambda = -\frac{(AB'C''D''')}{(A'B''C''')}.$$

On trouverait de même que

$$\lambda' = -\frac{(AB'C''D''')}{(A''B'''C)}, \quad \lambda'' = -\frac{(AB'C''D''')}{(A'''BC')}, \quad \lambda''' = -\frac{(AB'C''D''')}{(AB'C'')};$$

par conséquent il vient

$$\lambda\lambda'\lambda''\lambda''' = \frac{(AB'C''D''')^4}{(AB'C'').(A'B''C''').(A''B'''C).(A'''BC')}.$$

Si nous substituons cette valeur dans l'équation (13), nous trouverons, pour le volume demandé,

$$\text{(XXI)} \qquad 6V = \frac{(AB'C''D''')^3}{(AB'C'').(A'B''C''').(A''B'''C).(A'''BC')}.$$

Cette formule et la méthode suivie pour l'obtenir sont dues à JOACHIMSTHAL (*Journal der reinen und angewandten Mathematik von Crelle*, t. XL, p. 21-47).

* 310. **Produit des volumes de deux tétraèdres en valeur des seize distances des quatre sommets du premier tétraèdre aux quatre sommets du second.** — Soient V et V' les volumes des deux tétraèdres SABC, S'A'B'C', ayant leurs sommets respectifs aux points

$$S(x, y, z), \quad A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad C(x_3, y_3, z_3);$$
$$S'(x', y', z'), \quad A'(x'_1, y'_1, z'_1), \quad B'(x'_2, y'_2, z'_2), \quad C'(x'_3, y'_3, z'_3).$$

Nous avons (306)

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & z_2 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad 6V' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x' & y' & z' \\ 1 & 0 & x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ 1 & 0 & x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ 1 & 0 & x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix}.$$

[illegible] ces deux égalités membre à membre, il vient

$$36\,VV' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & xx'+yy'+zz' & xx'_1+yy'_1+zz'_1 & xx'_2+yy'_2+zz'_2 & xx'_3+yy'_3+zz'_3 \\ 1 & x_1x'+y_1y'+z_1z' & x_1x'_1+y_1y'_1+z_1z'_1 & x_1x'_2+y_1y'_2+z_1z'_2 & x_1x'_3+y_1y'_3+z_1z'_3 \\ 1 & x_2x'+y_2y'+z_2z' & x_2x'_1+y_2y'_1+z_2z'_1 & x_2x'_2+y_2y'_2+z_2z'_2 & x_2x'_3+y_2y'_3+z_2z'_3 \\ 1 & x_3x'+y_3y'+z_3z' & x_3x'_1+y_3y'_1+z_3z'_1 & x_3x'_2+y_3y'_2+z_3z'_2 & x_3x'_3+y_3y'_3+z_3z'_3 \end{vmatrix}.$$

Représentons les distances des sommets du premier tétraèdre à ceux du second par les notations

$$\begin{array}{llll} SS' = d_{11}, & AS' = d_{21}, & BS' = d_{31}, & CS' = d_{41}, \\ SA' = d_{12}, & AA' = d_{22}, & BA' = d_{32}, & CA' = d_{42}, \\ SB' = d_{13}, & AB' = d_{23}, & BB' = d_{33}, & CB' = d_{43}, \\ SC' = d_{14}, & AB' = d_{24}, & BC' = d_{34}, & CC' = d_{44}; \end{array}$$

et désignons les distances des mêmes sommets à l'origine des coordonnées par les lettres suivantes:

$$\begin{array}{llll} SO = s, & AO = a, & BO = b, & CO = c, \\ S'O = s', & A'O = a', & B'O = b', & C'O = c'. \end{array}$$

Il est évident que

$$d_{11}^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 = (x^2+y^2+z^2)+(x'^2+y'^2+z'^2)-2(xx'+yy'+zz') = s^2+s'^2-2(xx'+yy'+zz');$$

on en tire

$$2(xx'+yy'+zz') = s^2+s'^2-d_{11}^2.$$

On obtiendrait des valeurs analogues pour les autres sommes de produits.

Cela étant, dans notre dernier déterminant, multiplions les quatre dernières lignes par 2, puis divisons par 2 la première colonne résultante; le déterminant sera multiplié par $2^4 : 2 = 2^3 = 8$. Remplaçons les doubles sommes de produits par leurs valeurs $s^2 + s'^2 - d_{11}^2$, $s^2 + a'^2 - d_{12}^2, \ldots$, nous obtenons

$$288\,VV' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & s^2 + s'^2 - d_{11}^2 & s^2 + a'^2 - d_{12}^2 & s^2 + b'^2 - d_{13}^2 & s^2 + c'^2 - d_{14}^2 \\ 1 & a^2 + s'^2 - d_{21}^2 & a^2 + a'^2 - d_{22}^2 & a^2 + b'^2 - d_{23}^2 & a^2 + c'^2 - d_{24}^2 \\ 1 & b^2 + s'^2 - d_{31}^2 & b^2 + a'^2 - d_{32}^2 & b^2 + b'^2 - d_{33}^2 & b^2 + c'^2 - d_{34}^2 \\ 1 & c^2 + s'^2 - d_{41}^2 & c^2 + a'^2 - d_{42}^2 & c^2 + b'^2 - d_{43}^2 & c^2 + c'^2 - d_{44}^2 \end{vmatrix}.$$

Pour transformer ce déterminant, conservons la première ligne; multiplions-la ensuite successivement par s^2, a^2, b^2, c^2 et retranchons les produits respectivement des quatre dernières lignes; le déterminant ne change pas de valeur et nous avons

$$288\,VV' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & s'^2 - d_{11}^2 & a'^2 - d_{12}^2 & b'^2 - d_{13}^2 & c'^2 - d_{14}^2 \\ 1 & s'^2 - d_{21}^2 & a'^2 - d_{22}^2 & b'^2 - d_{23}^2 & c'^2 - d_{24}^2 \\ 1 & s'^2 - d_{31}^2 & a'^2 - d_{32}^2 & b'^2 - d_{33}^2 & c'^2 - d_{34}^2 \\ 1 & s'^2 - d_{41}^2 & a'^2 - d_{42}^2 & b'^2 - d_{43}^2 & c'^2 - d_{44}^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant conservons la première colonne; multiplions-la ensuite successivement par s'^2, a'^2, b'^2, c'^2 et retranchons les produits respectivement des quatre dernières colonnes; le déterminant conserve encore sa valeur et il vient

$$288\,VV' = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -d_{11}^2 & -d_{12}^2 & -d_{13}^2 & -d_{14}^2 \\ 1 & -d_{21}^2 & -d_{22}^2 & -d_{23}^2 & -d_{24}^2 \\ 1 & -d_{31}^2 & -d_{32}^2 & -d_{33}^2 & -d_{34}^2 \\ 1 & -d_{41}^2 & -d_{42}^2 & -d_{43}^2 & -d_{44}^2 \end{vmatrix}.$$

Enfin, si dans ce déterminant nous multiplions par -1 d'abord les quatre dernières lignes, puis la première colonne résultante, le déterminant sera multiplié par la cinquième puissance de -1, changera de signe et deviendra

$$\text{(XXII)} \qquad 288\,VV' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11}^2 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & d_{22}^2 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & d_{33}^2 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & d_{44}^2 \end{vmatrix}.$$

Telle est l'expression demandée.

Si le second tétraèdre se confond avec le premier, on aura

$$\begin{aligned}
&d_{11} = 0, \quad d_{12} = d_{21} = a, \quad d_{13} = d_{31} = b, \quad d_{14} = d_{41} = c,\\
&d_{22} = 0, \quad d_{23} = d_{32} = c', \quad d_{24} = d_{42} = b',\\
&d_{33} = 0, \quad d_{34} = d_{43} = a',\\
&d_{44} = 0;
\end{aligned}$$

de sorte qu'il viendra

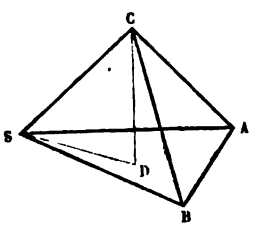
$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix},$$

comme au n° 304.

§ III. — Expressions diverses du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre (¹).

311. Expression en déterminant du rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre SABC (*fig.* 15), en valeur des trois arêtes contiguës SA = a, SB = b, SC = c et des inclinaisons mutuelles de ces arêtes BSC = λ, CSA = μ, ASB = ν. — Prenons le sommet S pour origine et les arêtes SA, SB, SC pour axes des coordonnées. Soit O le centre de la sphère circonscrite. Le rayon SO = R a pour projections sur les

Fig. 15.



(¹) Dostor, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1873, t. XII, p. 370, et *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 163.

trois axes les demi-arêtes $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, de sorte que, si α, β, γ désignent les inclinaisons de SO sur ces axes, on aura

$$(1) \qquad \frac{a}{2} = R\cos\alpha, \quad \frac{b}{2} = R\cos\beta, \quad \frac{c}{2} = R\cos\gamma.$$

Dans la relation (III) du n° 231, mettons à la place de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs tirées des égalités (1); cette relation deviendra

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{a}{2R} & \frac{b}{2R} & \frac{c}{2R} \\ \frac{a}{2R} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{b}{2R} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{c}{2R} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en multipliant la première ligne et la première colonne chacune par $2R$,

$$\begin{vmatrix} 4R^2 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation nous donne l'expression en question

$$(1) \qquad 4R^2\Delta^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

312. Expression développée du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur de trois arêtes contiguës et des inclinaisons mutuelles de ces arêtes. — Si nous développons le déterminant (1), nous trouverons que

$$(\mathrm{II}) \qquad \left\{ \begin{aligned} 4R^2\Delta^2 = {} & a^2\sin^2\lambda + 2bc(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ & + b^2\sin^2\mu + 2ca(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ & + c^2\sin^2\nu + 2ab(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu). \end{aligned} \right.$$

313. Expression en déterminant du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre, en valeur des six arêtes a et a', b et b', c et c',

opposées deux à deux. — Dans le déterminant (I) multiplions les trois dernières colonnes respectivement par $2a$, $2b$, $2c$, puis les quatre lignes résultantes par $\frac{1}{2}$, a, b, c; l'équation deviendra

$$16a^2b^2c^2\Delta^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 2a^2 & 2ab\cos\nu & 2ca\cos\mu \\ b^2 & 2ab\cos\nu & 2b^2 & 2bc\cos\lambda \\ c^2 & 2ca\cos\mu & 2bc\cos\lambda & 2c^2 \end{vmatrix},$$

ou, en remarquant que $a^2b^2c^2\Delta^2 = 36V^2$ et en tenant compte des égalités (1) du n° 294,

$$576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & c^2+a^2-b'^2 \\ b^2 & a^2+b^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ c^2 & c^2+a^2-b'^2 & b^2+c^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Retranchons d'abord la première ligne de chacune des trois suivantes, puis la première colonne aussi des trois suivantes; il nous viendra

$$576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & -c'^2 & -b'^2 \\ b^2 & -c'^2 & 0 & -a'^2 \\ c^2 & -b'^2 & -a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Enfin changeons les signes des trois dernières lignes, puis le signe de la première colonne résultante; le déterminant sera multiplié par $(-1)^4 = 1$ et n'aura pas changé de signe. Nous avons ainsi l'expression demandée

$$\text{(III)} \qquad 576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

314. Autres formes de ce déterminant (III). — Si nous nous reportons aux transformations du n° 73, nous verrons que cette expression affecte encore les deux formes suivantes :

$$\text{(IV)} \qquad 576V^2R^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2c'^2 & b^2b'^2 \\ 1 & c^2c'^2 & 0 & a^2a'^2 \\ 1 & b^2b'^2 & a^2a'^2 & 0 \end{vmatrix}$$

et

$$(\mathrm{V}) \qquad 576\,\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 = -\begin{vmatrix} 0 & aa' & bb' & cc' \\ aa' & 0 & cc' & bb' \\ bb' & cc' & 0 & aa' \\ cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

315. **Expression, développée en produit, de la valeur de** $576\,\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2$.— Dans le déterminant (V) remplaçons la première colonne par la somme des quatre colonnes; nous obtenons

$$576\,\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 = -\begin{vmatrix} aa'+bb'+cc' & aa' & bb' & cc' \\ aa'+bb'+cc' & 0 & cc' & bb' \\ aa'+bb'+cc' & cc' & 0 & aa' \\ aa'+bb'+cc' & bb' & aa' & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous voyons ainsi que le déterminant (V) est divisible par $aa'+bb'+cc'$. Si l'on avait remplacé la première colonne par la somme des quatre colonnes respectivement multipliées par 1, 1, -1 et -1, on aurait trouvé que le déterminant (V) est aussi divisible par $bb'+cc'-aa'$. Il est aisé de voir qu'il est de même divisible par $cc'+aa'-bb'$ et par $aa'+bb'-cc'$ et qu'en définitive on a

$$(\mathrm{VI}) \qquad \left\{ \begin{aligned} 576\,\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 &= (aa'+bb'+cc')(bb'+cc'-aa') \\ &\quad \times (cc'+aa'-bb')(aa'+bb'-cc'), \end{aligned} \right.$$

ou

$$(\mathrm{VII}) \qquad 72\,\mathrm{V}^2\mathrm{R}^2 = \mathrm{P}^2(\mathrm{P}^2-aa')(\mathrm{P}^2-bb')(\mathrm{P}^2-cc'),$$

en posant

$$aa'+bb'+cc' = 2\,\mathrm{P}^2.$$

Cette dernière formule (VII) est due à Crelle (Crelle, *Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen*, t. I, 3, p. 105).

316. **Calcul direct du déterminant** (III). — Supposons que le tétraèdre SABC soit rapporté au centre O de la sphère circonscrite et désignons par x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 les coordonnées des quatre sommets S, A, B, C.

Dans l'expression (XVIII) du n° 306, qui donne le volume V du tétraèdre, multiplions la première colonne du déterminant successivement par R et $-$R; nous obtenons les deux égalités

$$6\,\mathrm{VR} = \begin{vmatrix} \mathrm{R} & x & y & z \\ \mathrm{R} & x_1 & y_1 & z_1 \\ \mathrm{R} & x_2 & y_2 & z_2 \\ \mathrm{R} & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad -6\,\mathrm{VR} = \begin{vmatrix} -\mathrm{R} & x & y & z \\ -\mathrm{R} & x_1 & y_1 & z_1 \\ -\mathrm{R} & x_2 & y_2 & z_2 \\ -\mathrm{R} & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

dont le produit est

$$-36V^2R^2=\begin{vmatrix} -R^2+x^2+y^2+z^2 & -R^2+xx_1+yy_1+zz_1 & -R^2+xx_2+yy_2+zz_2 & -R^2+xx_3+yy_3+zz_3 \\ -R^2+xx_1+yy_1+zz_1 & -R^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2 & -R^2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & -R^2+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 \\ -R^2+xx_2+yy_2+zz_2 & -R^2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & -R^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2 & -R^2+x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3 \\ -R^2+xx_3+yy_3+zz_3 & -R^2+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3 & -R^2+x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3 & -R^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2 \end{vmatrix}.$$

Cela trouvé, les sommets S, A, B, C étant situés sur la sphère, nous avons d'abord

$$-R^2+x^2+y^2+z^2=0,\quad -R^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2=0,$$
$$-R^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2=0,\quad -R^2+x_3^2+y_3^2+z_3^2=0.$$

Il vient ensuite

$$SA^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(x^2+y^2+z^2)+(x_1^2+y_1^2+z_1^2)-2(xx_1+yy_1+zz_1),$$

ou

$$a^2=2[R^2-(xx_1+yy_1+zz_1)],$$

de sorte qu'on a

$$-R^2+xx_1+yy_1+zz_1=-\frac{a^2}{2},\quad -R^2+x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3=-\frac{a'^2}{2},$$
$$-R^2+xx_2+yy_2+zz_2=-\frac{b^2}{2},\quad -R^2+x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=-\frac{b'^2}{2},$$
$$-R^2+xx_3+yy_3+zz_3=-\frac{c^2}{2},\quad -R^2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=-\frac{c'^2}{2}.$$

Substituons toutes ces valeurs dans notre dernier déterminant et multiplions les quatre lignes par -2; le déterminant sera multiplié par $(-2)^4=16$ et nous obtiendrons encore la formule (III).

§ IV. — Rayon de la sphère inscrite dans le tétraèdre [1].

317. Prenons encore le sommet S pour origine et les arêtes SA, SB, SC pour axes des coordonnées. Soit O le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre et r le rayon de cette sphère.

Si x', y', z' sont les coordonnées du centre O, les distances de ce centre aux plans de coordonnées SAB, SAC, SBC étant toutes trois égales à r, on aura, en vertu des formules (III) du n° 270,

$$(1) \qquad r = \frac{\Delta x'}{\sin\lambda} = \frac{\Delta y'}{\sin\mu} = \frac{\Delta z'}{\sin\nu}.$$

D'ailleurs le plan de la quatrième face ABC du tétraèdre est

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Nous voyons ainsi qu'il suffit de remplacer, dans la formule (3) du n° 269, A, B, C et D par $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et -1, p par r, et x', y', z' par leurs valeurs $\frac{r\sin\lambda}{\Delta}$, $\frac{r\sin\mu}{\Delta}$, $\frac{r\sin\nu}{\Delta}$ tirées de (1), pour avoir l'équation

$$(2) \qquad \left(\frac{\sin\lambda}{a} + \frac{\sin\mu}{b} + \frac{\sin\nu}{c} - \frac{\Delta}{r}\right)^2 = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \frac{1}{b} & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \frac{1}{c} & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

qui nous fournira la valeur du rayon r de la sphère inscrite.

Dans le déterminant du second membre, multiplions les trois dernières lignes, ainsi que les trois dernières colonnes, respectivement par a, b et c et divisons hors barres par le produit $a.b.c \times a.b.c = a^2b^2c^2$; ce

---

[1] G. Dostor, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XII, p. 367. — *Archives de Mathématiques*, 1875, t. LVII, p. 170.

déterminant prend la forme

$$-\frac{1}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ 1 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ 1 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix},$$

et montre (297) que le second membre de l'équation (2) est égal au carré de la double surface S du triangle ABC divisé par $a^2b^2c^2$. Nous avons donc

$$-\left(\frac{\sin\lambda}{a}+\frac{\sin\mu}{b}+\frac{\sin\nu}{c}-\frac{\Delta}{r}\right)^2=\frac{4S^2}{a^2b^2c^2},$$

d'où nous tirons

$$\text{(I)}\qquad \frac{\Delta}{r}=\frac{\sin\lambda}{a}+\frac{\sin\mu}{b}+\frac{\sin\nu}{c}\pm\frac{2S}{abc}.$$

Cette formule donne les deux rayons des deux sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre, lesquelles sphères ont leurs centres situés sur la droite (271)

$$\frac{x}{\sin\lambda}=\frac{y}{\sin\mu}=\frac{z}{\sin\nu}.$$

318. Si l'on a soin de changer dans cette équation (I) successivement le signe de $\sin\lambda$, $\sin\mu$, $\sin\nu$, on formera les trois équations

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta}{r'}=\dfrac{\sin\mu}{b}+\dfrac{\sin\nu}{c}-\dfrac{\sin\lambda}{a}\pm\dfrac{2S}{abc}, \\[2ex] \dfrac{\Delta}{r''}=\dfrac{\sin\nu}{c}+\dfrac{\sin\lambda}{a}-\dfrac{\sin\mu}{b}\pm\dfrac{2S}{abc}, \\[2ex] \dfrac{\Delta}{r'''}=\dfrac{\sin\lambda}{a}+\dfrac{\sin\mu}{b}-\dfrac{\sin\nu}{c}\pm\dfrac{2S}{abc}, \end{cases}$$

qui donnent les rayons des six autres sphères tangentes aux plans des quatre faces du tétraèdre.

Ces sphères ont leurs centres situés, deux par deux, sur les droites respectives (271)

$$-\frac{x}{\sin\lambda}=\frac{y}{\sin\mu}=\frac{z}{\sin\nu},$$

$$\frac{x}{\sin\lambda}=-\frac{y}{\sin\mu}=\frac{z}{\sin\nu},$$

$$\frac{x}{\sin\lambda}=\frac{y}{\sin\mu}=-\frac{z}{\sin\nu},$$

qui, étant dirigées dans l'intérieur des trois dièdres

$$SA'BC, \quad SAB'C, \quad SABC',$$

formés par deux des arêtes SA, SB, SC et le prolongement de la troisième, sont les lieux des points équidistants des faces de ces trièdres.

§ V. — Tétraèdre circonscriptible par les arêtes [1].

* 319. Nous donnerons ce nom aux tétraèdres, dont les six arêtes sont tangentes à une même sphère.

Conservons toutes les notations précédentes, et appelons α, β, γ, δ les segments des arêtes qui sont compris entre les sommets A, B, C, S du tétraèdre et les points de contact de ces arêtes avec la sphère.

Si nous supposons que la sphère touche à la fois les six arêtes et non leurs prolongements, nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} a = \alpha + \delta, & b = \beta + \delta, & c = \gamma + \delta, \\ a' = \beta + \gamma, & b' = \gamma + \alpha, & c' = \alpha + \beta; \end{cases}$$

d'où nous tirons, en ajoutant verticalement,

$$(\mathrm{I}) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta = a + a' = b + b' = c + c'.$$

Donc, *dans tout tétraèdre circonscriptible intérieurement par les arêtes, les sommes des arêtes opposées sont égales entre elles.*

* 320. **Cosinus des angles au sommet S.** — Désignons toujours ces angles BSC, CSA, ASB par λ, μ, ν. Puisque

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda,$$

il vient

$$\cos\lambda = \frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc} = \frac{(\beta+\delta)^2+(\gamma+\delta)^2-(\beta+\gamma)^2}{2bc} = \frac{2(\beta+\delta)(\gamma+\delta)-4\delta^2}{2bc};$$

nous avons donc

$$(\mathrm{II}) \qquad \cos\lambda = 1 - \frac{2\beta\gamma}{bc}, \quad \cos\mu = 1 - \frac{2\gamma\alpha}{ca}, \quad \cos\nu = 1 - \frac{2\alpha\beta}{bc},$$

---

[1] G. Dostor, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1874, t. XIII, p. 563. — *Archives de Mathématiques*, 1875, t. LVII, p. 172.

d'où nous tirons

$$\text{(III)} \qquad \sin^2\frac{\lambda}{2} = \frac{\beta\gamma}{bc}, \quad \sin^2\frac{\mu}{2} = \frac{\gamma\alpha}{ca}, \quad \sin^2\frac{\nu}{2} = \frac{\alpha\beta}{ab}.$$

321. Volume du tétraèdre. — La formule (III) du n° 293 nous donne

$$36V^2 = -a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} -1 & -\cos\nu & -\cos\mu \\ -\cos\nu & 1 & -\cos\lambda \\ -\cos\mu & \cos\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\cos\nu & -\cos\mu \\ 1 & -\cos\mu & -1 & -\cos\lambda \\ 1 & -\cos\mu & -\cos\lambda & -1 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons la première colonne à chacune des trois suivantes; il nous vient

$$36V^2 = -a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\cos\nu & 1-\cos\mu \\ 1 & 1-\cos\nu & 0 & 1-\cos\lambda \\ 1 & 1-\cos\mu & 1-\cos\lambda & 0 \end{vmatrix}.$$

Si dans ce déterminant nous substituons les valeurs (II) et que nous multipliions par a, b, c d'abord les trois dernières lignes, puis les trois dernières colonnes, nous aurons

$$36V^2 = -\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 0 & 2\alpha\beta & 2\gamma\alpha \\ b & 2\alpha\beta & 0 & 2\beta\gamma \\ c & 2\gamma\alpha & 2\beta\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

Divisons enfin les trois dernières lignes par 2 et multiplions aussi par 2 la première colonne résultante; le déterminant sera divisé par 4, et il nous viendra en définitive

$$\text{(IV)} \qquad 9V^2 = -\begin{vmatrix} 2 & a & b & c \\ a & 0 & \alpha\beta & \gamma\alpha \\ b & \alpha\beta & 0 & \beta\gamma \\ c & \gamma\alpha & \beta\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

pour le triple carré du volume du tétraèdre.

* **322. Rayon de la sphère tangente aux six arêtes du tétraèdre.** — Soient ω le centre de cette sphère et ρ son rayon. Appelons φ l'inclinaison

commune de la droite $S\omega$ sur les trois arêtes du trièdre S. Nous avons, en ayant égard à la formule (XXVI) du n° 246,

$$\rho = \delta \operatorname{tang} \varphi = \frac{4\delta \sin\frac{\lambda}{2} \sin\frac{\mu}{2} \sin\frac{\nu}{2}}{\Delta};$$

et, si nous mettons dans cette expression les valeurs (III), nous trouverons que

$$\text{(V)} \qquad \rho = \frac{4\alpha\beta\gamma\delta}{abc\Delta} = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{3V}.$$

323. **Angles des arêtes opposées.** — Représentons par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les inclinaisons mutuelles des arêtes opposées a et a', b et b', c et c'. Nous avons (283)

$$2aa' \cos\mathcal{A} = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2;$$

remplaçant les arêtes par leurs valeurs (1) en fonction de α, β, γ, δ, nous obtenons

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \cos\mathcal{A} = \dfrac{(\beta-\gamma)(\delta-\alpha)}{(\beta+\gamma)(\delta+\alpha)}, \\ \cos\mathcal{B} = \dfrac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{(\gamma+\alpha)(\delta+\beta)}, \\ \cos\mathcal{C} = \dfrac{(\alpha-\beta)(\delta-\gamma)}{(\alpha+\beta)(\delta+\gamma)}; \end{cases}$$

d'où nous tirons

$$\text{(VI)} \quad \operatorname{tang}^2\frac{\mathcal{A}}{2} = \frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\gamma+\beta\delta}, \quad \operatorname{tang}^2\frac{\mathcal{B}}{2} = \frac{\beta\gamma+\alpha\delta}{\beta\alpha+\gamma\delta}, \quad \operatorname{tang}^2\frac{\mathcal{C}}{1} = \frac{\gamma\alpha+\beta\delta}{\gamma\beta+\alpha\delta},$$

et par suite

$$\text{(VIII)} \qquad \operatorname{tang}\frac{\mathcal{A}}{2} \operatorname{tang}\frac{\mathcal{B}}{2} \operatorname{tang}\frac{\mathcal{C}}{2} = 1.$$

* 324. Si la sphère, tangente aux arêtes BC, CA, AB, touchait extérieurement les arêtes SA, SB, SC aux points A_1, B_1, C_1, on aurait toujours

$$a' = \beta + \gamma, \quad b' = \gamma + \alpha, \quad c' = \alpha + \beta;$$

mais il viendrait

$$a = \delta' - \alpha, \quad b = \delta' - \beta, \quad c = \delta' - \gamma,$$

où

$$\delta' = SA_1 = SB_1 = SC_1.$$

On trouverait alors que

$$\text{(IX)} \qquad \alpha + \beta + \gamma - \delta' = a' - a = b' - b = c' - c,$$

c'est-à-dire que *les différences des arêtes opposées seraient égales entre elles.*

Le rayon de la sphère serait dans ce cas

$$\text{(X)} \qquad \rho' = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta'}{3V}.$$

* 325. Pour le *tétraèdre régulier*, on a

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};$$

il vient, par suite,

$$\rho = \frac{1}{4} a\sqrt{2},$$

et, comme les rayons des deux sphères, l'une inscrite, l'autre circonscrite, sont

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}, \quad R = \frac{a\sqrt{6}}{4},$$

on voit que

$$\text{(XI)} \qquad \rho^2 = \frac{a^2}{8} = Rr.$$

Donc, *dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux six arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite.*

§ VI. — Tétraèdre équifacial (1).

* 326. Nous donnerons ce nom au tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles égaux; les arêtes opposées y sont deux à deux égales et les angles plans de chaque trièdre valent ensemble deux droits.

Nous représenterons par a, b, c les trois côtés du triangle générateur ABC et par A, B, C les angles opposés à ces côtés. Nous désignerons d'ailleurs par les mêmes lettres a, b, c les angles dièdres qui sont adjacents aux arêtes a, b, c du tétraèdre.

---

(1) G. Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 179.

Dans les formules du n° 248 remplaçons α, μ, ν par A, B, C et X, Y, Z par a, b, c; elles deviennent

$$\text{(I)} \qquad \cos a + \cos b + \cos c = 1,$$

$$\text{(II)} \qquad \Delta = 2\sqrt{\cos A \cos B \cos C} = 2 \operatorname{tang}\frac{a}{2} \operatorname{tang}\frac{b}{2} \operatorname{tang}\frac{c}{2}.$$

* 327. **Volume du tétraèdre.** — Mettons cette valeur de Δ dans la formule (II), $V = \frac{1}{6} abc\Delta$, du n° 292; nous obtenons pour le volume du tétraèdre

$$V = \frac{1}{3} abc \sqrt{\cos A \cos B \cos C};$$

or le triangle générateur nous donne

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab};$$

par suite, nous trouvons, en substituant et en élevant au carré,

$$\text{(III)} \qquad 72V^2 = (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

* 328. **Rayon des sphères inscrite et exinscrite.** — Désignons ces rayons par r et r', et par S la surface du triangle générateur. Il est évident que

$$V = \frac{4}{3} Sr = \frac{2}{3} Sr';$$

il vient donc

$$\text{(IV)} \quad 8r^2 = 2r'^2 = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}.$$

Si H est la hauteur du tétraèdre, on aura

$$H = \frac{3V}{S} = 4r = 2r'.$$

Ainsi *la hauteur du tétraèdre équifacial est égale au diamètre de la sphère exinscrite et égale au double diamètre de la sphère inscrite.*

* 329. **Rayon de la sphère circonscrite.** — Les arêtes opposées du tétraèdre équifacial étant égales, la formule (VI) du n° 315 nous donnera

$$576V^2R^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2);$$

divisant cette égalité membre à membre par la relation (III) qui précède, nous obtenons

$$(V) \qquad 8R^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Donc *le double diamètre de la sphère circonscrite au tétraèdre équifacial est égale à la racine carrée de la somme des carrés des six arêtes du tétraèdre.*

§ I. — Tétraèdre a arêtes opposées rectangulaires [1].

* 330. **Théorème I.** — *Dans tout tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires, les sommes des carrés des arêtes opposées sont égales entre elles.*

Nous avons vu au n° 284 que, si deux systèmes d'arêtes opposées sont rectangulaires, les deux arêtes opposées restantes sont aussi perpendiculaires entre elles. En supposant donc

$$(1) \qquad \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où} \quad \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 0,$$

les trois formules (I) du n° 283 donnent de suite

$$(I) \qquad a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2.$$

* 331. **Théorème II.** — *Dans tout tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires, les trois arêtes d'un même trièdre sont proportionnelles aux cosinus des faces opposées de ce trièdre.*

Car l'hypothèse (1) réduit les égalités (III) du n° 285 aux suivantes :

$$a\cos\mu = b\cos\lambda, \quad b\cos\nu = c\cos\mu, \quad c\cos\lambda = \cos\nu,$$

qui donnent

$$(II) \qquad \frac{a}{\cos\lambda} = \frac{b}{\cos\mu} = \frac{c}{\cos\nu}.$$

* 332. **Relation entre les trois arêtes d'un même trièdre et les angles dièdres adjacents.** — Soit $\frac{1}{r}$ la valeur commune des trois rapports (II), de sorte que

$$(2) \qquad \cos^2\lambda = a^2r^2, \quad \cos^2\mu = b^2r^2, \quad \cos^2\nu = c^2r^2.$$

---

[1] G. Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 177.

Le trièdre S nous donne aussi

$$\frac{\sin^2\lambda}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2\mu}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2\nu}{\sin^2 c} = r'^2,$$

d'où nous tirons

$$(3) \qquad \sin^2\lambda = r'^2\sin^2 a, \quad \sin^2\mu = r'^2\sin^2 b, \quad \sin^2\nu = r'^2\sin^2 c.$$

Ajoutant les égalités (2) et (3), nous obtenons

$$-1 + r^2a^2 + r'^2\sin^2 a = 0,$$
$$-1 + r^2b^2 + r'^2\sin^2 b = 0,$$
$$-1 + r^2c^2 + r'^2\sin^2 c = 0.$$

Éliminant les inconnues r^2 et r'^2 entre ces trois équations, nous trouvons la relation

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & \sin^2 a \\ 1 & b^2 & \sin^2 b \\ 1 & c^2 & \sin^2 c \end{vmatrix} = 0,$$

qui, étant développée, se met sous la forme

$$(\mathrm{IV}) \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{\sin^2 b}{b^2} - \frac{\sin^2 c}{c^2}\right) + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\sin^2 c}{c^2} - \frac{\sin^2 a}{a^2}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\sin^2 a}{a^2} - \frac{\sin^2 b}{b^2}\right) = 0.$$

On a pareillement les égalités

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & \sin^2 a \\ 1 & b'^2 & \sin^2 b' \\ 1 & c'^2 & \sin^2 c' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & b^2 & \sin^2 b \\ 1 & c'^2 & \sin^2 c' \\ 1 & a'^2 & \sin^2 a' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & c^2 & \sin^2 c \\ 1 & a'^2 & \sin^2 a' \\ 1 & b'^2 & \sin^2 b' \end{vmatrix} = 0.$$

* 333. Dans les relations (X) et (XI) du n° 291 posons $\alpha = \frac{\pi}{2}$; elles donnent

$$(\mathrm{V}) \qquad \frac{a^2a'^2}{4} = \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - 2\mathrm{BC}\cos a = \mathrm{A}^2 + \mathrm{S}^2 - 2\mathrm{AS}\cos a'.$$

On en conclut que :

Théorème III. — *Dans tout tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires, le carré du demi-produit de deux arêtes opposées égale la somme des carrés des deux faces adjacentes à l'une de ces arêtes, moins le double produit de ces deux faces par le cosinus du dièdre compris.*

* **334.** Faisons $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = 1$ dans la relation (XIII) du même numéro 291 ; nous trouvons que

$$\text{(VI)} \qquad \frac{1}{4}(a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2) = A^2 + B^2 + C^2 + S^2.$$

Ainsi :

Théorème IV. — *Dans tout tétraèdre à arêtes opposées rectangulaires, la somme des carrés des produits des arêtes opposées est égale à quatre fois la somme des carrés des quatre faces.*

* **335. Volume du tétraèdre.** — Les égalités (II) donnent

$$\frac{a^2}{\cos^2\lambda} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos\lambda}{\cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu} = \frac{a'^2}{\sin^2\lambda - \Delta^2},$$

d'où l'on tire

$$a^2\Delta^2 = a^2\sin^2\lambda - a'^2\cos^2\lambda.$$

On trouve ainsi que

$$\text{(VII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 36V^2 = a^2b^2c^2\Delta^2 &= b^2c^2(a^2\sin^2\lambda - a'^2\cos^2\lambda) \\ &= c^2a^2(b^2\sin^2\mu - b'^2\cos^2\mu) \\ &= a^2b^2(c^2\sin^2\nu - c'^2\sin^2\nu). \end{aligned} \right.$$

CHAPITRE V.

LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

§ I. La sphère. — § II. Les surfaces du second degré à centre. — § III. Les surfaces cylindriques du second degré. — § IV. Les surfaces de révolution du second degré.

§ I. — La sphère.

336. Expression en déterminant de l'équation de la sphère en valeur des dérivées et du rayon [1]. — Soient a, b, c les coordonnées du centre C d'une sphère, R le rayon de la sphère et x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la surface. L'équation de la sphère sera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + 2(y-b)(z-c)\cos\lambda \\ + 2(z-c)(x-a)\cos\mu + 2(x-a)(y-b)\cos\nu - R^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

On en tire

$$\begin{aligned} f'_x &= 2(x-a) + 2(y-b)\cos\nu + 2(z-c)\cos\mu, \\ f'_y &= 2(x-a)\cos\nu + 2(y-b) + 2(z-c)\cos\lambda, \\ f'_z &= 2(x-a)\cos\mu + 2(y-b)\cos\lambda + 2(z-c). \end{aligned}$$

Mais l'équation (1) de la sphère peut se mettre sous la forme (200)

$$(x-a)f'_x + (y-b)f'_y + (z-c)f'_z - 2R^2 = 0.$$

Nous avons, par suite, quatre équations

$$\begin{aligned} 4R^2 + 2(a-x)f'_x + 2(b-y)f'_y + 2(c-z)f'_z &= 0, \\ f'_x + 2(a-x) + 2(b-y)\cos\nu + 2(c-z)\cos\mu &= 0, \\ f'_y + 2(a-x)\cos\nu + 2(b-y) + 2(c-z)\cos\lambda &= 0, \\ f'_z + 2(a-x)\cos\mu + 2(b-y)\cos\lambda + 2(c-z) &= 0, \end{aligned}$$

[1] G. Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1874, t. LVI, p. 103.

entre les trois variables $2(a-x)$, $2(b-y)$, $2(c-z)$. Éliminant ces variables, il nous vient l'équation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 4R^2 & f'_x & f'_y & f'_z \\ f'_x & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ f'_y & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ f'_z & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pour celle de la sphère.

En développant le premier membre, on ramène cette équation à la forme

$$(11)\qquad \left\{ \begin{aligned} 4\Delta^2R^2 = {} & \sin^2\lambda f_x'^2 + 2(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)f'_y \cdot f'_z \\ & + \sin^2\mu f_y'^2 + 2(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)f'_z \cdot f'_x \\ & + \sin^2\nu f_z'^2 + 2(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)f'_x \cdot f'_y, \end{aligned} \right.$$

où Δ exprime le sinus du trièdre formé par les axes de coordonnées.

337. Équation de la sphère passant par quatre points donnés. — Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, l'équation de la sphère sera de la forme

$$(2)\qquad d + 2ax + 2by + 2cz + x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

La sphère contiendra les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, si les coordonnées de ces points

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\quad x_4,\ y_4,\ z_4$$

satisfont à l'équation (2). On obtient ainsi les quatre équations

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} d + 2ax_1 + 2by_1 + 2cz_1 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= 0, \\ d + 2ax_2 + 2by_2 + 2cz_2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= 0, \\ d + 2ax_3 + 2by_3 + 2cz_3 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 &= 0, \\ d + 2ax_4 + 2by_4 + 2cz_4 + x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

qui fournissent les valeurs de a, b, c et d. La substitution de ces valeurs dans l'équation (2) donnera l'équation de la sphère.

Cette équation peut s'obtenir immédiatement. En effet, les cinq équations précédentes (2) et (3) sont du premier degré par rapport aux quatre inconnues d, $2a$, $2b$ et $2c$; elles sont

forcément compatibles; donc leur déterminant est nul. On trouve ainsi

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z & x^2+y^2+z^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & x_3^2+y_3^2+z_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & x_4^2+y_4^2+z_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

pour l'équation demandée de la sphère.

338. **Relation entre les distances mutuelles de cinq points $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ situés sur la surface d'une même sphère.** — Les coordonnées de ces cinq points satisfaisant à l'équation (2), on en déduit la relation (III), qui peut se mettre sous chacune des deux formes suivantes :

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2+y^2+z^2 & -2x & -2y & -2z \\ 1 & x_1^2+y_1^2+z_1^2 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 \\ 1 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 & -2x_2 & -2y_2 & -2z_2 \\ 1 & x_3^2+y_3^2+z_3^2 & -2x_3 & -2y_3 & -2z_3 \\ 1 & x_4^2+y_4^2+z_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & 1 & x & y & z \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Faisons le produit de ces deux déterminants, en multipliant lignes par lignes; nous obtenons la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 & (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2 & (x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2 & (x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2 \\ (x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2 & 0 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2 & (x_1-x_4)^2+(y_1-y_4)^2+(z_1-z_4)^2 \\ (x_2-x)^2+(y_2-y)^2+(z_2-z)^2 & (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 & 0 & (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2 & (x_2-x_4)^2+(y_2-y_4)^2+(z_2-z_4)^2 \\ (x_3-x)^2+(y_3-y)^2+(z_3-z)^2 & (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2 & (x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2 & 0 & (x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2+(z_3-z_4)^2 \\ (x_4-x)^2+(y_4-y)^2+(z_4-z)^2 & (x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2+(z_4-z_1)^2 & (x_4-x_2)^2+(y_4-y_2)^2+(z_4-z_2)^2 & (x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2+(z_4-z_3)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cela obtenu, posons

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\overline{\mathrm{M}\,\mathrm{M}_1}^2=a^2,$$
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}^2=b^2,$$
$$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2=\overline{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3}^2=c^2,$$
$$(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2+(z_3-z_4)^2=\overline{\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4}^2=d^2,$$
$$(x_4-x)^2+(y_4-y)^2+(z_4-z)^2=\overline{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_1}^2=e;$$

puis

$$(x_2-x_4)^2+(y_2-y_4)^2+(z_2-z_4)^2=\overline{\mathrm{M}_2\mathrm{M}_4}^2=\alpha^2,$$
$$(x_3-x)^2+(y_3-y)^2+(z_3-z)^2=\overline{\mathrm{M}_3\mathrm{M}}^2=\beta^2,$$
$$(x_4-x_1)^2+(y_4-y_1)^2+(z_4-z_1)^2=\overline{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_1}^2=\gamma^2,$$
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=\overline{\mathrm{M}\,\mathrm{M}_2}^2=\delta^2,$$
$$(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2=\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_3}^2=\varepsilon^2.$$

Si nous substituons ces carrés dans la dernière équation qui précède, nous obtiendrons la relation à trouver

$$\text{(IV)}\qquad \begin{vmatrix} 0 & a^2 & \delta^2 & \beta^2 & e^2 \\ a^2 & 0 & b^2 & \varepsilon^2 & \gamma^2 \\ \delta^2 & b^2 & 0 & c^2 & \alpha^2 \\ \beta^2 & \varepsilon^2 & c^2 & 0 & d^2 \\ e^2 & \gamma^2 & \alpha^2 & d^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

§ II. — Les surfaces du second degré a centre.

339. Forme en déterminant de l'équation de l'ellipsoïde et des deux hyperboloïdes. — Considérons l'ellipsoïde

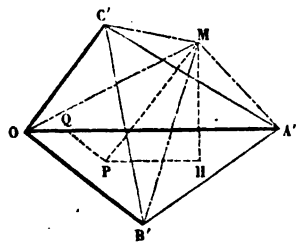
$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

rapporté à trois diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$. L'équation peut se mettre sous la forme

$$\text{(1)}\qquad b'^2c'^2x^2+c'^2a'^2y^2+a'^2b'^2z^2=a'^2b'^2c'^2.$$

Joignons un point quelconque M de la surface (*fig.* 16) dont les coordonnées sont x, y, z, au centre O de la surface et aux extrémités A′, B′, C′ des demi-diamètres positifs OA′, OB′, OC′ et tirons les droites B′C′, C′A′, A′B′. Nous formons ainsi les quatre tétraèdres OMB′C′, OMC′A′, OMA′B′ et OA′B′C′.

Fig. 16.



Appelons ν l'angle A′OB′ compris entre les deux demi-diamètres OA′, OB′ et désignons par ν' l'inclinaison du troisième demi-diamètre OC′ sur le plan OA′B′ des deux précédents.

Si nous prenons le triangle OA′B′ pour base du tétraèdre MOA′B′, la hauteur de ce solide sera la perpendiculaire MH abaissée du point M sur le plan OA′B′.

Or il est facile de voir qu'on a le triangle OA′B′ égal à

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{OA'}.\mathrm{OB'}.\sin \mathrm{A'OB'} = \tfrac{1}{2}a'b'\sin\nu;$$

de plus, si nous menons MP parallèle à OC′ jusqu'à la rencontre du plan OA′B′ en P et que nous tirions PH, nous aurons MP $= z$ et l'angle MPH $= \nu'$; par suite on voit aussi que

$$\mathrm{HM} = \mathrm{MP}.\sin \mathrm{MPH} = z\sin\nu'.$$

Il s'ensuit que le volume du tétraèdre MOA′B′ sera

$$\tfrac{1}{3}\mathrm{OA'B'}.\mathrm{MH} = \tfrac{1}{6}a'b'\sin\nu.z\sin\nu' = \tfrac{1}{6}a'b'z.\sin\nu\sin\nu'.$$

Mais $\sin\nu\sin\nu'$ est précisément (233) le sinus Δ du trièdre OA′B′C′ formé par les trois demi-diamètres OA′, OB′, OC′; donc il nous vient

$$\mathrm{vol.OMA'B'} = \tfrac{1}{6}a'b'z.\Delta.$$

On verrait de même qu'on a

$$\text{vol.OMC}'\text{A}' = \tfrac{1}{2}c'a'y.\Delta, \quad \text{vol.OMB}'\text{C}' = \tfrac{1}{6}b'c'x.\Delta;$$

et, comme $\text{vol.OA}'\text{B}'\text{C}' = \frac{1}{6}a'b'c'.\Delta$, on trouve que, si l'on multiplie l'équation (1) par $\frac{1}{36}\Delta^2$, on aura

$$(2)\quad \text{vol}^2.\text{MOB}'\text{C}' + \text{vol}^2.\text{MOC}'\text{A}' + \text{vol}^2.\text{MOA}'\text{B}' = \text{vol}^2.\text{OA}'\text{B}'\text{C}'.$$

Ainsi *l'équation* (1) *de l'ellipsoïde, rapporté à trois diamètres conjugués, exprime que, si l'on joint un point quelconque de la surface aux extrémités des trois demi-diamètres conjugués, la somme des carrés des trois tétraèdres ainsi obtenus est égale au carré du tétraèdre formé par ces trois demi-diamètres.*

340. Cela étant compris, supposons que l'ellipsoïde soit rapporté à trois axes quelconques passant par le centre de la surface et comprenant entre eux un trièdre, dont nous représenterons le sinus par Δ. Soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 les coordonnées des extrémités de trois demi-diamètres conjugués quelconques OA', OB', OC'; et désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipsoïde.

Nous avons (307) le tétraèdre MOB'C' égal à

$$\pm\tfrac{1}{6}\Delta \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

et, comme les expressions pour les volumes MOC'A', MOA'B' et OA'B'C' sont analogues, nous obtenons, en substituant dans l'égalité (2) et en divisant par $\frac{1}{36}\Delta^2$,

$$(1)\quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2.$$

Telle est *l'équation de l'ellipsoïde rapportée à son centre, en valeur des coordonnées des extrémités de trois demi-diamètres conjugués* (1).

---

(1) G. Dostor, *La Science*, 1855, 2e semestre, p. 998. — *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1866, t. LVI, Revue bibliographique, p. 5.

En développant les déterminants, on ramène cette équation à la forme

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &(x\,y_2z_3 - x\,z_2y_3 + y\,z_2x_3 - y\,x_2z_3 + z\,x_2y_3 - z\,y_2x_3)^2 \\ &+ (x\,y_3z_1 - x\,z_3y_1 + y\,z_3x_1 - y\,x_3z_1 + z\,x_3y_1 - z\,y_3x_1)^2 \\ &+ (x\,y_1z_2 - x\,z_1y_2 + y\,z_1x_2 - y\,x_1z_2 + z\,x_1y_2 - z\,y_1x_2)^2 \\ &= (x_1y_2z_3 - x_1z_2y_3 + y_1z_2x_3 - y_1x_2z_3 + z_1x_2y_2 - z_1y_2x_3)^2. \end{aligned}\right.$$

341. Lorsque les coordonnées sont rectangulaires et que les demi-diamètres OA′, OB′, OC′ sont les axes de la surface (I), l'équation (I) se réduit à

$$(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \left(\frac{xx_2 + yy_2 + zz_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\right)^2 \\ &\qquad + \left(\frac{xx_3 + yy_3 + zz_3}{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}\right)^2 = 1, \end{aligned}\right.$$

avec la triple condition

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0, \\ &x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1 = 0, \\ &x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

342. Si les coordonnées x_3, y_3, z_3 sont seules imaginaires et de la forme $\beta\sqrt{-1}$, l'équation (I) représentera un hyperboloïde à une nappe; si ces coordonnées seules sont réelles et les autres imaginaires, on aura l'hyperboloïde à deux nappes.

343. Équation aux axes des surfaces du second degré. — Supposons que a, b, c soient les coordonnées du centre de la surface du second degré

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & \mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 \\ & + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy \\ & + 2\mathrm{C}x + 2\mathrm{C}'y + 2\mathrm{C}''z + \mathrm{D} = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & \mathrm{A}(x-a)^2 + \mathrm{A}'(y-b)^2 + \mathrm{A}''(z-c)^2 \\ & + 2\mathrm{B}(y-b)(z-c) + 2\mathrm{B}'(z-c)(x-a) \\ & + 2\mathrm{B}''(x-a)(y-b) + \mathrm{H} = 0 \end{aligned}\right.$$

ou encore

$$(6)\quad 2f(x,y,z)=(x-a)f'_x+(y-b)f'_y+(z-c)f'_z+2\mathrm{H}=0,$$

où l'on a

$$(7)\qquad \mathrm{H}=\mathrm{C}a+\mathrm{C}'b+\mathrm{C}''c+\mathrm{D}.$$

L'équation du plan tangent au point (x', y', z') de la surface (4) sera

$$(8)\qquad (x-x')f'_x+(y-y')f'_y+(z-z')f'_z=0,$$

pendant que la droite menée du centre (a, b, c) au point (x', y', z') sera représentée par les équations

$$(9)\qquad \frac{x-a}{x'-a}=\frac{y-b}{y'-b}=\frac{z-c}{z'-c}.$$

Pour que le point (x', y', z') soit un sommet de la surface (6), il faut et il suffit que le rayon central (9) soit perpendiculaire au plan tangent (8). On obtient ainsi les égalités de condition (268)

$$(\mathrm{IV})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{f'_{x'}}{(x'-a)+(y'-b)\cos\nu+(z'-c)\cos\mu}\\ &=\frac{f'_{y'}}{(x'-a)\cos\nu+(y'-b)+(z'-c)\cos\lambda}\\ &=\frac{f'_{z'}}{(x'-a)\cos\mu+(y'-b)\cos\lambda+(z'-c)};\end{aligned}\right.$$

où λ, μ, ν sont les angles des axes.

Ces équations (IV) existent pour toute droite menée du centre à un sommet quelconque de la surface; il suffit donc d'y supprimer les accents des variables pour avoir les équations qui déterminent les axes de la surface (4).

344. Grandeur des axes des surfaces du second degré. — Dans les équations des axes (IV), où x, y, z désignent les

coordonnées d'un sommet,

$$(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{f'_x}{(x-a)+(y-b)\cos\nu+(z-c)\cos\mu} \\ &=\frac{f'_y}{(x-a)\cos\nu+(y-b)+(z-c)\cos\lambda} \\ &=\frac{f'_z}{(x-a)\cos\mu+(y-b)\cos\lambda+(z-c)}, \end{aligned}\right.$$

multiplions les deux termes de la première fraction par $x-a$, ceux de la seconde par $x-b$ et les termes de la troisième par $z-c$, puis faisons la somme des numérateurs et celle des dénominateurs; nous obtenons une fraction, dont le numérateur, en vertu de l'équation (6), est égal à $-2\mathrm{H}$ et dont le dénominateur est égal à R^2, R désignant la distance du centre au sommet.

Nous formons ainsi les trois équations

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}^2 f'_x + 2\mathrm{H}\,[x-a+(y-b)\cos\nu+(z-c)\cos\mu]=0, \\ &\mathrm{R}^2 f'_y + 2\mathrm{H}\,[(x-a)\cos\nu+y-b+(z-c)\cos\lambda]=0, \\ &\mathrm{R}^2 f'_z + 2\mathrm{H}\,[(x-a)\cos\mu+(y-b)\cos\lambda+(z-c)]=0, \end{aligned}$$

que nous pouvons transformer.

En effet, l'équation (5) donne pour les demi-dérivées les valeurs

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}f'_x = \mathrm{A}\,(x-a)+\mathrm{B}''(y-b)+\mathrm{B}''(z-c), \\ &\tfrac{1}{2}f'_y = \mathrm{B}''(x-a)+\mathrm{A}'(y-b)+\mathrm{B}\,(z-c), \\ &\tfrac{1}{2}f'_z = \mathrm{B}'(x-a)+\mathrm{B}\,(y-b)+\mathrm{A}''(z-c); \end{aligned}$$

en les substituant dans les trois équations qui précèdent, on les change en

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{AR}^2+\mathrm{H})(x-a)+(\mathrm{B}''\mathrm{R}^2+\mathrm{H}\cos\nu)(y-b) \\ &\qquad\qquad +(\mathrm{B}'\mathrm{R}^2+\mathrm{H}\cos\mu)(z-c)=0, \\ &(\mathrm{B}''\mathrm{R}^2+\mathrm{H}\cos\nu)(x-a)+(\mathrm{A}'\mathrm{R}^2+\mathrm{H})(y-b) \\ &\qquad\qquad +(\mathrm{BR}^2+\mathrm{H}\cos\lambda)(z-c)=0, \\ &(\mathrm{B}'\mathrm{R}_2+\mathrm{H}\cos\mu)(x-a)+(\mathrm{BR}^2+\mathrm{H}\cos\lambda(y-b) \\ &\qquad\qquad +(\mathrm{A}''\mathrm{R}^2+\mathrm{H})(z-c)=0. \end{aligned}\right.$$

Ces trois équations sont homogènes et du premier degré par rapport aux variables $x - a, y - b$ et $z - c$; si nous éliminons ces variables, nous obtenons la résultante

$$(\mathrm{VI})\quad \begin{vmatrix} AR^2 + H & B''R^2 + H\cos\nu & B'R^2 + H\cos\mu \\ B''R^2 + H\cos\nu & A'R^2 + H & BR^2 + H\cos\lambda \\ B'R^2 + H\cos\mu & BR^2 + H\cos\lambda & A''R^2 + H \end{vmatrix} = 0,$$

qui nous fournit les carrés des demi-axes de la surface du second degré (4).

Développons ce déterminant par la méthode de Sarrus, il nous vient

$$\begin{aligned} &(AR^2 + H)(A'R^2 + H)(A''R^2 + H) \\ &\quad + 2(BR^2 + H\cos\lambda)(B'R^2 + H\cos\mu)(B''R^2 + H\cos\nu) \\ &\quad - (AR^2 + H)(BR^2 + H\cos\lambda)^2 - (A'R^2 + H)(B'R^2 + H\cos\mu)^2 \\ &\qquad\qquad - (A''R^2 + H)(B''R^2 + H\cos\nu)^2 = 0, \end{aligned}$$

et, en effectuant,

$$(\mathrm{VII})\quad \left\{ \begin{aligned} &(AA'A'' + 2B'BB'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2)R^6 \\ &- [(B^2 - A'A'') + (B'^2 - A''A) + (B''^2 - AA) + 2(AB - B'B'')\cos\lambda \\ &\qquad + 2(A'B' - B''B)\cos\mu + 2(A''B'' - BB')\cos\nu]HR^4 \\ &+ [A\sin^2\lambda + A'\sin^2\mu + A''\sin^2\nu + 2B(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ &\qquad + 2B'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2B''(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)]H^2R^2 \\ &\qquad + (1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu)H^3 = 0. \end{aligned} \right.$$

344 *bis*. Équation d'un axe en valeur de la grandeur de cet axe. — Multiplions les égalités (10) respectivement par $BR^2 + H\cos\lambda$, $B'R^2 + H\cos\mu$, $B''R^2 + H\cos\nu$ et retranchons chaque résultat du précédent, nous obtenons les nouvelles égalités

$$(\mathrm{VIII})\quad \left\{ \begin{aligned} &[(AB - B'B'')R^4 + (B - B'\cos\nu - B''\cos\mu \\ &\qquad + A\cos\lambda)HR^2 - (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)H^2](x - a) \\ &= [(A'B' - B''B)R^4 + (B' - B''\cos\lambda - B\cos\nu \\ &\qquad + A'\cos\mu)HR^2 - (\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)H^2](y - b) \\ &= [(A''B'' - BB')R^4 + (B'' - B\cos\mu - B'\cos\lambda \\ &\qquad + A'\cos\nu)HR^2 - (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)H^2](z - c), \end{aligned} \right.$$

qui constituent les équations de l'un quelconque des trois axes en valeur de la grandeur R de cet axe.

345. Équation et grandeur des axes des surfaces du second degré, pour des coordonnées rectangulaires. — Ces équations s'obtiennent en faisant $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0$, $\sin\lambda = \sin\mu = \sin\nu = 1$ dans les formules (V), (VI), (VII) et (VIII). On trouve ainsi

$$\text{(IX)} \qquad \frac{f'_x}{x-a} = \frac{f'_y}{y-b} = \frac{f'_z}{z-c}.$$

pour les *équations aux axes;*

$$\text{(X)} \qquad \begin{vmatrix} AR^2+H & B''R^2 & B'R^2 \\ B''R^2 & A'R^2+H & BR^2 \\ B'R^2 & BR^2 & A''R^2+H \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\text{(XI)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2)R^6 \\ &\quad +(A'A''-B^2+A''A-B'^2+AA'-B''^2)HR^4 \\ &\qquad\qquad +(A+A'+A'')H^2R^2+H^3=0 \end{aligned} \right.$$

pour *l'équation qui donne la grandeur d'un axe,* et

$$\text{(XII)} \quad \left\{ \begin{aligned} &[(AB-B'B'')R^2+BH](x-a) \\ &=[(A'B'-B''B)R^2+B'H](y-b) \\ &=[(A''B''-BB')R^2+B''H](z-c) \end{aligned} \right.$$

pour les *équations d'un axe en valeur de la grandeur de cet axe.*

346. Réalité des racines de l'équation du troisième degré en S. — Soient α, β, γ les cosinus de direction, pour des axes rectangulaires, d'un système de cordes parallèles dans la surface du second degré (4); les équations de l'une de ces cordes seront

$$\text{(11)} \qquad \frac{x-a}{\alpha} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-c}{\gamma},$$

a, b, c étant les coordonnées d'un point de la corde. Le plan diamétral correspondant sera représenté par l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0,$$

dont la développée est

$$(A\alpha + B''\beta + B'\gamma)x + (B''\alpha + A'\beta + B\gamma)y$$
$$+ (B'\alpha + B\beta + A''\gamma)z + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Pour que ce plan soit perpendiculaire à la corde (11), il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha} = \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta} = \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma} = S,$$

S désignant la valeur commune de ces trois rapports.

Ces relations de condition reviennent aux trois suivantes :

$$(12) \qquad \begin{cases} (A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0, \\ B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0, \end{cases}$$

qui, pour être vérifiées par un même système de valeurs pour α, β, γ, exigent que l'on ait

$$(\text{XIII}) \qquad \begin{vmatrix} A - S & B'' & B' \\ B'' & A' - S & B \\ B' & B & A'' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit de prouver que les trois racines de cette équation sont toujours réelles.

Cette proposition a été établie de plusieurs manières, entre autres par MM. Cauchy, Kummer, Borchardt et Jacobi ; M. Sylvester l'a démontrée aussi d'une manière très-simple et fort élégante, en y appliquant la multiplication des déterminants [1]. M. Gérono l'a encore prouvée tout récemment, au moyen des déterminants, dans son journal les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, 1872, t. XI, p. 305.

La démonstration suivante nous paraît très-avantageuse par sa grande simplicité.

Multiplions les égalités (12) respectivement par B, B', B'', que nous supposons tous les trois différents de zéro ; elles

---

[1] *Philosophical Magazine*, 1852.

deviennent

$$(AB - SB)\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = 0,$$
$$B'B''\alpha + (A'B' - SB')\beta + BB'\gamma = 0,$$
$$B'B''\alpha + B''B\beta + (A''B'' - SB'')\gamma = 0.$$

Si nous posons dans celles-ci

$$AB - B'B'' = aB, \quad A'B' - B''B = a'B', \quad A''B'' - BB' = a''B''.$$

elles se changent en

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a - S)B\alpha + B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = 0, \\ (a' - S)B'\beta + B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = 0, \\ (a'' - S)B''\gamma + B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = 0, \end{array} \right.$$

lesquelles prouvent que

$$(a - S)B\alpha = (a' - S)B'\beta = (a'' - S)B''\gamma.$$

Représentons par P chacun de ces trois produits égaux; nous avons les valeurs

$$\alpha = \frac{P}{(a - S)B}, \quad \beta = \frac{P}{(a' - S)B'}, \quad \gamma = \frac{P}{(a'' - S)B''},$$

qui, étant substituées dans l'une des équations (13), nous fournissent immédiatement l'équation en S

$$1 + \frac{B'B''}{(a - S)B} + \frac{B''B}{(a' - S)B'} + \frac{BB'}{(a'' - S)B''} = 0,$$

qui devient, par l'évanouissement des dénominateurs,

$$(XIV) \quad \left\{ \begin{array}{l} BB'B''(S - a)(S - a')(S - a'') \\ \quad - B'^2B''^2(S - a')(S - a'') - B''^2B^2(S - a'')(S - a) \\ \qquad\qquad - B^2B'^2(S - a)(S - a') = 0. \end{array} \right.$$

Pour fixer les idées, supposons que le produit $BB'B''$ soit positif :

1° Admettons d'abord que les trois quantités a, a', a'' soient inégales et rangées par ordre de grandeurs croissantes.

Si, dans l'équation (XIV), nous remplaçons S successive-

ment par $-\infty$, a, a', a'' et $+\infty$, le premier membre prendra les valeurs correspondantes

$$\begin{aligned} -\infty, \quad & -B'^2B''^2(a'-a)(a''-a), \\ & +B''^2B^2(a''-a')(a'-a), \\ & -B^2B'^2(a''-a)(a''-a'), \quad +\infty, \end{aligned}$$

qui présentent trois variations; donc l'équation (XIV) a une racine comprise entre a et a', une autre entre a' et a'' et la troisième entre a'' et $+\infty$.

2° Si deux des trois quantités a, a', a'', par exemple a' et a'', sont égales, l'équation (XIV) se réduira à

$$(S-a')[B'B''(S-a')\{B(S-a)-B'B''\}-B^2(B'^2+B''^2)(S-a)]=0$$

et admettra une racine comprise entre a et a', une seconde égale à a' et la troisième plus grande que a'.

3° Si les trois quantités a, a', a'' sont égales entre elles, l'équation (XIV) a deux racines égales à a et la troisième plus grande que a.

§ III. — Les surfaces cylindriques du second degré.

347. Condition pour qu'une surface

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

soit cylindrique. — Cette surface sera un cylindre parallèle à la droite

$$(2) \qquad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

si le plan tangent

$$(3) \qquad (x-x')f'_{x'}+(y-y')f'_{y'}+(z-z')f'_{z'}=0,$$

mené en un point quelconque (x, y, z) de la surface (1), contient la droite

$$(4) \qquad \frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}=u,$$

qui est menée par le même point (x', y', z') parallèlement à la

droite (2). On obtient de la sorte, entre les quatre inconnues $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ et $-u$, les quatre équations homogènes du premier degré

$$\begin{aligned}
&0.-u+f'_{x'}(x-x')+f'_{y'}(y-y')+f'_{z'}(z-z')=0,\\
&a.-u+1.(x-x')+0.(y-y')+0.(z-z')=0,\\
&b.-u+0.(x-x')+1.(y-y')+0.(z-z')=0,\\
&c.-u+0.(x-x')+0.(y-y')+1.(z-z')=0,
\end{aligned}$$

qui, pour être compatibles, exigent que leur déterminant soit nul. On trouve ainsi la relation de condition

$$\text{(I)}\qquad \begin{vmatrix} 0 & f'_{x'} & f'_{y'} & f'_{z'} \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui doit exister quel que soit le point (x', y', z') de la surface (1).

Cette relation, qui, par la suppression des accents, revient à

$$\text{(II)}\qquad af'_x + bf'_y + cf'_z = 0,$$

se nomme l'*équation aux différences partielles des surfaces cylindriques* parallèles à la droite (2). Elle s'obtient immédiatement en remplaçant dans (3) $x - x'$, $y - y'$ et $z - z'$ par leurs valeurs tirées des équations (4).

348. Conditions pour que l'équation générale des surfaces du second degré représente un cylindre. — Dans la relation (II) remplaçons f'_x, f'_y, f'_z par les expressions qu'en fournit l'équation

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy\\
+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0;
\end{aligned}$$

nous obtenons l'égalité

$$\begin{aligned}
a(Ax + B''y + B'z + C) + b(B''x + A'y + Bz + C')\\
+ c(B'x + By + A''z + C'') = 0,
\end{aligned}$$

ou, en ordonnant par rapport à x, y, z,

$$(Aa+B''b+B'c)x+(B''a+A'b+Bc)y$$
$$+(B'a+Bb+A''c)z+Ca+C'b+C''c=0.$$

Cette dernière égalité devant avoir lieu pour toutes les valeurs de x, y, z, qui satisfont à l'équation (5) de la surface, exige que l'on ait à la fois

$$(6)\qquad \begin{cases} Aa+B''b+B'c=0, \\ B''a+A'b+Bc=0, \\ B'a+Bb+A''c=0, \\ Ca+C'b+C''c=0. \end{cases}$$

Ces quatre équations sont homogènes et du premier degré par rapport aux trois inconnues a, b, c; pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que, étant considérées trois par trois, elles fournissent des déterminants nuls. On obtient ainsi les quatre relations

$$(\mathrm{III})\qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}=0;$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{vmatrix} B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \\ A & B'' & B' \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} C & C' & C'' \\ A & B'' & B' \\ B'' & A & B \end{vmatrix}=0,$$

dont deux quelconques sont une conséquence des deux autres.

En développant ces déterminants, on a les équations

$$(\mathrm{V})\qquad AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2=0;$$

$$(\mathrm{VI})\qquad \begin{cases} C(B^2-A'A'')+C'(A''B''-BB')+C''(A'B'-B''B)=0, \\ C'(B'^2-A''A)+C''(A\ B-B'B'')+C(A''B''-BB')=0, \\ C''(B''^2-AA')+C(A'B'-B''B)+C'(AB-B'B'')=0. \end{cases}$$

349. Reprenons les équations (6). Si nous éliminons c entre la première de ces équations et la seconde, a entre la seconde

et la troisième, nous obtiendrons les égalités

$$(7)\qquad a(AB - B'B'') = b(A'B' - B''B) = c(A''B'' - BB');$$

divisant les trois termes de la dernière des équations (6) par ces trois quantités égales, on trouve la relation

$$(\text{VII})\qquad \frac{C}{AB - B'B''} + \frac{C'}{A'B' - B''B} + \frac{C''}{A''B'' - BB'} = 0$$

ou

$$(\text{VIII})\qquad \begin{vmatrix} 0 & C & C' & C \\ 1 & AB - B'B'' & 0 & 0 \\ & 0 & A'B' - B''B & 0 \\ 1 & 0 & 0 & A''B'' - BB' \end{vmatrix} = 0,$$

qu'il suffit de joindre à la relation (III) pour avoir les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (5) représente un cylindre.

350. Direction du cylindre. — Multiplions membres à membres les équations (2) et (7); nous trouvons

$$(\text{IX})\qquad x(AB - B'B'') = y(A'B' - B''B) = z(A''B'' - BB')$$

pour les *équations de la droite menée par l'origine parallèlement au cylindre.*

Le plan, mené par l'origine perpendiculairement aux génératrices du cylindre, est représenté, dans le cas d'axes rectangulaires, par l'équation

$$(\text{X})\qquad \frac{x}{AB - B'B''} + \frac{y}{A'B' - B''B} + \frac{z}{A''B'' - BB'} = 0.$$

351. Équation du cylindre parallèle à une droite donnée (2), qui est circonscrit à la surface du second degré (348). — Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M d'une génératrice CM de ce cylindre, et par x', y', z' celles du point de contact C de cette génératrice avec la surface (348). Cette génératrice, devant être parallèle à la droite (2), est re-

présentée par les équations

$$(8)\qquad \frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}=\lambda,$$

qui donnent

$$x'=x+a\lambda,\quad y'=y+b\lambda,\quad z'=z+c\lambda,$$

où la valeur de l'indéterminée λ dépend de la position du point de contact C sur la génératrice CM.

Le point de contact C appartenant à la surface (348), on a

$$f(x',y',z')=f(x+a\lambda,\ y+b\lambda,\ z+c\lambda)=0,$$

ou

$$f(x,y,z)+\lambda(af'_x+bf'_y+cf'_z)+\lambda^2F(a,b,c)=0,$$

en posant

$$F(a,b,c)=Aa^2+A'b^2+A''c^2+2Bbc+2B'ca+2B''ab.$$

Mais la génératrice (8) ne rencontrant la surface (348) qu'en un seul point, la quantité λ ne saurait avoir qu'une seule valeur : par suite les deux racines de l'équation précédente sont égales. On trouve ainsi, entre les coordonnées x, y, z d'un point quelconque M du cylindre, la relation

$$(\mathrm{XI})\qquad (af'_x+bf'_y+cf'_z)^2-4f(x,y,z)F(a,b,c)=0,$$

qui est *l'équation* demandée *du cylindre*.

352. Courbe de contact de ce cylindre. — L'équation précédente est satisfaite par les coordonnées des points situés à la fois sur la surface (348) et dans le plan

$$(9)\qquad af'_x+bf'_y+cf'_z=0;$$

par conséquent le cylindre (XI) touche la surface (348) le long de la courbe située dans le plan (9) ou dans le plan

$$(\mathrm{XII})\quad \left\{\begin{aligned}&(Aa+B''b+B'c)x+(B''a+A'b+Bc)y\\&\quad+(B'a+Bb+A''c)z+Ca+C'b+C''c=0.\end{aligned}\right.$$

353. Exemple. — *Circonscrire à l'ellipsoïde*

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2=1$$

un cylindre parallèle à la droite (2). Puisque

$$f'_x = 2Ax, \quad f'_y = 2A'y, \quad f'_z = 2A''z,$$

et que

$$F(a, b, c) = Aa^2 + A'b^2 + A''c^2,$$

l'équation du cylindre en question sera

$$\begin{aligned}&(Aax + A'by + A''cz)^2\\ &\quad = (Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 - 1)(Aa^2 + A'b^2 + A''c^2).\end{aligned}$$

Si l'ellipsoïde est donné sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et que R soit le demi-diamètre parallèle au cylindre; α, β, γ les inclinaisons de ce diamètre sur les trois axes, on trouvera que l'équation du cylindre circonscrit est

$$R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

354. Équation du cylindre circonscrit à la surface du second degré (348) et qui touche cette surface suivant son intersection avec le plan

$$(10) \qquad px + qy + rz + s = 0.$$

Ce cylindre sera parallèle à la droite (2) si le plan (9) ou (XII) est identique avec le plan donné (10), c'est-à-dire si l'on a les égalités

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{Aa + B''b + B'c}{p} = \frac{B''a + A'b + Bc}{q}\\ &\qquad = \frac{B'a + Bb + A''c}{r} = \frac{Ca + C'b + C''c}{s} = \lambda.\end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux termes des trois premières de ces fractions respectivement par a, b, c et faisons la somme des numérateurs et celle des dénominateurs; nous obtenons l'égalité

$$Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab = (pa + qb + rc)\lambda.$$

qui, jointe aux trois premières des égalités (11), fournit le système des quatre équations

$$\begin{aligned}
-F(a,b,c)+\lambda pa+\lambda qb+\lambda rc&=0,\\
-\lambda p+Aa+B''b+B'c&=0,\\
-\lambda q+B''a+A'b+Bc&=0,\\
-\lambda r+B'a+Bb+A''c&=0,
\end{aligned}$$

entre les trois inconnues a, b, c au premier degré. Éliminant ces inconnues, on trouve la relation

$$\begin{vmatrix} F(a,b,c) & \lambda p & \lambda q & \lambda r \\ \lambda p & A & B'' & B' \\ \lambda q & B'' & A' & B \\ \lambda r & B' & B & A'' \end{vmatrix}=0,$$

qui donne

$$(12)\qquad F(a,b,c)=-\lambda^2\begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ p & A & B'' & B' \\ q & B'' & A' & B \\ r & B' & B & A'' \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Multiplions les deux termes des quatre fractions (11) respectivement par $2x$, $2y$, $2z$ et 2, et faisons encore la somme des numérateurs et celle des dénominateurs; nous obtenons l'équation

$$\begin{aligned}
&2(Aa+B''b+B'c)x+2(B''a+A'b+Bc)y\\
&\quad+2(B'a+Bb+A''c)z+2(Ca+C'b+C''c)\\
&\quad=2\lambda(px+qy+rz+s),
\end{aligned}$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&2a(Ax+B''y+B'z+C)\\
&\quad+2b(B''x+A'y+Bz+C')+2c(B'x+By+A''z+C'')\\
&\quad=2\lambda(px+qy+rz+s),
\end{aligned}$$

ou encore

$$(13)\qquad af'_x+bf'_y+cf'_z=2\lambda(px+qy+rz+s).$$

Il nous suffira maintenant de substituer les valeurs (12) et (13) dans l'équation (XI), pour avoir l'équation

$$(\text{XIII})\quad \left\{\begin{array}{l} f(x,y,z)\begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ p & A & B'' & B' \\ q & B'' & A' & B \\ r & B' & B & A'' \end{vmatrix} \\ \qquad + (px+qy+rz+s)^2 \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A' \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

du cylindre circonscrit à la surface du second degré (348), qui touche cette surface suivant son intersection avec le plan (10).

355. **Exemple.** — *Circonscrire au paraboloïde*

$$(14)\qquad f(x,y,z) = A'y^2 + A''z^2 - 2x = 0$$

un cylindre qui touche la surface suivant le plan

$$(15)\qquad lx + my + nz + r = 0.$$

Pour les paraboloïdes, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

se réduit à zéro; par conséquent la formule précédente (XIII) leur est inapplicable.

Dans ce cas on a recours à l'équation non transformée (XI), où l'on remplace a, b, c par les valeurs que l'on trouve, en identifiant les deux équations (9) et (15)

$$af'_x + bf'_y + cf'_z = 0 \quad \text{et} \quad lx + my + nz + r = 0.$$

On voit d'abord que $l = 0$, ce qui réduit le plan de la ligne de contact à

$$(16)\qquad my + nz + r = 0.$$

Donc, *lorsqu'un cylindre est circonscrit à un paraboloïde, la*

courbe de contact est située dans un plan parallèle à l'axe du paraboloïde.

On trouve ensuite que

$$af'_x + bf'_y + cf'_z = 2(A'by + A''cz - a) = 2\lambda(my + nz + r),$$

ce qui donne

$$a = r\lambda, \quad b = \frac{m\lambda}{A'}, \quad c = \frac{n\lambda}{A''},$$

et, par suite,

$$F(a, b, c) = A'b^2 + A''c^2 = \lambda^2\left(\frac{m^2}{A'} + \frac{n^2}{A''}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (XI), on obtient

$$(my + nz + r)^2 = (A'y^2 + A''z^2 - 2x)\left(\frac{m^2}{A'} + \frac{n^2}{A''}\right),$$

pour l'*équation du cylindre circonscrit au paraboloïde* (14), *et touchant cette surface suivant une courbe située dans le plan* (16).

Si le plan de la courbe de contact est en même temps parallèle à l'axe des y et situé à une distance d du plan des xy, le cylindre circonscrit au paraboloïde

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$$

aura pour équation

$$qy^2 - 2pqx + 2pdz - pd^2 = 0.$$

Pour $d = 0$, le cylindre touche le paraboloïde suivant la parabole

$$y^2 = 2px, \quad z = 0.$$

§ IV. — Les surfaces de révolution du second degré.

336. Condition pour qu'une surface

(1) $$f(x, y, z) = 0$$

soit de révolution. — Soient x, y, z les coordonnées d'un point quel-

conque de la surface (1). La normale en ce point a pour équations

$$(2)\qquad \frac{X-x}{f'_x}=\frac{Y-y}{f'_y}=\frac{Z-z}{f'_z}=u,$$

les axes des coordonnées étant rectangulaires, et X, Y, Z désignant les coordonnées courantes.

La surface (1) sera évidemment de révolution autour de la droite

$$(3)\qquad \frac{X-p}{a}=\frac{Y-q}{b}=\frac{Z-r}{c}=v,$$

si cette ligne est toujours rencontrée par la normale (2), quel que soit le point M ou (x, y, z) de la surface (1). Pour que cela ait toujours lieu, il faut et il suffit que les équations (2) et (3) admettent toujours un même système de valeurs pour X, Y, Z.

Ces équations (2) et (3), au nombre de six, contiennent au premier degré les cinq inconnues X, Y, Z, u et v; si donc nous éliminons ces cinq inconnues entre les six équations (2) et (3), nous obtiendrons une relation entre les paramètres de la surface donnée (1), ceux de l'équation (3) et les coordonnées x, y, z du point M.

Cette relation se calcule aisément. En effet, les équations (2) et (3) pouvant s'écrire

$$X-uf'_x-x=0,\quad Y-uf'_y-y=0,\quad Z-uf'_z-z=0,$$
$$av-X+p=0,\quad bv-Y+q=0,\quad cv-Z+r=0,$$

nous éliminerons d'abord X, Y, Z, en ajoutant verticalement, ce qui nous fournit les trois équations

$$av-uf'_x-(x-p)=0,$$
$$bv-uf'_y-(y-q)=0,$$
$$cv-uf'_z-(z-r)=0,$$

entre les deux inconnues u et v.

Pour que ces trois équations soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. Nous trouvons ainsi la relation demandée

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{vmatrix} a & f'_x & x-p \\ b & f'_y & y-q \\ c & f'_z & z-r \end{vmatrix}=0,$$

dans laquelle nous avons changé les signes des éléments des deux dernières colonnes.

Cette relation est l'*équation aux différences partielles des surfaces de révolution*. Elle doit exister, quelle que soit la position du point M sur la surface (1), ou quelles que soient les valeurs des coordonnées x, y, z satisfaisant à l'équation (1). Si on la développe, elle prendra la forme

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a}\left(\frac{y-q}{b}-\frac{z-r}{c}\right)f'_x+\frac{1}{b}\left(\frac{z-r}{c}-\frac{x-p}{a}\right)f'_y\\ &\qquad\qquad+\frac{1}{c}\left(\frac{x-p}{a}-\frac{y-q}{b}\right)f'_z=0.\end{aligned}\right.$$

357. Conditions pour que l'équation générale du second degré

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z)&=\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2\\ &+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}''z+\mathrm{D}=0\end{aligned}\right.$$

représente une surface de révolution. — L'axe de révolution passe nécessairement par le centre de la surface, lequel est déterminé par le système des trois équations

$$f'_x=0,\quad f'_y=0,\quad f'_z=0.$$

Les équations de l'axe sont par suite de la forme

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{AX}+\mathrm{B}''\mathrm{Y}+\mathrm{B}'\mathrm{Z}+\mathrm{C}}{\alpha}&=\frac{\mathrm{B}''\mathrm{X}+\mathrm{A}'\mathrm{Y}+\mathrm{BZ}+\mathrm{C}'}{\alpha'}\\ &=\frac{\mathrm{B}'\mathrm{X}+\mathrm{BY}+\mathrm{A}''\mathrm{Z}+\mathrm{C}''}{\alpha''}=v,\end{aligned}\right.$$

où α, α', α'' sont trois constantes indéterminées et v une inconnue.

Dans ces équations (5) substituons à X, Y, Z leurs valeurs

$$\mathrm{X}=x+uf'_x,\quad \mathrm{Y}=y+uf'_y,\quad \mathrm{Z}=z+uf'_z,$$

tirées des équations (2) de la normale ; la première devient

$$\begin{aligned} av&=\mathrm{A}(x+uf'_x)+\mathrm{B}''(y+uf'_y)+\mathrm{B}'(z+uf'_z)+\mathrm{C}\\ &=\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'z+\mathrm{C}+u(\mathrm{A}f'_x+\mathrm{B}''f'_y+\mathrm{B}'f'_z)\\ &=\tfrac{1}{2}f'_x+u(\mathrm{A}f'_x+\mathrm{B}''f'_y+\mathrm{B}'f'_z).\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les trois équations

$$\begin{aligned} -2\alpha v+f'_x+2u(\mathrm{A}f'_x+\mathrm{B}''f'_y+\mathrm{B}'f'_z)&=0,\\ -2\alpha' v+f'_y+2u(\mathrm{B}''f'_x+\mathrm{A}'f'_y+\mathrm{B}f'_z)&=0,\\ -2\alpha'' v+f'_z+2u(\mathrm{B}'f'_x+\mathrm{B}f'_y+\mathrm{A}''f'_z)&=0,\end{aligned}$$

entre les deux inconnues $-2v$ et $2u$. Éliminant ces inconnues, nous trouvons la relation de condition

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & f'_x & A f'_x + B'' f'_y + B' f'_z \\ \alpha' & f'_y & B'' f'_x + A' f'_y + B f'_z \\ \alpha'' & f'_z & B' f'_x + B f'_y + A'' f'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant doit être identiquement nul, quelle que soit la position du point M sur la surface (4); par suite il faut et il suffit que les deux colonnes variables, la seconde et la troisième, ne diffèrent que par un facteur constant.

Soit s ce facteur, qui rend les éléments de la seconde colonne égaux à ceux de la troisième; nous obtenons les trois équations

$$\begin{aligned} sf'_x &= A f'_x + B'' f'_y + B' f'_z, \\ sf'_y &= B'' f'_x + A' f'_y + B f'_z, \\ sf'_z &= B' f'_x + B f'_y + A'' f'_z. \end{aligned}$$

Considérons le cas où les coefficients B, B', B'' des rectangles des variables sont tous différents de zéro.

Si nous éliminons f'_z entre la première et la seconde de ces équations, f'_x entre la seconde et la troisième, il nous vient

$$(Bs - AB + B'B'')f'_x = (B's - A'B' + B''B)f'_y = (B''s - A''B'' + BB')f'_z.$$

Or dans ces trois produits les facteurs f'_x, f'_y, f'_z sont variables : car leurs valeurs changent avec la position du point (x, y, z) sur la surface (4); par suite, pour que ces égalités soient possibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$0 = Bs - AB + B'B'' = B's - A'B' + B''B = B''s - A''B'' + BB'.$$

On en déduit les relations de condition connues

$$\text{(IV)} \qquad s = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

358. **Forme implicite des équations de l'axe de révolution.** — Nous l'obtiendrons au moyen des égalités (5) en y substituant les valeurs propres de α, α', α'' que nous allons calculer.

Dans le déterminant (III) multiplions les trois lignes respectivement par B, B', B''; puis, dans ce résultat, remplaçons AB, A'B', A''B'' par leurs

valeurs $Bs + B'C''$, $B's + B''B$, $B''s + BB'$ tirées des relations (IV); l'équation (III) devient

$$\begin{vmatrix} B\alpha & Bf'_x & sBf'_x + B'B''f'_x + B''Bf'_y + BB'f'_z \\ B'\alpha' & B'f'_y & sB'f'_y + B'B''f'_x + B''Bf'_y + BB'f'_z \\ B''\alpha'' & B''f'_z & sB''f'_z + B'B''f'_x + B''Bf'_y + BB'f'_z \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en retranchant s fois la seconde colonne de la troisième et en divisant la différence obtenue par $B'B''f'_x + B''Bf'_y + BB'f'_z$,

$$\begin{vmatrix} B\alpha & f'_x & 1 \\ B'\alpha' & f'_y & 1 \\ B''\alpha'' & f'_z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette égalité puisse avoir lieu, quels que soient x, y, z, il faut et il suffit que les colonnes à éléments constants ne diffèrent que par un facteur m; on a donc $B\alpha = B'\alpha' = B''\alpha'' = 1 \times m = m$; d'où l'on tire

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{B}{m}, \quad \frac{1}{\alpha'} = \frac{B'}{m}, \quad \frac{1}{\alpha''} = \frac{B''}{m}.$$

Substituons ces valeurs dans les égalités (5) et prenons x, y, z pour les coordonnées courantes, nous obtenons immédiatement

$$\begin{aligned} B(Ax + B''y + B'z + C) &= B'(B''x + A'y + Bz + C') \\ &= B''(B'x + By + A''z + C'') \end{aligned}$$

ou

$$\text{(V)} \qquad Bf'_x = B'f'_y = B''f'_z,$$

pour les équations de l'axe de révolution. *Voir*, pour plus de développements, notre *Théorie générale des surfaces de révolution du second degré* (¹).

(¹) G. Dostor, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XI, p. 362, et *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1873, t. LV, p. 302.

LIVRE IV.

LES DISCRIMINANTS ET LES INVARIANTS.

CHAPITRE PREMIER.

LES DISCRIMINANTS.

§ I. Définition et calcul des discriminants. — § II. Application des discriminants aux courbes du second degré. — § III. Le plan tangent aux surfaces du second degré. — § IV. Les surfaces coniques du second degré.

§ I. — Définition et calcul des discriminants.

359. Définition. — Étant donnée une fonction homogène de n variables, si l'on prend la dérivée de cette fonction par rapport à chacune de ces n variables, le résultant de ces n dérivées, égalées à zéro, se nomme le *discriminant* de la fonction.

Lorsque la fonction est du second degré, ses dérivées seront du premier degré. Si l'on égale ces dérivées à zéro, on obtiendra n équations homogènes du premier degré par rapport à n variables. L'élimination de ces n variables entre les n équations fournira précisément leur déterminant. Il s'ensuit que :

Le discriminant d'une fonction homogène du second degré à n variables est le déterminant des premiers membres des n équations que l'on obtient, en égalant à zéro les n dérivées de la fonction, prises par rapport à ces n variables.

Nous représenterons par $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$, $\mathfrak{D}_4$, ... les discriminants des fonctions homogènes du second degré à 2, 3, 4, ... variables.

360. Discriminants des fonctions homogènes du second degré. — 1° Le discriminant de la fonction homogène *à deux variables*

$$(1)\qquad f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

est le résultant des deux équations

$$\tfrac{1}{2}f'_x = Ax + By = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'_y = Bx + Cy = 0,$$

c'est-à-dire le déterminant (136)

$$(\mathrm{I})\qquad \mathfrak{D}_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

2° Le discriminant de la fonction homogène *à trois variables*

$$(2)\quad f(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2,$$

est de même le résultant des trois équations

$$\tfrac{1}{2}f'_x = Ax + By + Dz = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'_y = Bx + Cy + Ez = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f'_z = Dx + Ey + Fz = 0,$$

ou bien le déterminant

$$(\mathrm{II})\quad \mathfrak{D}_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ C & E & F \end{vmatrix} = ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2.$$

Si la fonction précédente était donnée sous la forme

$$(3)\quad f(x,y,z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy,$$

le discriminant serait

$$(\mathrm{III})\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{D}_3 &= \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \\ &= AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2. \end{aligned} \right.$$

3° Soit donnée la fonction homogène du second degré *à quatre variables*

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z,t) = {} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ & + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2. \end{aligned}\right.$$

Égalons à zéro les demi-dérivées de cette fonction prises successivement par rapport aux quatre variables x, y, z, t; nous formerons les quatre équations

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}f'_x &= A\,x + B''y + B'\,z + C\,t = 0, \\ \tfrac{1}{2}f'_y &= B''x + A'y + B\,z + C't = 0, \\ \tfrac{1}{2}f'_z &= B'\,x + B\,y + A''z + C''t = 0, \\ \tfrac{1}{2}f'_t &= C\,x + C'y + C''z + D\,t = 0, \end{aligned}$$

dont le résultant est le déterminant

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix};$$

c'est le discriminant demandé.

Ce discriminant, que nous représenterons par Δ_4, joue un grand rôle dans l'analyse des surfaces du second degré; il se développe suivant le polynôme

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_4 = {} & D(AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2) \\ & + C^2(B^2 - A'A'') + C'^2(B'^2 - A''A) + C''^2(B''^2 - AA') \\ & + 2C'C''(AB - B'B'') + 2C''C(A'B' - B''B) + 2CC'(A''B'' - BB'). \end{aligned}\right.$$

361. Discriminant de la fonction homogène du troisième degré à deux variables.

$$(5)\qquad f(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

De cette égalité nous tirons les quatre équations homogènes (146)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}xf'_x &= ax^3 + 2bx^2y + cxy^2 = 0, \\ \tfrac{1}{3}yf'_x &= ax^2y + 2bxy^2 + cy^3 = 0, \\ \tfrac{1}{3}xf'_y &= bx^3 + 2cx^2y + dxy^2 = 0, \\ \tfrac{1}{3}yf'_y &= bx^2y + 2cxy^2 + dy^3 = 0, \end{aligned}$$

entre les quatre inconnues x^3, x^2y, xy^2, y^3. Éliminant ces variables, on obtient le discriminant

$$(\mathrm{VI})\qquad \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^2 - 4(b^2-ac)(c^2-bd).$$

362. Discriminant de la fonction homogène du quatrième degré à deux variables

$$(6)\qquad f(x,y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Egalons encore à zéro les dérivées de cette fonction prises par rapport à x et y; nous formons les deux équations

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0,$$
$$bx^3 + 3cx^2y + 3dxy^2 + ey^3 = 0.$$

Multiplions-les successivement par x^2, xy, y^2; nous en tirons les six équations

$$\begin{aligned} ax^5 + 3bx^4y + 3cx^3y^2 + dx^2y^3 &= 0, \\ ax^4y + 3bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + dxy^4 &= 0, \\ ax^3y^2 + 3bx^2y^3 + 3cxy^4 + dy^5 &= 0, \\ bx^5 + 3cx^4y + 3dx^3y^2 + cx^2y^3 &= 0, \\ bx^4y + 3cx^3y^2 + 3dx^2y^3 + exy^4 &= 0, \\ bx^3y^2 + 3cx^2y^3 + 3dxy^4 + ey^5 &= 0, \end{aligned}$$

entre les six inconnues x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5. L'élimination de ces variables nous fournit le discriminant

$$(\mathrm{VII})\qquad \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3c & 3d & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix} = \begin{cases} (ae - 4bd + 3c^2)^2 \\ \quad + 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2. \end{cases}$$

§ II. — Application des discriminants aux courbes du second degré.

363. Condition pour que l'équation générale du second degré à deux variables

$$(1)\quad f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

représente deux droites qui se coupent. — Dans ce cas, le centre est nécessairement situé sur la courbe (1). Soient donc a, b, c les coordonnées homogènes de ce centre et

$$(2)\quad f(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Ez + Fz^2 = 0$$

l'équation homogène de la courbe. On a (200)

$$2f(x,y,z) = xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0;$$

et, comme les coordonnées a, b, c doivent satisfaire à cette équation, il vient

$$af'_a + bf'_b + cf'_c = 0.$$

Mais on sait que les coordonnées du centre annulent les dérivées f'_x et f'_y, de sorte que $f'_a = 0$ et $f'_b = 0$; par suite on a aussi $f'_c = 0$.

Les coordonnées a, b, c du centre satisfont donc simultanément aux trois équations

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}f'_x &= Ax + By + Dz = 0,\\
\tfrac{1}{2}f'_y &= Bx + Cy + Ez = 0,\\
\tfrac{1}{2}f'_z &= Dx + Ey + Fz = 0,
\end{aligned}$$

qui, pour être compatibles, exigent que leur déterminant soit nul. On trouve ainsi la relation de condition

$$(\mathrm{I})\qquad \mathfrak{D}_2 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Donc (360, 2°) : *Pour que l'équation du second degré à deux variables représente deux droites concourantes, il faut et il suffit que le discriminant de son premier membre, rendu homogène, soit égal à zéro.*

364. Condition pour que l'équation générale du second degré (1) représente deux droites parallèles [1]. — L'équation (1) représentera deux droites parallèles à la droite

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

si toute tangente

$$(x - x')f'_{x'} + (y - y')f'_{y'} = 0$$

est parallèle à cette droite, c'est-à-dire si l'équation

$$(3) \qquad af'_{x'} + bf'_{y'} = 0$$

est vérifiée, quelles que soient les coordonnées x', y' du point de contact.

Or l'équation précédente (3) revient à

$$(Aa + Bb)x' + (Ba + Cb)y' + Da + Eb = 0;$$

et, pour que celle-ci soit satisfaite par les coordonnées de tout point de la courbe (1), il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$\begin{aligned} Aa + Bb &= 0, \\ Ba + Cb &= 0, \\ Da + Eb &= 0. \end{aligned}$$

Ces trois équations ne sauraient être satisfaites par les mêmes valeurs des paramètres a et b, que si l'on a les trois relations

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix} = 0,$$

---

[1] Quoique cette question soit indépendante des discriminants, elle trouve ici sa place, à la suite de l'équation de deux droites concourantes.

qui reviennent à

$$\text{(III)} \qquad B^2 - AC = 0, \quad BD - AE = 0, \quad BE - CD = 0.$$

Chacune de ces trois égalités est une conséquence des deux autres. Elles peuvent s'écrire

$$\text{(IV)} \qquad \frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

Les équations des deux parallèles seront

$$\text{(V)} \qquad Ax + By + D = \pm\sqrt{D^2 - 2AF}.$$

365. Condition pour que la droite

$$(4) \qquad ax + by + cz = 0$$

soit tangente à la conique (2). — Soient x', y', z' les coordonnées homogènes du point de contact. L'équation homogène de la tangente sera

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} = 0;$$

elle sera identique avec l'équation (4) de la droite, si l'on a

$$\frac{f'_{x'}}{a} = \frac{f'_{y'}}{b} = \frac{f'_{z'}}{c} = 2\lambda,$$

ou

$$f'_{x'} = 2a\lambda, \quad f'_{y'} = 2b\lambda, \quad f'_{z'} = 2c\lambda.$$

Nous avons ainsi, pour déterminer x', y', z' et λ, les quatre équations

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} 0.\lambda + a\,x' + b\,y' + c\,z' &= 0, \\ -a.\lambda + A\,x' + B\,y' + D\,z' &= 0, \\ -b.\lambda + B\,x' + C\,y' + E\,z' &= 0, \\ -c.\lambda + D\,x' + E\,y' + F\,z' &= 0, \end{aligned}\right.$$

dont la première exprime que le point de contact (x', y', z') est situé sur la tangente (4).

Ces équations du premier degré sont homogènes entre les quatre inconnues $-\lambda$, x', y', z'; elles ne seront compatibles

que si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\text{(VI)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & A & B & D \\ b & B & C & E \\ c & D & E & F \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation de condition demandée.

366. Considérons la fonction

$$(6) \qquad F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - 2\lambda(ax + by + cz),$$

des quatre variables x, y, z et λ, et égalons à zéro les dérivées de cette fonction prises successivement par rapport à ces quatre variables; nous obtenons les quatre équations (5). Il s'ensuit que le premier membre de la relation (VI) est précisément le discriminant de la fonction (6). De là le théorème suivant :

Pour qu'une droite $ax + by + cz = 0$ soit tangente à une courbe du second degré $f(x, y, z) = 0$, il faut et il suffit que l'on obtienne zéro pour le discriminant de la fonction que l'on forme, en ajoutant au premier membre de l'équation de la courbe le double produit du premier membre de l'équation de la droite par une nouvelle variable λ.

367. Condition pour que la ligne du second degré (2) soit tangente à l'un des axes de coordonnées. — Supposons que la conique (1) soit tangente à l'axe des x; l'équation de cet axe étant $y = 0$, il faudra faire $a = c = 0$ dans l'équation (4) de la tangente, ainsi que dans la relation de condition (VI). Le premier membre de celle-ci devient ainsi

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & A & B & D \\ b & B & C & E \\ 0 & D & E & F \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ A & B & D \\ D & E & F \end{vmatrix} = -b^2 \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} = b^2(D^2 - AF).$$

Comme b est différent de zéro, il faudra que l'on ait

$$D^2 - AF = 0.$$

La conique sera tangente aux deux axes, si l'on a en même temps

$$\text{(VII)} \qquad D^2 - AF = 0, \quad E^2 - CF = 0.$$

Dans ce cas, l'équation de la conique prend une forme particulière que nous pouvons déterminer.

Multiplions par F tous les termes de l'équation (1), et dans le résultat remplaçons AF et CF par leurs équivalents D^2 et E^2 tirés de (VII); cette équation devient

$$D^2x^2 + E^2y^2 + 2BFxy + 2DFx + 2EFy + F^2 = 0,$$

ou

$$(Dx + Ey + F)^2 = -2BFxy.$$

En posant $-2BF = P$, on voit que

$$\text{(VIII)} \qquad (Dx + Ey + F)^2 = Pxy$$

est l'*équation générale des coniques qui sont tangentes aux deux axes de coordonnées*. La droite $Dx + Ey + F = 0$ est la polaire de l'origine des coordonnées.

Désignons par a et b les distances à l'origine des deux points de contact et posons $\frac{F^2}{P} = k^2$; l'équation (VIII) deviendra

$$(7) \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = \frac{xy}{k^2}.$$

Considérons le triangle OAB ayant pour sommet l'origine et $OA = 2a$, $OB = 2b$ pour côtés adjacents; le troisième côté AB du triangle sera représenté par l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 = 0;$$

il est coupé par la conique (7) aux points

$$\frac{x}{a} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{ab}}, \quad \frac{y}{b} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{ab}}.$$

La courbe (7) touche les deux côtés OA et OB en leurs mi-

lieux; elle sera aussi tangente au côté AB en son milieu, si l'on a $k^2 = ab$.

Donc la conique

$$(8) \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = \frac{xy}{ab}$$

touche en leurs milieux les trois côtés du triangle OAB, dont les côtés OA, OB, issus de l'origine et dirigés suivant les axes de coordonnées, sont respectivement égaux à $2a$ et $2b$.

Les coordonnées du centre sont données par les deux équations

$$\frac{a}{2} f'_x = \frac{x}{a} + \frac{y}{2b} - 1 = 0, \quad \frac{b}{2} f'_y = \frac{x}{2a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

et ont pour valeurs

$$x = \tfrac{2}{3} a, \quad y = \tfrac{2}{3} b;$$

donc le centre de la conique (8) se trouve au centre de gravité du triangle OAB.

368. Condition pour que l'intersection des deux droites

$$(9) \qquad ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0,$$

appartienne à la conique (2). — Admettons que les deux droites (9) se coupent sur la conique (2) au point (x, y, z).

Les droites qui passent par l'intersection des deux droites (9) sont représentées par l'équation générale

$$ax + by + cz + \lambda'(a'x + b'y + c'z) = 0,$$

ou

$$(10) \qquad (a + a'\lambda')x + (b + b'\lambda)y + (c + \lambda' c')z = 0.$$

Or l'une de ces droites est tangente à la conique (2) au point d'intersection même des deux droites (9). Si l'équation (10) représente cette tangente, on devra avoir les égalités de condition

$$\frac{f'_x}{a + a'\lambda'} = \frac{f'_y}{b + b'\lambda'} = \frac{f'_z}{c + c'\lambda'} = -2\lambda.$$

Les coordonnées x, y, z du point (9) et les deux indéterminées λ et $\lambda\lambda'$ devront donc satisfaire aux cinq équations

$$\begin{aligned}
&0.\lambda + 0.\lambda\lambda' + a\,x + b\,y + c\,z = 0,\\
&0.\lambda + 0.\lambda\lambda' + a'x + b'y + c'z = 0,\\
&a.\lambda + a'.\lambda\lambda' + \mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y + \mathrm{D}\,z = 0,\\
&b.\lambda + b'.\lambda\lambda' + \mathrm{B}\,x + \mathrm{C}\,y + \mathrm{E}\,z = 0,\\
&c.\lambda + c'.\lambda\lambda' + \mathrm{D}\,x + \mathrm{E}\,y + \mathrm{F}\,z = 0,
\end{aligned}$$

dont les deux premières expriment que le point d'intersection (x, y, z) appartient aux deux droites (9).

Pour que ces cinq équations, linéaires et homogènes par rapport aux cinq inconnues λ, $\lambda\lambda'$, x, y, z, soient vérifiées par les mêmes valeurs de ces inconnues, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. La condition cherchée est donc

$$\text{(IX)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \\ a & a' & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ b & b' & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{E} \\ c & c' & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \end{vmatrix} = 0.$$

Il est facile de voir que le premier membre de cette relation est le discriminant de la fonction

$$2\lambda(ax + by + cz) + 2\lambda'(a'x + b'y + c'z) + f(x, y, z),$$

pris par rapport aux cinq variables x, y, z, λ et λ'. Par conséquent:

Pour que l'intersection de deux droites soit située sur une conique, il faut et il suffit que l'on trouve zéro pour le discriminant de la fonction que l'on obtient, en ajoutant, au premier membre de l'équation homogène de la conique, les doubles produits respectifs des premiers membres des équations homogènes des deux droites par deux nouvelles variables.

Ainsi l'intersection des deux droites

$$x + 2y - 5 = 0, \quad 2x - 3y + 4 = 0$$

appartient à la conique

$$5x^2+4xy+y^2-2x-15=0;$$

car on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -1 & -5 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ -7 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

369. Équation des tangentes menées, d'un point extérieur, à la courbe du second degré (2). — Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées homogènes du point donné P, et x, y, z celles d'un point quelconque M de l'une des deux tangentes menées de ce point P à la conique (2). L'équation de cette tangente sera

$$(11) \qquad \frac{X-x_1}{x-x_1}=\frac{Y-y_1}{y-y_1}=\frac{Z-z_1}{z-z_1},$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes de cette droite.

Désignons par x', y', z' les coordonnées du point de contact C de la tangente (11); on a évidemment (193)

$$(12) \qquad x'=\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y'=\frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda}, \quad z'=\frac{1+\lambda z_1}{1+\lambda},$$

où λ est une indéterminée, dont la valeur dépend de la position du point M sur la tangente (11).

Puisque le point C appartient à la conique (2), nous avons

$$f(x', y', z')=0,$$

ou, en ayant égard aux valeurs (12),

$$f\left(\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda}, \frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda}, \frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda}\right)$$
$$=\frac{1}{(1+\lambda)^2}f(x+\lambda x_1, y+\lambda y_1, z+\lambda z_1)=0.$$

Or on sait que (200)

$$f(x+\lambda x_1,\ y+\lambda y_1,\ z+\lambda z_1)$$
$$=f(x,y,z)+x_1\lambda f'_x+y_1\lambda f'_y+\lambda z_1 f'_z+\lambda^2 f(x_1,y_1,z_1);$$

par suite, puisque $x_1 f'_x+y_1 f'_y+z_1 f'_z=xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}$, nous avons, pour déterminer la valeur de λ, l'équation du second degré

$$\lambda^2 f(x_1,y_1,z_1)+\lambda(xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1})+f(x,y,z)=0.$$

Mais la droite (12) étant tangente, λ ne peut avoir qu'une seule et même valeur; il s'ensuit que les deux racines de l'équation précédente sont égales, ce qui nous fournit la relation

$$\text{(X)}\quad (xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1})^2-4f(x,y,z)\cdot f(x_1,y_1,z_1)=0,$$

ou

$$\text{(XI)}\quad \begin{vmatrix} 2f(x,y,z) & xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1} \\ x_1f'_x+y_1f'_y+z_1f'_z & 2f(x_1,y_1,z_1) \end{vmatrix}=0,$$

qui existe entre les coordonnées x, y, z d'un point quelconque M de l'une ou l'autre des deux tangentes issues du point $P(x_1, y_1, z_1)$; elle est donc l'équation de ces deux tangentes.

370. Équation des tangentes menées à une courbe du second degré (2) par les intersections de cette courbe avec une droite donnée

$$\text{(13)}\qquad px+qy+rz=0.$$

Si nous appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées inconnues du point de concours P de ces tangentes, le point P sera le pôle de la droite (13), qui elle-même est dite la corde de contact des deux tangentes. Or l'équation de la corde de contact des deux tangentes issues du point (x_1, y_1, z_1), c'est-à-dire l'équation

$$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=0,$$

devant être identique avec (13), on a nécessairement

$$(14)\qquad f'_{x_1}=2p\lambda,\quad f'_{y_1}=2q\lambda,\quad f'_{z_1}=2r\lambda,$$

où λ est une indéterminée.

Multiplions ces trois équations (14) par les coordonnées respectives x_1, y_1, z_1 et ajoutons; nous obtenons l'égalité

$$x_1 f'_{x_1}+y_1 f'_{y_1}+z_1 f'_{z_1}\quad\text{ou}\quad 2f(x_1, y_1, z_1)=2\lambda(px_1+qy_1+rz_1),$$

qui, jointe aux équations (14), fournit le système des quatre équations

$$\begin{aligned}
-f(x_1, y_1, z_1)+\lambda p x_1+\lambda q y_1+\lambda r z_1&=0,\\
-\lambda p\qquad\quad +\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{D}z_1&=0,\\
-\lambda q\qquad\quad +\mathrm{B}x_1+\mathrm{C}y_1+\mathrm{E}z_1&=0,\\
-\lambda r\qquad\quad +\mathrm{D}x_1+\mathrm{E}y_1+\mathrm{F}z_1&=0,
\end{aligned}$$

entre les inconnues x_1, y_1, z_1. Ces équations sont nécessairement compatibles; par suite leur déterminant est nul, ce qui nous fournit l'égalité de condition

$$\begin{vmatrix} f(x_1, y_1, z_1) & \lambda p & \lambda q & \lambda r\\ \lambda p & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{D}\\ \lambda q & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{E}\\ \lambda r & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F}\end{vmatrix}=0.$$

On en tire

$$(15)\qquad f(x_1, y_1, z_1)=-\frac{\lambda^2}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & p & q & r\\ p & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{D}\\ q & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{E}\\ r & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{E}\end{vmatrix},$$

où Δ est le discriminant (II, 360) du premier membre de l'équation (2) de la conique.

Les relations (14) donnent aussi

$$(16)\qquad xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=2\lambda(px+qy+rz).$$

Il nous reste à substituer les valeurs (15) et (16) dans l'équation (X) pour avoir l'équation demandée des deux tan-

gentes. Celle-ci est donc

$$\text{(XII)}\quad f(x,y,z)\begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ p & A & B & D \\ q & B & C & E \\ r & D & E & F \end{vmatrix} + (px+qy+rz)^2 \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

§ III. — Le plan tangent aux surfaces du second degré.

371. Condition pour que le plan

$$(1)\qquad ax+by+cz+dt=0$$

soit tangent à la surface du second degré

$$(2)\quad \begin{cases} f(x,y,z,t) = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy \\ \qquad\qquad +2Ctx+2C'ty+2C''tz+Dt^2=0 \text{ [1]}. \end{cases}$$

Soient x', y', z', t' les coordonnées homogènes du point de contact. L'équation homogène du plan tangent sera

$$xf'_{x'}+yf'_{y'}+zf'_{z'}+tf'_{t'}=0;$$

elle sera identique avec l'équation (1) du plan donné, si l'on a

$$f'_{x'}=2a\lambda,\quad f'_{y'}=2b\lambda,\quad f'_{z'}=2c\lambda,\quad f'_{t'}=2d\lambda,$$

λ désignant une indéterminée.

Nous avons ainsi entre les cinq inconnues x', y', z', t' et λ les cinq équations homogènes

$$\begin{aligned} -0.\lambda+a\,x'+b\,y'+c\,z'+d\,t'&=0,\\ -a.\lambda+A\,x'+B''y'+B'z'+C\,t'&=0,\\ -b.\lambda+B''x'+A'y'+B\,z'+C'\,t'&=0,\\ -c.\lambda+B'x'+B\,y'+A''z'+C''t'&=0,\\ -d.\lambda+C\,x'+C'y'+C''z'+D\,t'&=0, \end{aligned}$$

---

[1] G. Dostor, *Archives de Mathématiques et de Physique*, 1875, t. LVII, p. 198.

dont la première exprime que le point de contact (x', y', z', t') appartient au plan tangent (1). Pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. On trouve ainsi la condition demandée

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & A & B'' & B' & C \\ b & B'' & A' & B & C' \\ c & B' & B & A'' & C'' \\ d & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

Il est aisé de voir que le premier membre de cette égalité est le discriminant de la fonction

$$f(x, y, z, t) + 2\lambda(ax + by + cz + dt)$$

des cinq variables x, y, z, t et λ. Par conséquent :

Pour qu'un plan (1) *soit tangent à une surface du second degré* (2), *il faut et il suffit qu'on trouve zéro pour le discriminant de la fonction que l'on obtient, en ajoutant au premier membre de l'équation de la surface le double produit du premier membre de l'équation du plan par une nouvelle variable.*

372. Condition pour que la droite

$$(3)\qquad ax + by + cz + dt = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d't = 0$$

soit tangente à la surface du second degré (2) [1]. — Les plans conduits par l'intersection des deux plans (3) sont représentés par l'équation générale

$$(4)\qquad (a + a'\lambda')x + (b + b'\lambda')y + (c + c'\lambda')z + (d + d'\lambda')t = 0.$$

Or l'un de ces plans est tangent à la surface (2) au point de contact (x, y, z, t) de la droite (3). Si l'équation (4) représente ce plan, on devra avoir les égalités de condition

$$\frac{f'_x}{a + a'\lambda'} = \frac{f'_y}{b + b'\lambda'} = \frac{f'_z}{c + c'\lambda'} = \frac{f'_t}{d + d'\lambda'} = -2\lambda.$$

---

[1] G. Dostor, *loc. cit.*, p. 200.

Les coordonnées du point de contact x, y, z, t et les deux indéterminées λ et λ' devront donc satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
&0.\lambda + 0.\lambda\lambda' + ax + by + cz + dt = 0,\\
&0.\lambda + 0.\lambda\lambda' + a'x + b'y + c'z + d't = 0,\\
&a.\lambda + a'.\lambda\lambda' + Ax + B''y + B'z + Ct = 0,\\
&b.\lambda + b'.\lambda\lambda' + B''x + A'y + Bz + C't = 0,\\
&c.\lambda + c'.\lambda\lambda' + B'x + By + A''z + C''t = 0,\\
&d.\lambda + d'.\lambda\lambda' + Cx + C'y + C''z + Dt = 0,
\end{aligned}$$

dont les deux premières expriment que le point de contact appartient aux deux plans (3) et par suite à leur droite d'intersection.

Pour que ces six équations, linéaires et homogènes par rapport aux inconnues λ, $\lambda\lambda'$, x, y, z, t, soient vérifiées par les mêmes valeurs de ces inconnues, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. La condition cherchée est donc

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a' & b' & c' & d' \\ a & a' & A & B'' & B' & C \\ b & b' & B'' & A' & B & C' \\ c & c' & B' & B & A'' & C'' \\ d & d' & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

373. Équation générale des surfaces du second degré qui touchent les trois axes de coordonnées [1]. — Les équations de l'axe des x étant $y = 0$, $z = 0$, nous obtenons la condition pour que l'axe des x soit tangent à la surface (2), en faisant, dans la relation (II),

$$\begin{aligned}
&a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad d = 0,\\
&a' = 0, \quad b' = 0, \quad c' = 1, \quad d' = 0.
\end{aligned}$$

Mais cette condition se détermine plus rapidement en faisant $y = z = 0$ dans l'équation (2) de la surface, et en exprimant que les deux racines de l'équation résultante en x

$$Ax^2 + 2Cx + D = 0$$

---

[1] G. Darboux, *loc. cit.*, p. 201.

sont égales. Donc l'axe des x est tangent à la surface (2), si $C^2 - AD = 0$.

De même les deux autres axes de coordonnées sont tangents à la surface du second degré pour $C'^2 - A'D = 0$, $C''^2 - A''D = 0$.

Supposons que la surface (2) soit à la fois tangente aux trois axes de coordonnées. Multiplions l'équation (2) par D et dans le résultat remplaçons AD, A'D, A''D respectivement par C^2, C'^2, C''^2. L'équation de la surface sera, pour $t = 1$,

$$C^2x^2 + C'^2y^2 + C''^2z^2 + 2BDyz + 2B'Dzx + 2B''Dxy + 2CDx + 2C'Dy + 2C''Dz + D^2 = 0,$$

ou

$$(Cx + C'y + C''z + D)^2 + 2(BD - C'C'')yz + 2(B'D - C''C)zx + 2(B''D - CC')xy = 0.$$

Ainsi, en représentant par $-P$, $-Q$, $-R$ les coefficients de yz, zx, xy, on voit que

$$\text{(III)} \qquad (Cx + C'y + C''z + D)^2 = Pyz + Qzx + Rxy$$

est l'*équation générale des surfaces du second degré, qui touchent à la fois les trois axes de coordonnées.*

Si l'on désigne par a, b, c les distances à l'origine des trois points de contact, cette équation prend la forme

$$\text{(IV)} \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)^2 = \frac{yz}{p^2} + \frac{zx}{q^2} + \frac{xy}{r^2},$$

où p^2, q^2, r^2 sont les quotients de D^2 par P, Q, R.

Considérons le tétraèdre ayant pour sommet l'origine et pour arêtes latérales les longueurs $2a$, $2b$, $2c$, dirigées suivant les axes. La surface (IV) touchera ces arêtes en leurs milieux et coupera les arêtes opposées aux points respectifs

$$x = 0, \quad \frac{y}{b} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{p^2}{bc}}, \quad \frac{z}{c} = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{p^2}{bc}};$$

$$y = 0, \quad \frac{z}{c} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{q^2}{ca}}, \quad \frac{x}{a} = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{q^2}{ca}};$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{a} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{r^2}{ab}}, \quad \frac{y}{b} = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{r^2}{ab}}.$$

Elle touchera ces arêtes, et forcément aussi en leurs milieux, si l'on a

$$p^2 = bc, \quad q^2 = ca, \quad r^2 = ab.$$

Donc *la surface du second degré*

$$\text{(V)} \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)^2 = \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab}$$

touche en leurs milieux les six arêtes du tétraèdre OABC, *dont les arêtes latérales* OA, OB, OC, *issues de l'origine et dirigées suivant les axes de coordonnées, sont respectivement* $2a$, $2b$, $2c$; *de plus la surface a son centre situé au centre de gravité du tétraèdre.*

374. Condition pour que l'intersection I des trois plans

$$(5) \qquad \begin{cases} P = ax + by + cz + dt = 0, \\ P' = a'x + b'y + c'z + d't = 0, \\ P'' = a''x + b''y + c''z + d''t = 0 \end{cases}$$

appartienne à la surface du second degré (2). — Les plans qui passent par l'intersection I des trois plans $P = 0$, $P' = 0$, $P'' = 0$, sont représentés par l'équation générale

$$(6) \qquad P + \lambda' P' + \lambda'' P'' = 0.$$

Or l'un de ces plans est tangent à la surface (2) au point d'intersection même I des trois plans (5). Si l'équation (3) représente ce plan, on doit avoir

$$\frac{f'_x}{a + a'\lambda' + a''\lambda''} = \frac{f'_y}{b + b'\lambda' + b''\lambda''}$$
$$= \frac{f'_z}{c + c'\lambda' + c''\lambda''} = \frac{f'_t}{d + d'\lambda' + d''\lambda''} = -2\lambda.$$

Les coordonnées x, y, z, t du point I et les trois indétermi-

nées λ, λ', λ'' devront donc satisfaire aux sept équations

$$\begin{aligned}
&0.\lambda + 0.\lambda\lambda' + 0.\lambda\lambda'' + ax + by + cz + dt = 0,\\
&0.\lambda + 0.\lambda\lambda' + 0.\lambda\lambda'' + a'x + b'y + c'z + d't = 0,\\
&0.\lambda + 0.\lambda\lambda' + 0.\lambda\lambda'' + a''x + b''y + c''z + d''t = 0,\\
&a.\lambda + a'.\lambda\lambda' + a''.\lambda\lambda'' + \mathrm{A}x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'z + \mathrm{C}t = 0,\\
&b.\lambda + b'.\lambda\lambda' + b''.\lambda\lambda'' + \mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}z + \mathrm{C}'t = 0,\\
&c.\lambda + c'.\lambda\lambda' + c''.\lambda\lambda'' + \mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}''t = 0,\\
&d.\lambda + d'.\lambda\lambda' + d''.\lambda\lambda'' + \mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z + \mathrm{D}t = 0,
\end{aligned}$$

dont les deux premiers expriment que le point d'intersection I (x, y, z, t) appartient aux trois plans (5).

Pour que ces sept équations, linéaires et homogènes par rapport aux sept inconnues $\lambda, \lambda\lambda', \lambda\lambda'', x, y, z, t$, soient vérifiées par les mêmes valeurs de ces inconnues, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. La condition cherchée est donc

$$(\mathrm{VI})\qquad \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & a & b & c & d\\
0 & 0 & 0 & a' & b' & c' & d'\\
0 & 0 & 0 & a'' & b'' & c'' & d''\\
a & a' & a'' & \mathrm{A} & \mathrm{B}'' & \mathrm{B}' & \mathrm{C}\\
b & b' & b'' & \mathrm{B}'' & \mathrm{A}' & \mathrm{B} & \mathrm{C}'\\
c & c' & c'' & \mathrm{B}' & \mathrm{B} & \mathrm{A}'' & \mathrm{C}''\\
d & d' & d'' & \mathrm{C} & \mathrm{C}' & \mathrm{C}'' & \mathrm{D}
\end{vmatrix} = 0.$$

Il est aisé de voir que le premier membre de cette relation est le discriminant de la fonction

$$2\lambda\mathrm{P} + 2\lambda'\mathrm{P}' + 2\lambda''\mathrm{P}'' + f(x, y, z, t) = 0,$$

pris par rapport aux sept variables $\lambda, \lambda', \lambda'', x, y, z, t$. Par conséquent, *pour que l'intersection de trois plans soit située sur une surface du second degré, il faut et il suffit que l'on trouve zéro pour le discriminant de la fonction que l'on obtient en ajoutant au premier membre de l'équation homogène de la surface les doubles produits respectifs des premiers membres des équations homogènes des trois plans par trois nouvelles variables.*

On verrait ainsi que l'intersection des trois plans

$$2x+y-z-1=0, \quad x-3y+z+2=0, \quad x+y-2z+3=0$$

appartient à la surface

$$6x^2-y^2-2z^2+2yz+6xy+2x-4y-2z=0.$$

§ IV. — Les cônes circonscrits aux surfaces du second degré.

375. Condition pour qu'une surface $f(x, y, z)=0$ soit conique. — Cette surface sera un cône passant par le point (a, b, c), si le plan tangent

$$(1) \qquad (X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0$$

contient la droite

$$(2) \qquad \frac{X-x}{x-a}=\frac{Y-y}{y-b}=\frac{Z-z}{z-c}=-u,$$

qui joint le point variable (x, y, z) de la surface au point (a, b, c).

On obtient ainsi, entre les quatre inconnues $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ et u les quatre équations homogènes du premier degré

$$\begin{aligned}
0.u+f'_x(X-x)+f'_y(Y-y)+f'_z(Z-z)&=0,\\
(x-a)u+(X-x)+0.(Y-y)+0.(Z-z)&=0,\\
(y-b)u+0.(X-x)+(Y-y)+0.(Z-z)&=0,\\
(z-c)u+0(X-x)+0.(Y-y)+(Z-z)&=0.
\end{aligned}$$

Éliminant ces inconnues, on trouve la relation de condition

$$(I) \qquad \begin{vmatrix} 0 & f'_x & f'_y & f'_z \\ x-a & 1 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & 1 & 0 \\ z-c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

qui doit exister, quelque soit le point (x, y, z) de la surface.

Cette relation, qui revient à

$$(\mathrm{II}) \qquad (x-a)f'_x + (y-b)f'_y + (z-c)f'_z = 0,$$

s'appelle *l'équation aux différences partielles des surfaces coniques* qui ont leur sommet au point (a, b, c). Elle s'obtient immédiatement, en remplaçant, dans (1), $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ par leurs valeurs tirées des équations (2).

376. Condition pour que l'équation générale du second degré

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x,y,z,t) = {} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ & + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ & + 2Ctx + 2C'ty + 2C''tz + Dt^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

représente un cône. — On sait que l'équation du plan tangent au point (x', y', z', t') de la surface (3) est

$$xf'_{x'} + yf'_{y'} + zf'_{z'} + tf'_{t'} = 0,$$

ou

$$(4) \qquad x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z + t'f'_t = 0.$$

Si l'équation (3) représente un cône, le plan tangent (4) passera par le sommet; et si x, y, z, t sont les coordonnées de ce sommet, l'équation (4) devra être satisfaite, quel que soit le point de contact (x', y', z', t') du plan tangent, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de ces variables qui vérifient en même temps les équations (3) et (4). On obtient ainsi les quatre équations de condition

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}f'_x &= Ax + B''y + B'z + Ct = 0, \\ \tfrac{1}{2}f'_y &= B''x + A'y + Bz + C't = 0, \\ \tfrac{1}{2}f'_z &= B'x + By + A''z + C''t = 0, \\ \tfrac{1}{2}f'_t &= Cx + C'y + C''z + Dt = 0. \end{aligned}$$

Ces quatre équations, étant homogènes, ne sauraient être vérifiées par les mêmes valeurs des variables que si leur

déterminant est nul. La condition demandée est donc

$$\text{(III)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, *pour que l'équation du second degré, à trois variables, représente un cône, il faut et il suffit que le discriminant de son premier membre, rendu homogène, soit égal à zéro.*

377. Équation du cône issu du point P (x_1, y_1, z_1, t_1), qui est circonscrit à la surface du second degré (3) (¹). — Désignons par x, y, z, t les coordonnées d'un point quelconque M d'une génératrice du cône, et par x', y', z', t' celles du point de contact C de cette génératrice avec la surface (3). Nous avons évidemment (193)

$$x' = \frac{x + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y' = \frac{y + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \quad z' = \frac{z + \lambda z_1}{1 + \lambda}, \quad t' = \frac{t + \lambda t_1}{1 + \lambda},$$

dont l'indéterminée λ dépend de la position du point M sur la génératrice CM.

Le point de contact C appartenant à la surface (2), nous avons

$$0 = f(x', y', z', t') = f\left(\frac{x + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \frac{y + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \frac{z + \lambda z_1}{1 + \lambda}, \frac{t + \lambda t_1}{1 + \lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{(1 + \lambda)^2} f(x + \lambda x_1, y + \lambda y_1, z + \lambda z_1, t + \lambda t_1).$$

Développant le second membre, on obtient, pour déterminer λ, l'équation

$$\lambda^2 f(x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda(x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} + t f'_{t_1}) + f(x, y, z, t) = 0.$$

Les deux racines de cette équation devant être égales, on trouve

$$\text{(IV)} \quad (x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} + t f'_{t_1})^2 - 4 f(x, y, z, t) f(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0$$

pour l'équation du cône demandé.

(¹) G. Dostor, *loc. cit.*, p. 202.

378. Équation du cône circonscrit à la surface du second degré (3), et qui touche cette surface suivant son intersection avec le plan

$$(5) \qquad px + qy + rz + st = 0\ (^1).$$

Soient x_1, y_1, z_1, t_1 les coordonnées du sommet P du cône; le plan polaire du point P sera

$$xf_{x_1} + yf_{y_1} + z_1 f + tf_{t_1} = 0.$$

Ce plan sera identique avec (5), si l'on a

$$(6) \qquad f_{x_1} = 2p\lambda, \quad f_{y_1} = 2q\lambda, \quad f_{z_1} = 2r\lambda, \quad f_{t_1} = 2s\lambda.$$

Multiplions ces quatre équations par les coordonnées respectives x_1, y_1, z_1, t_1 et ajoutons; nous obtenons l'égalité

$$\left.\begin{array}{l} x_1 f'_{x_1} + y_1 f'_{y_1} + z_1 f'_{z_1} + t_1 f'_{t_1} \\ \text{ou} \\ 2f(x_1, y_1, z_1, t_1) \end{array}\right\} = 2\lambda(px_1 + qy_1 + rz_1 + st_1),$$

qui, jointe aux équations (6), fournit le système des cinq équations

$$\begin{aligned} -f(x_1, y_1, z_1, t_1) + \lambda p x_1 + \lambda q y_1 + \lambda r z_1 + \lambda s t_1 &= 0, \\ -\lambda p + A\ x_1 + B'' y_1 + B' z_1 + C\ t_1 &= 0, \\ -\lambda q + B'' x_1 + A' y_1 + B\ z_1 + C' t_1 &= 0, \\ -\lambda r + B'\ x_1 + B\ y_1 + A'' z_1 + C'' t_1 &= 0, \\ -\lambda s + C\ x_1 + C' y_1 + C'' z_1 + D\ t_1 &= 0, \end{aligned}$$

entre les quatre inconnues x_1, y_1, z_1, t_1 au premier degré. Éliminant ces inconnues, on trouve la relation

$$\begin{vmatrix} f(x_1, y_1, z_1, t_1) & \lambda p & \lambda q & \lambda r & \lambda s \\ \lambda p & A & B'' & B' & C \\ \lambda q & B'' & A' & B & C' \\ \lambda r & B' & B & A'' & C'' \\ \lambda s & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0,$$

(1) G. Dostor, *loc. cit.*, p. 202.

qui donne

$$(7)\qquad f(x_1, y_1, z_1, t_1) = -\frac{\lambda^2}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & p & q & r & s \\ p & A & B'' & B' & C \\ q & B'' & A' & B & C' \\ r & B' & B & A'' & C'' \\ s & C & C' & C'' & D \end{vmatrix},$$

où Δ représente le discriminant (V) de la fonction (4) du n° **296**.

Des relations (6) on tire aussi

$$(8)\qquad xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} + tf'_{t_1} = 2\lambda(px + qy + rz + st).$$

Il suffira maintenant de substituer les valeurs (7) et (8) dans l'équation (IV), pour avoir l'équation demandée du cône circonscrit dont le sommet est le pôle du plan (5). Cette équation est

$$(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{aligned} & f(x, y, z, t)\begin{vmatrix} 0 & p & q & r & s \\ p & A & B'' & B' & C \\ q & B'' & A' & B & C' \\ r & B' & B & A'' & C'' \\ s & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} \\ & = -(px + qy + rz + st)^2\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

CHAPITRE II.

LES INVARIANTS.

§ I. Les transformations linéaires. — § II. Les invariants.

§ I. — Les transformations linéaires.

379. On appelle *transformation linéaire* d'une fonction homogène de n variables $x, y, z, \ldots$ le résultat qu'on obtient en remplaçant, dans la fonction, ces n variables par des fonctions linéaires de nouvelles variables $x', y', z', \ldots$, c'est-à-dire en y faisant

$$x = \lambda_1 x' + \mu_1 y' + \nu_1 z' + \ldots,$$
$$y = \lambda_2 x' + \mu_2 y' + \nu_2 z' + \ldots,$$
$$z = \lambda_3 x' + \mu_3 y' + \nu_3 z' + \ldots.$$

380. Exemple. — Dans la fonction homogène du second degré à deux variables

$$(1) \qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

faisons

$$(2) \qquad x = \lambda_1 x' + \mu_1 y', \quad y = \lambda_2 x' + \mu_2 y';$$

elle devient

$$\varphi(x', y') = A(\lambda_1 x' + \mu_1 y')^2$$
$$+ 2B(\lambda_1 x' + \mu_1 y')(\lambda_2 x' + \mu_2 y') + C(\lambda_2 x' + \mu_2 y')^2,$$

ou, en effectuant et en ordonnant par rapport à x',

$$\begin{aligned}\varphi(x', y') = {} & (A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + C\lambda_2^2)x'^2 \\ & + 2(A\lambda_1\mu_1 + B\lambda_1\mu_2 + B\lambda_2\mu_1 + C\lambda_2\mu_2)x'y' \\ & + (A\mu_1^2 + 2B\mu_1\mu_2 + C\mu_2^2)y'^2.\end{aligned}$$

Cette fonction transformée peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \varphi(x', y') = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2,$$

si l'on a soin de poser

$$\begin{aligned} A' &= A\lambda_1^2 + 2B\lambda_1\lambda_2 + C\lambda_2^2, \\ B' &= A\lambda_1\mu_1 + B(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + C\lambda_2\mu_2, \\ C' &= A\mu_1^2 + 2B\mu_1\mu_2 + C\mu_2^2. \end{aligned}$$

Ces trois égalités fournissent les coefficients A', B', C' de la fonction transformée (2).

381. Au moyen de ces dernières égalités, nous pouvons calculer le discriminant $A'C' - B'^2$ de la fonction transformée (3) en valeur des coefficients A, B et C de la fonction primitive.

Nous trouvons en effet que

$$\begin{aligned} A'C' - B'^2 = {} & AC\lambda_1^2\mu_2^2 + AC\lambda_2^2\mu_1^2 - 2AC\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 \\ & + 2B^2\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2 - B^2\lambda_1^2\mu_2^2 - B^2\lambda_2^2\mu_1^2, \end{aligned}$$

ou bien

$$A'C' - B'^2 = AC(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2 - B^2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2,$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad A'C' - B^2 = (AC - B^2)(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2.$$

Dans cette égalité, le facteur $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ est le déterminant des équations de transformation (2). Par conséquent, nous voyons que *le discriminant* $A'C' - B'^2$ *de la fonction transformée* (3) *est égal au discriminant* $AC - B^2$ *de la fonction primitive* (1), *multiplié par le carré du déterminant* $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ *des formules de transformation* (2).

Le déterminant $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$ se nomme le *module de transformation*.

Le changement des coordonnées, en Géométrie analytique, s'opérant par des substitutions linéaires, est un cas particulier des transformations linéaires.

§ II. — Les invariants.

382. Définition. — Dans la transformation linéaire des nos 380 et 381, la quantité $AC - B^2$ est un invariant de la fonction $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

En général, on appelle *invariant* d'une fonction homogène de n variables toute expression entre les coefficients de cette fonction qu'une transformation linéaire change en une expression identique entre les coefficients analogues de la fonction transformée, divisée par une puissance du module de transformation.

L'invariant est *absolu*, si cette puissance est égale à l'unité.

383. Théorème. — *Les discriminants sont des invariants.*

Considérons la fonction homogène du second degré

$$(1) \qquad F(X, Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

dont le discriminant est le déterminant des deux équations

$$\tfrac{1}{2}F'_X = AX + BY = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}F'_Y = BX + CY = 0,$$

et a pour valeur

$$(2) \qquad \mathfrak{D}_2 = AC - B^2.$$

Dans la fonction (1) faisons les substitutions linéaires

$$X = \lambda x + \mu y, \quad Y = \lambda' x + \mu' y;$$

elle devient

$$(3) \quad \begin{cases} f(x, y) = A(\lambda x + \mu y)^2 \\ \qquad + 2B(\lambda x + \mu y)(\lambda' x + \mu' y) + C(\lambda' x + \mu' y)^2. \end{cases}$$

Pour avoir le discriminant de cette transformée (3), égalons

à zéro les dérivées prises par rapport à x et y; nous formons les deux équations

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}f'_x &= \mathrm{A}\lambda(\lambda x+\mu y)+\mathrm{B}\lambda(\lambda' x+\mu' y)\\ &\quad+\mathrm{B}\lambda'(\lambda x+\mu y)+\mathrm{C}\lambda'(\lambda' x+\mu' y)=0,\\ \tfrac{1}{2}f'_y &= \mathrm{A}\mu(\lambda x+\mu y)+\mathrm{B}\mu(\lambda' x+\mu' y)\\ &\quad+\mathrm{B}\mu'(\lambda x+\mu y)+\mathrm{C}\mu'(\lambda' x+\mu' y)=0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}\lambda')(\lambda x+\mu y)+(\mathrm{B}\lambda+\mathrm{C}\lambda')(\lambda' x+\mu' y)&=0,\\ (\mathrm{A}\mu+\mathrm{B}\mu')(\lambda x+\mu y)+(\mathrm{B}\mu+\mathrm{C}\mu')(\lambda' x+\mu' y)&=0.\end{aligned}$$

Si nous posons dans ces équations

$$(4)\qquad \begin{cases}\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}\lambda'=\mathcal{A}, & \mathrm{B}\lambda+\mathrm{C}\lambda'=\mathcal{B},\\ \mathrm{A}\mu+\mathrm{B}\mu'=\mathcal{A}', & \mathrm{B}\mu+\mathrm{C}\mu'=\mathcal{B}',\end{cases}$$

elles deviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda x+\mu y)+\mathcal{B}(\lambda' x+\mu' y)&=0,\\ \mathcal{A}'(\lambda x+\mu y)+\mathcal{B}'(\lambda' x+\mu' y)&=0,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\lambda+\mathcal{B}\lambda')x+(\mathcal{A}\mu+\mathcal{B}\mu')y&=0,\\ (\mathcal{A}'\lambda+\mathcal{B}'\lambda')x+(\mathcal{A}'\mu+\mathcal{B}'\mu')y&=0,\end{aligned}$$

et fournissent le discriminant

$$\mathcal{D}'_2=\begin{vmatrix}\mathcal{A}\lambda+\mathcal{B}\lambda' & \mathcal{A}\mu+\mathcal{B}\mu'\\ \mathcal{A}'\lambda+\mathcal{B}'\lambda' & \mathcal{A}'\mu+\mathcal{B}'\mu'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ \mathcal{A}' & \mathcal{B}'\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\lambda & \lambda'\\ \mu & \mu'\end{vmatrix}.$$

Mais, en vertu des égalités (4), nous avons

$$\begin{vmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{B}\\ \mathcal{A}' & \mathcal{B}'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathrm{A}\lambda+\mathrm{B}\lambda' & \mathrm{B}\lambda+\mathrm{C}\lambda'\\ \mathrm{A}\mu+\mathrm{B}\mu' & \mathrm{B}\mu+\mathrm{C}\mu'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{B} & \mathrm{C}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda & \lambda'\\ \mu & \mu'\end{vmatrix};$$

donc il vient

$$\mathcal{D}_2=\begin{vmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{B} & \mathrm{C}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda & \lambda'\\ \mu & \mu\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\lambda & \lambda'\\ \mu & \mu'\end{vmatrix},$$

ou bien

$$(\mathrm{I})\qquad \mathcal{D}'_2=\mathcal{D}_2\begin{vmatrix}\lambda & \lambda'\\ \mu & \mu'\end{vmatrix}^2.$$

Donc le discriminant $\mathfrak{D}'_2$ de la fonction transformée (3) est égal au discriminant $\mathfrak{D}_1$ de la fonction primitive (1), multiplié par le carré du module de transformation $(\lambda\mu' - \mu\lambda')$.

Prenons encore la fonction homogène du second degré à trois variables

$$(5)\quad F(X, Y, Z) = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

dont le discriminant est (360, III)

$$\mathfrak{D}_3 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Dans cette fonction (5) faisons les substitutions linéaires

$$(6)\quad \begin{cases} X = \lambda x + \mu y + \nu z, \\ Y = \lambda' x + \mu' y + \nu' z, \\ Z = \lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z; \end{cases}$$

elle devient

$$(7)\quad \begin{cases} f(x, y, z) = A(\lambda x + \mu y + \nu z)^2 \\ \qquad + A'(\lambda' x + \mu' y + \nu' z)^2 \\ \qquad + A''(\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)^2 \\ \qquad + 2B(\lambda' x + \mu' y + \nu' z)(\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z) \\ \qquad + 2B'(\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z)(\lambda x + \mu y + \nu z) \\ \qquad + 2B''(\lambda x + \mu y + \nu z)(\lambda' x + \mu' y + \nu' z). \end{cases}$$

La demi-dérivée de cette fonction, prise par rapport à x, sera

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x = {} & A\lambda(\lambda x + \mu y + \nu z) + A'\lambda'(\lambda' x + \mu' y + \nu' z) + A''\lambda''(\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z) \\ & + B\lambda''(\lambda' x + \mu' y + \nu' z) + B\lambda'(\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z) \\ & + B'\lambda''(\lambda x + \mu y + \nu z) \qquad + B'\lambda(\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z) \\ & + B''\lambda'(\lambda x + \mu y + \nu z) + B''\lambda(\lambda' x + \mu' y + \nu' z), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x = {} & (A\lambda + B''\lambda' + B'\lambda'')(\lambda x + \mu y + \nu z) \\ & + (B''\lambda + A'\lambda' + B\lambda'')(\lambda' x + \mu' y + \nu' z) \\ & + (B'\lambda + B\lambda' + A''\lambda'')(\lambda'' x + \mu'' y + \nu'' z). \end{aligned}$$

On calculera semblablement $\frac{1}{2} f'_y$ et $\frac{1}{2} f'_z$.

Si l'on égale à zéro les trois expressions ainsi obtenues, on forme le

système des trois équations

$$(8)\quad \begin{cases} \mathcal{A}(\lambda x+\mu y+\nu z)+\mathcal{B}(\lambda' x+\mu' y+\nu' z)+\mathcal{C}(\lambda'' x+\mu'' y+\nu'' z)=0,\\ \mathcal{A}'(\lambda x+\mu y+\nu z)+\mathcal{B}'(\lambda' x+\mu' y+\nu' z)+\mathcal{C}'(\lambda'' x+\mu'' y+\nu'' z)=0,\\ \mathcal{A}''(\lambda x+\mu y+\nu z)+\mathcal{B}''(\lambda' x+\mu' y+\nu' z)+\mathcal{C}''(\lambda'' x+\mu'' y+\nu'' z)=0, \end{cases}$$

en posant

$$(9)\quad \begin{cases} A\lambda+B''\lambda'+B'\lambda''=\mathcal{A}, & B''\lambda+A'\lambda'+B\lambda''=\mathcal{B}, & B'\lambda+B\lambda'+A''\lambda''=\mathcal{C},\\ A\mu+B''\mu'+B'\mu''=\mathcal{A}', & B''\mu+A'\mu'+B\mu''=\mathcal{B}', & B'\mu+B\mu'+A''\mu''=\mathcal{C}',\\ A\nu+B''\nu'+B'\nu''=\mathcal{A}'', & B''\nu+A'\nu'+B\nu''=\mathcal{B}'', & B'\nu+B\nu'+A''\nu''=\mathcal{C}''. \end{cases}$$

Mettons les variables en facteurs communs dans les équations précédentes (8); nous pouvons les écrire

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}\lambda+\mathcal{B}\lambda'+\mathcal{C}\lambda'')x+(\mathcal{A}\mu+\mathcal{B}\mu'+\mathcal{C}\mu'')y+(\mathcal{A}\nu+\mathcal{B}\nu'+\mathcal{C}\nu'')z=0,\\ &(\mathcal{A}'\lambda+\mathcal{B}'\lambda'+\mathcal{C}\lambda'')x+(\mathcal{A}'\mu+\mathcal{B}'\mu'+\mathcal{C}\mu'')y+(\mathcal{A}'\nu+\mathcal{B}'\nu'+\mathcal{C}'\nu'')z=0,\\ &(\mathcal{A}''\lambda+\mathcal{B}''\lambda'+\mathcal{C}\lambda'')x+(\mathcal{A}''\mu+\mathcal{B}''\mu'+\mathcal{C}\mu'')y+(\mathcal{A}''\nu+\mathcal{B}''\nu'+\mathcal{C}''\nu'')z=0. \end{aligned}$$

Le déterminant de ces trois équations sera le discriminant de la fonction $F(X, Y, Z)$. En le représentant par $\mathfrak{D}'_3$, on a donc

$$\mathfrak{D}'_3=\begin{vmatrix} \mathcal{A}\lambda+\mathcal{B}\lambda'+\mathcal{C}\lambda'' & \mathcal{A}\mu+\mathcal{B}\mu'+\mathcal{C}\mu'' & \mathcal{A}\nu+\mathcal{B}\nu'+\mathcal{C}\nu''\\ \mathcal{A}'\lambda+\mathcal{B}'\lambda'+\mathcal{C}'\lambda'' & \mathcal{A}'\mu+\mathcal{B}'\mu'+\mathcal{C}'\mu'' & \mathcal{A}'\nu+\mathcal{B}'\nu'+\mathcal{C}'\nu''\\ \mathcal{A}''\lambda+\mathcal{B}''\lambda'+\mathcal{C}''\lambda'' & \mathcal{A}''\mu+\mathcal{B}''\mu'+\mathcal{C}''\mu'' & \mathcal{A}''\nu+\mathcal{B}''\nu'+\mathcal{C}''\nu'' \end{vmatrix}.$$

Or il est évident que cette expression est le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{C}\\ \mathcal{A}' & \mathcal{B}' & \mathcal{C}'\\ \mathcal{A}'' & \mathcal{B}'' & \mathcal{C}'' \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda''\\ \mu & \mu' & \mu''\\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix},$$

dont le premier, qui, en vertu des égalités (9), revient à

$$\begin{vmatrix} A\lambda+B''\lambda'+B'\lambda'' & B''\lambda+A'\lambda'+B\lambda'' & B'\lambda+B\lambda'+A''\lambda''\\ A\mu+B''\mu'+B'\lambda'' & B''\mu+A'\mu'+B\mu'' & B'\mu+B\mu'+A''\mu''\\ A\nu+B''\nu'+B'\lambda'' & B''\nu+A'\nu'+B\nu'' & B'\nu+B\nu'+A''\nu'' \end{vmatrix},$$

est lui-même le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda''\\ \mu & \mu' & \mu''\\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}\quad \text{et}\quad \begin{vmatrix} A & B'' & B'\\ B'' & A' & B\\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$\mathfrak{D}'_3 = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}.$$

ou

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{D}'_3 = \mathfrak{D}_3 \times \begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{vmatrix}^2.$$

384. Invariants des courbes du second degré. — Les invariants que nous venons de considérer existent, quelle que soit la nature des formules de transformation linéaire. Il en est d'autres qui n'apparaissent que dans des cas particuliers, lorsque les coefficients de transformation ont certaines valeurs.

Pour en donner un exemple, considérons la conique

$$\text{(10)} \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0,$$

qui a l'origine pour centre. Faisons tourner d'un angle α les axes de coordonnées, supposés rectangulaires; il faudra faire

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

ce qui transforme notre équation (10) dans la suivante :

$$A' x'^2 + 2B' x'y' + C' y'^2 + H = 0,$$

où

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha, \\ B' &= (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ C' &= A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Le module de transformation est ici $\cos\alpha . \cos\alpha - (\sin\alpha)\sin\alpha$ ou 1; par conséquent l'invariant $AC - B^2$ est absolu, et il vient

$$A'C' - B'^2 = AC - B^2.$$

Dans le cas général, on a (316)

$$A' + C' = A(\lambda_1^2 + \mu_1^2) + C(\lambda_2^2 + \mu_2^2) + 2B(\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1),$$

et la somme $A + C$ est loin d'être un invariant; mais, dans le

cas que nous considérons, les coefficients de A et C se réduisent à l'unité et celui de 2B s'anéantit, de sorte que

$$A' + C' = A + C.$$

Donc la somme $A + C$ est un invariant de la fonction $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ lorsqu'on passe d'axes rectangulaires à d'autres axes rectangulaires de même origine.

385. Interprétation géométrique de ces invariants. — Les invariants d'une fonction expriment toujours une propriété de la figure (*ligne* ou *surface*), que représente l'équation obtenue en égalant la fonction à une constante.

En effet : 1° la conique (10) coupant les axes des coordonnées, supposés rectangulaires, aux points

$$x = \pm\sqrt{-\frac{H}{A}}, \quad y = \pm\sqrt{-\frac{H}{C}},$$

les cordes qui passent par ces points d'intersection sont représentées par les équations

$$x\sqrt{A} \pm y\sqrt{C} = \pm\sqrt{-H},$$

et les distances de ces cordes au centre de la courbe (10) seront égales à

$$\sqrt{-\frac{H}{A+C}}.$$

L'égalité $A' + C' = A + C$ exprime donc que toutes les cordes, vues sous un angle droit du centre de la conique, sont à égales distances de ce centre; ou, en d'autres termes :

Tous les losanges inscrits dans l'ellipse (10) *sont circonscrits à un même cercle.*

2° Le diamètre conjugué à l'axe des x,

$$f'_x = Ax + By = 0,$$

coupe la conique (10) en deux points dont les ordonnées sont

$$y = \pm\sqrt{-\frac{AH}{AC - B^2}},$$

pendant que l'axe des x rencontre la courbe (10) en deux points qui ont les valeurs

$$x = \pm\sqrt{-\frac{H}{A}}$$

pour abscisses. L'aire du parallélogramme qui a ces quatre points pour sommets est donc égale à

$$2xy = \sqrt{\frac{H^2}{AC - B^2}}.$$

Il s'ensuit que l'égalité $A'C' - B'^2 = AC - B^2$ exprime que :

Les parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués sont équivalents.

386. Pour déterminer, par un autre exemple, les invariants des fonctions du second degré à deux variables, proposons-nous de *déterminer les axes de la conique à centre*

$$(11) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0.$$

Si de l'origine, centre de la courbe, nous décrivons un cercle avec l'un des axes comme diamètre, ce cercle sera tangent à la conique à deux sommets opposés. Or, θ étant l'angle des axes de coordonnées, l'équation de notre cercle sera

$$(12) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - R^2 = 0.$$

Nous pouvons tirer des équations (11) et (12) une équation homogène en x et y, qui représentera les droites d'intersection de ces deux courbes (1) et (2). Cette équation homogène s'obtient en multipliant (11) et (12) respectivement par R^2 et H, et en ajoutant; elle est

$$(AR^2 + H)x^2 + 2(BR^2 + H\cos\theta)xy + (CR^2 + H)y^2 = 0.$$

Les deux sécantes communes représentées par cette équation se confondront avec un axe de la conique (11), si le premier membre est un carré parfait. On trouve ainsi l'équation

$$(BR^2 + H\cos\theta)^2 - (AR^2 + H)(CR^2 + H) = 0,$$

qui fournit les demi-axes a et b de la conique (11).

Elle revient à

$$(B^2 - AC)R^4 - (A - 2B\cos\theta + C)HR^2 - H^2\sin^2\theta = 0,$$

et prouve que

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{A - 2B\cos\theta + C}{B^2 - AC} \times H, \\ a^2 b^2 = -\dfrac{H^2\sin^2\theta}{B^2 - AC}. \end{cases}$$

Ainsi les quantités $B^2 - AC$ et $A - 2B\cos\theta + C$ sont des invariants de la fonction (11); le premier est un invariant absolu et le second est un invariant relatif, puisqu'il varie avec l'angle des axes de coordonnées.

387. Les invariants de la fonction du second degré à trois variables

$$(13) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + H = 0$$

se trouvent de même, en traçant une sphère concentrique et bitangente à la surface représentée par cette équation.

Si nous appelons R le rayon de cette sphère, et que λ, μ, ν représentent les angles YOZ, ZOX, XOY compris entre les axes de coordonnées, l'équation qui fournit les trois demi-axes a, b, c de la surface (13) sera précisément l'équation (VII) du n° 345, p. 299.

Elle peut s'écrire

$$\Delta R^6 - PHR^4 + QH^2R^2 - \delta H^3 = 0,$$

en posant

$$A\,A'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

$$B^2 - A'A'' + B''^2 - AA' + 2(AB - B'B'')\cos\lambda$$
$$+ 2(A'B' - B''B)\cos\mu + 2(A''B'' - BB')\cos\nu,$$

$$A\sin^2\lambda + A'\sin^2\mu + A''\sin^2\nu$$
$$+ 2B(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + 2B'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2B''(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu),$$
$$-\cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

On en conclut que

$$a^2+b^2+c^2=\frac{PH}{\Delta},\quad b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=\frac{QH^2}{\Delta},\quad a^2b^2c^2=-\frac{\delta H^2}{\Delta}.$$

Il s'ensuit que les quantités Δ, P et Q sont des invariants. Le premier est absolu et les deux autres sont relatifs.

FIN.

2981 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

GENERAL BOOKBINDING CO.
NSNYI 13 042 9 A 7140
CONTROL MARK